

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

С. Г. Прохоренко



О. Г. Прохоренко

«08» июля 2022 г.

Регистрационный № УД – 11615/уч.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направление специальности:

1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность)

2022 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 01 04-2021, типового учебного плана G 31-1-011/пр-тип. от 31.03.2021 и учебного плана G31-1-018/уч. от 25.05.2021.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Ю.Г. Таразевич, старший преподаватель кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

РЕЦЕНЗЕНТ:

В.В. Лепин, ученый секретарь государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математической кибернетики Белорусского государственного университета
(протокол № 10 от 25.05.2022);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 29.06.2022).

Заведующий кафедрой
математической кибернетики _____ А.Л. Гладков

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Математическая логика является фундаментом математической науки и важным звеном математического образования. Она тесно связана с другими разделами математики, такими как алгебра, теория множеств, дискретная математика и математическая кибернетика.

Программа дисциплины предусматривает ознакомление с такими разделами математической логики как логика высказываний, исчисление высказываний, логика предикатов, исчисление предикатов, теория множеств и приложения в кибернетике.

Цели и задачи учебной дисциплины

Целью учебной дисциплины «Математическая логика» является обучение студентов базовым разделам математической логики. Вместе с тем большое внимание уделяется вопросам применения дискретной математики и математической логики к решению прикладных задач.

Развивающей целью учебной дисциплины является дальнейшее формирование у студентов навыков дискретного математического и формального логического мышления и умения применять его в конкретных задачах.

Воспитательной целью учебной дисциплины является формирование у студентов стремления к получению знаний в области математической логики и их использованию при решении актуальных прикладных проблем современного общества.

Основными задачами, решаемыми в рамках изучения дисциплины «Математическая логика», являются изучение терминологии, основных утверждений и методов их доказательства, освоение методов решения типовых задач, а также ознакомление со способами моделирования практических задач в терминах задач из рассматриваемых разделов математической логики.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Дискретная математика и математическая кибернетика» компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами.

Для понимания учебной дисциплины студенту требуется минимум предварительных математических знаний и навыков. В частности, нужно иметь самые начальные сведения из комбинаторики, теории множеств и линейной алгебры, которые даются в учебных дисциплинах «Математический анализ» и «Алгебра и теория чисел» государственного компонента.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Математическая логика» должно обеспечить формирование следующих универсальных, базовых профессиональных и специализированных компетенций.

универсальные компетенции:

- УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;
- УК-4. Работать в команде, толерантно воспринимать социальные, этнические, конфессиональные, культурные и иные различия;
- УК-5. Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;
- УК-6. Проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности;

базовые профессиональные компетенции:

БПК-2. Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира;

БПК-5. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы для решения теоретических и прикладных математических задач;

специализированные компетенции:

– СК-5. Применять основные понятия, утверждения и методы решения базовых задач дискретной математики.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать: основные понятия и утверждения из рассматриваемых разделов математической логики;

уметь: доказывать основные утверждения и применять их для решения типовых задач;

владеть: основными методами решения типовых задач из изучаемых разделов математической логики.

Структура учебной дисциплины

Учебная программа по учебной дисциплине предназначена для студентов очной формы получения образования. Дисциплина изучается в 3 семестре.

Всего на изучение учебной дисциплины «Математическая логика» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 144 часа, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекций – 36 часов, практических занятий – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 4 зачетных единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

РАЗДЕЛ 1. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Тема 1.1. Алгебра логики.

- 1.1.1. Понятие булевой функции (БФ). Задание БФ с помощью таблицы истинности. Число БФ от n переменных. Существенные и фиктивные переменные. Элементарные БФ.
- 1.1.2. Задание БФ формулами над системой элементарных функций. Эквивалентность (равносильность) формул. Основные равносильности. Эквивалентные преобразования формул и проблема минимизации.
- 1.1.3. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы (ДНФ и КНФ). Число ДНФ и КНФ от n переменных. Эквивалентные преобразования ДНФ и КНФ и проблема минимизации.
- 1.1.4. Полиномиальные нормальные формы. Полиномы Жегалкина (ПЖ). Теорема о существовании и единственности ПЖ для произвольной БФ.
- 1.1.5. Формулы над произвольной системой БФ. Замкнутые и полные системы БФ. Функции Шеффера.
- 1.1.6. Основные замкнутые классы булевых функций и их свойства.
- 1.1.7. Теорема Поста (критерий полноты системы БФ). Следствия из теоремы Поста. Число функций Шеффера от n переменных.

Тема 1.2. Элементы математической кибернетики.

