

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям

 О.Т. Дрохоренко

«08» июля 2022 г.



Регистрационный № УД – 11614/уч.

**ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА**

Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:

- |               |   |
|---------------|---|
| 1-31 03 08    | <b>Математика и информационные технологии<br/>(по направлениям)</b><br>Направление специальности:           |
| 1-31 03 08-02 | Математика и информационные технологии<br>(математическое и программное обеспечение<br>мобильных устройств) |

2022 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 08-2021, типового учебного плана G31-1-012/пр-тип. от 31.03.2021, учебных планов № G 31-1-017/ уч. от 25.05.2021, № G 31-1-001/уч.ин. от 31.05.2021, № G 31-1-003/ уч. з. от 31.05.2021, G31-1-221/уч. от 22.03.2022, № G 31-1-235/уч. ин. от 27.05.2022, G31-1-219/уч. з. от 27.05.2022.

**СОСТАВИТЕЛЬ:**

Ю.Г. Таразевич, старший преподаватель кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

**РЕЦЕНЗЕНТ:**

В.В. Лепин, ученый секретарь государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой математической кибернетики Белорусского государственного университета  
(протокол № 10 от 25.05.2022);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета  
(протокол № 6 от 29.06.2022).

Заведующий кафедрой  
математической кибернетики \_\_\_\_\_ А.Л. Гладков

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Термин “дискретная математика” происходит от латинского слова “discretus”, что в переводе означает “отдельный, разъединенный, разорванный, сложенный из отдельных частей, прерывный”.

Фактически математика как наука с самого своего рождения делится на континуальную и дискретную. К первой традиционно относят все то, что явно или неявно содержит идеи теории пределов и непрерывности. Ко второй – все остальное. Таким образом, в широком смысле к дискретной математике можно отнести арифметику, алгебру, теорию множеств, общую теорию отображений, комбинаторный анализ, теорию графов, математическую логику, теорию алгоритмов, теорию кодирования, теорию функциональных систем, математическую теорию управляющих систем и многое другое.

Значение дискретной математики и математической логики в настоящее время определяется многими факторами. Так, их можно рассматривать в качестве теоретической основы компьютерной математики. Кроме того, модели и методы дискретной математики и математической логики являются хорошим средством и языком для построения и анализа моделей в различных науках, включая химию, биологию, генетику, физику, социологию, психологию, экологию и др. Наконец, дискретная математика и математическая логика являются важными звеньями общего математического образования.

Учебная дисциплина “Дискретная математика и математическая логика” состоит из двух разделов – “Дискретная математика” и “Математическая логика”. Первый раздел представлен основами комбинаторики, алгебры логики, теории графов и математической кибернетики. При этом тема «Алгебра логики» имеет непосредственное отношение ко второму разделу, так как является основой для простейших формальных теорий, изучаемых в математической логике: «Исчисление высказываний» и «Исчисление предикатов».

### **Цели и задачи учебной дисциплины**

**Целью** учебной дисциплины «Дискретная математика и математическая логика» является обучение студентов базовым разделам дискретной математики и математической логики. Вместе с тем большое внимание уделяется вопросам применения дискретной математики и математической логики к решению прикладных задач.

**Развивающей целью** учебной дисциплины является дальнейшее формирование у студентов навыков дискретного математического и формально-логического мышления и умения применять их в конкретных задачах.

**Воспитательной целью** учебной дисциплины является формирование у студентов стремления к получению знаний в области дискретной математики и

математической логики и их использованию при решении актуальных прикладных проблем современного общества.

**Основными задачами**, решаемыми в рамках изучения дисциплины «Дискретная математика и математическая логика», являются изучение терминологии, основных утверждений и методов их доказательства, освоение методов решения типовых задач, а также ознакомление со способами моделирования практических задач в терминах задач из рассматриваемых разделов дискретной математики и математической логики.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Дискретная