- 1.2.1. Контактные схемы (КС) и схемы из функциональных элементов (СФЭ). Связь с формулами. Простейшие методы синтеза КС и СФЭ.
- 1.2.2. Универсальный метод синтеза Шеннона для КС и СФЭ. Мощной метод Шеннона.

Тема 1.3. Исчисление высказываний.

- 1.3.1. Определение исчисления высказываний (ИВ). Аксиомы и правило вывода. Простейшие выводы в ИВ.
- 1.3.2. Теорема о дедукции и другие метатеоремы ИВ.
- 1.3.3. Полнота и непротиворечивость ИВ.
- 1.3.4. Независимость системы аксиом ИВ.

РАЗДЕЛ 2. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Тема 2.1. Элементы теории множеств.

- 2.1.1. Множества. Операции над множествами. Отношения и функции. Бинарные отношения. Предикаты.
- 2.1.2. Язык логики предикатов. Свободные и связанные переменные. Термы. Замкнутые формулы. Интерпретация формул в логике предикатов. Значение терма и выполнимость формулы. Свойства выполнимости.

Тема 2.2. Исчисление предикатов.

- 2.2.1. Исчисление предикатов (ИП). Аксиомы и правила вывода ИП. Примеры выводимых формул в ИП. Простейшие выводы в ИП.
- 2.2.2. Теорема о дедукции в ИП и ее применение.
- 2.2.3. Полнота и непротиворечивость чистого ИП.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ								
1.1	Алгебра логики	14	12				2		
1.1.1	Понятие функции алгебры логики (булевой функции). Задание булевой функции (БФ) с помощью таблицы истинности. Число БФ от n переменных. Существенные и фиктивные переменные. Элементарные БФ.	2	2					[1,2,3,4,6,8] Экспресс-опрос	
1.1.2	Задание БФ формулами над системой элементарных функций. Эквивалентность (равносильность) формул. Основные равносильности. Эквивалентные преобразования формул и проблема минимизации.	2	2					[1,2,3,4,6,8] Устный опрос	
1.1.3	Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы (ДНФ и КНФ). Число ДНФ и КНФ от n переменных. Эквивалентные преобразования ДНФ и КНФ и проблема минимизации.	2	1				1	[1,2,6,7] Контрольная работа № 1	

1.1.4	Полиномиальные нормальные формы. Полиномы Жегалкина (ПЖ). Теорема о существовании и единственности ПЖ для произвольной БФ.	2	2					[1,2,6,7]	Устный опрос
1.1.5	Формулы над произвольной системой БФ. Замкнутые и полные системы БФ. Функции Шеффера.	2	2					[1,2,6,7]	Коллоквиум
1.1.6	Основные замкнутые классы булевых функций и их свойства.	2	1				1	[1,2,6,7]	Устный опрос
1.1.7	Теорема Поста (критерий полноты системы БФ). Следствия из теоремы Поста. Число функций Шеффера n переменных.	2	2					[1,2,6,7]	Экспресс-опрос
1.2	Элементы математической кибернетики	4	3				1		
1.2.1	Контактные схемы (КС) и схемы из функциональных элементов (СФЭ). Связь с формулами. Простейшие методы синтеза КС и СФЭ.	2	1				1	[1,2,4,7,8]	Контрольная работа № 2
1.2.2	Универсальный метод синтеза Шеннона для КС и СФЭ. Мощностной метод Шеннона.	2	2					[1,2,4,7,8]	Экспресс-опрос
1.3	Исчисление высказываний	8	7				1		
1.3.1	Определение исчисления высказываний (ИВ). Аксиомы и правило вывода. Простейшие выводы в ИВ.	2	2					[3,4,9,10]	Устный опрос
1.3.2	Теорема о дедукции и другие метатеоремы ИВ.	2	1				1	[3,4,9,10]	Контрольная работа № 3
1.3.3	Полнота и непротиворечивость ИВ.	2	2					[3,4,9,10]	Устный опрос
1.3.4	Независимость системы аксиом ИВ.	2	2					[3,4,9,10]	Экспресс-опрос
2	ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ								
2.1	Элементы теории множеств	4	3				1		
2.1.1	Множества. Операции над множествами. Отношения и функции. Бинарные отношения. Предикаты.	2	2					[1,2,3,9,10]	Экспресс-опрос
2.1.2	Язык логики предикатов. Свободные и связанные переменные. Термы. Замкнутые формулы.	2	1				1	[3,4,9,10]	Коллоквиум

	Интерпретация формул в ИП. Значение терма и выполнимость формулы. Свойства выполнимости.								
2.2	Исчисление предикатов	6	5				1		
2.2.1	Исчисление предикатов (ИП). Аксиомы и правила вывода ИП. Примеры выводимых формул в ИП. Простейшие выводы в ИП.	2	2					[3,4,9,10]	Устный опрос
2.2.2	Теорема о дедукции в ИП и ее применение.	2	1				1	[3,4,9,10]	Контрольная работа № 4
2.2.3	Полнота и непротиворечивость чистого ИП	2	2					[3,4,9,10]	Устный опрос
	ИТОГО	36	30				6		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Ерусалимский, Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум: учебник / Я.М. Ерусалимский. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2018. – 472 с. – URL : <https://e.lanbook.com/book/212897>.
2. Кожухов, С. Ф. Сборник задач по дискретной математике : учебное пособие / С. Ф. Кожухов, П. И. Совертков. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. - 324с. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212675>.
3. Зюзьков, В. М. Введение в математическую логику : учебное пособие / В. М. Зюзьков. - Изд. 2-е, испр. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2018. - 265 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/213008>
4. Супрун, В. П. Основы математической логики : [учеб. пособие] / В. П. Супрун. - Москва : URSS : Ленанд, 2017. - 197 с.
5. Авдошин, С. М. Дискретная математика. Формально-логические системы и языки / С. М. Авдошин, А. А. Набебин ; [науч. ред. В. А. Захаров]. - Москва : ДМК Пресс, 2018. - 389 с. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1027772>.

Перечень дополнительной литературы

6. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учеб. Пособие для вузов / Под ред. В.А. Садовниченко. – 4-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 384 с.
7. Гаврилов, Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике : [учеб. пособие] / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. - Изд. 3-е, перераб. - Москва : ФИЗМАТЛИТ®, 2009. - 416 с.
8. Яблонский С.В. Элементы математической кибернетики. – М.: Высшая школа, 2007. – 188 с.
9. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1976.
10. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике, теории алгоритмов. – М.: Наука, 1984.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

С целью текущего контроля знаний студентов предусматривается проведение устных опросов, экспресс-опросов, коллоквиумов и контрольных работ.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Математическая логика» учебным планом предусмотрен **экзамен**.

Итоговая отметка формируется на основе:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.).

2. Положения о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в БГУ (Приказ ректора БГУ от 31.03.2020 № 189-ОД).

3. Критериев оценки результатов учебной деятельности обучающихся в учреждениях высшего образования по десятибалльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 28.05.2013 г. № 09-10/53-ПО).

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- устный опрос – 17 %;
- экспресс-опрос – 17 %;
- коллоквиум – 33 %;
- контрольная работа – 33 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей успеваемости составляет 30 %, экзаменационной отметки – 70 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Раздел 1. Логика высказываний.

Тема 1.1. Алгебра логики (2 ч)

1. Найти формулу для числа булевых функций от n переменных, которые:
1) сохраняют константу 0; 2) сохраняют константу 1; 3) являются самодвойственными; 4) являются линейными.

2. Доказать, что из каждой немонотонной булевой функции от n переменных с помощью подстановки вместо ее переменных 0, 1 или x можно получить функцию \bar{x} .
3. Построить полином Жегалкина, минимальные ДНФ и КНФ для заданной булевой функции 3-х переменных.
4. Доказать, что любая полная независимая система, состоящая из 4-х булевых функций, содержит обе константы.

Форма контроля – устный опрос, контрольная работа № 1.

Тема 1.2. Элементы математической кибернетики (1 ч)

1. Для заданной булевой функции 3-х переменных построить контактную схему с минимальным числом контактов.
2. Для заданной булевой функции 3-х переменных построить схему из функциональных элементов в заданном базисе с минимальным числом элементов.

Форма контроля – контрольная работа № 2.

Тема 1.3. Исчисление высказываний (1 ч)

1. Для заданной формулы исчисления высказываний построить ее вывод либо доказать ее невыводимость.
2. Найти теорему исчисления высказываний с кратчайшим выводом длины 3.
3. Найти теорему исчисления высказываний с кратчайшим выводом длины 4.
4. Существуют ли теоремы исчисления высказываний с кратчайшим выводом длины 2?
5. Построить вывод произвольной формулы из противоречия.
6. Доказать непротиворечивость исчисления высказываний.

Форма контроля – контрольная работа № 3.

Раздел 2. Логика предикатов.

Тема 2.1. Элементы теории множеств (1 ч)

1. Для заданной формулы логики предикатов найти тождественно истинную и тождественно ложную интерпретацию.
2. Привести пример формулы, являющейся опровержимой и выполнимой в разных интерпретациях.
3. Для заданной формулы логики предикатов доказать ее выполнимость (опровержимость).

Форма контроля – коллоквиум.

Тема 2.2. Исчисление предикатов (1 ч)

1. Для заданной формулы исчисления предикатов построить ее вывод либо доказать ее невыводимость.
2. Доказать, что любая формула, выводимая в исчислении предикатов – тождественно истинная.
3. Доказать теорему о дедукции в исчислении предикатов.

Форма контроля – контрольная работа № 4.

Примерная тематика контрольных работ

- Контрольная работа № 1. «Построение и минимизация дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм».
- Контрольная работа № 2. «Эквивалентные преобразования и минимизация контактных схем и схем из функциональных элементов».
- Контрольная работа № 3. «Применение теоремы о дедукции и других метатеорем для построения выводов в исчислении высказываний».
- Контрольная работа № 4. «Применение теоремы о дедукции для доказательства выводимости формул и построения выводов в исчислении предикатов».

Примерная тематика практических занятий

1. Решение задач на задание булевых функций с помощью таблиц истинности: распознавание логических равносильностей, тавтологий, противоречий, решение логических уравнений.
2. Решение задач на равносильные преобразования логических формул.
3. Построение ДНФ (совершенной ДНФ) и КНФ (совершенной КНФ) с помощью таблиц истинности и с помощью равносильных логических преобразований.
4. Решение задач минимизации ДНФ и КНФ не более 3-х переменных.
5. Решение задач на нахождение полинома Жегалкина булевой функции.
6. Распознавание полноты системы булевых функций при помощи теоремы Поста.
7. Решение задач минимизации контактных схем и схем из функциональных элементов не более 3-х переменных.
8. Решение задачи синтеза контактных схем и схем из функциональных элементов для булевых функций не более 4-х переменных.
9. Применение метода Шеннона и метода каскадов для синтеза контактных схем и схем из функциональных элементов.
10. Распознавание выводимости формул и построение выводов в исчислении высказываний.
11. Распознавание выводимости формул и построение выводов в исчислении предикатов.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает:

- осуществление студентами личностно-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

Наиболее эффективной предполагается следующая форма реализации эвристического подхода: доказательства громоздких теорем, а также решения сложных задач разбиваются на этапы, после чего обучаемые подводятся к самостоятельному определению действий на этапах.

При организации образовательного процесса используется также *практико-ориентированный подход*, который предполагает:

- освоение содержания образования через решение практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по индивидуально заданной теме дисциплины;
- выполнение домашнего задания;
- проведение научно-исследовательских работ;
- подготовка к участию в научных и научно-практических конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Понятие булевой функции. Задание булевой функции с помощью таблицы истинности. Число булевых функций от n переменных.
2. Элементарные булевы функции.
3. Задание булевых функций с помощью логических формул. Основные логические равносильности.
4. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ).
5. Конъюнктивные нормальные формы (КНФ).
6. Разложение Шеннона. Принцип двойственности.
7. Полиномиальные нормальные формы. Полином Жегалкина. Теорема о единственности представления булевой функции посредством полинома Жегалкина.
8. Замыкание класса булевых функций. Пять основных замкнутых классов булевых функций.
9. Полнота системы булевых функций. Теорема Поста о полноте системы булевых функций (доказательство необходимости).
10. Теорема Поста о полноте системы булевых функций (первая часть доказательства достаточности).
11. Теорема Поста о полноте системы булевых функций (вторая часть доказательства достаточности).
12. Следствия из теоремы Поста о полноте системы булевых функций.
13. Контактная схема (КС). Проводимость схемы. Проблема синтеза.
14. Плоские и параллельно-последовательные КС. Двойственность. Связь с формулами.
15. Эквивалентные преобразования и минимизация КС. Проблема минимизации.
16. Исчисление высказываний. Аксиомы и правило вывода. Простейшие выводы.
17. Теорема о дедукции в исчислении высказываний и ее применение.
18. Полнота и непротиворечивость исчисления высказываний.
19. Независимость системы аксиом исчисления высказываний.
20. Исчисление предикатов. Аксиомы и правила вывода. Простейшие выводы.
21. Теорема о дедукции в исчислении высказываний и ее применение для построения выводов.
22. Полнота и непротиворечивость исчисления предикатов.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
на ____ / ____ учебный год

№№ ПП	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры математической кибернетики (протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой
доктор физ.-мат. наук, профессор

А.Л. Гладков

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
доктор физ.-мат. наук, доцент

С.М. Босяков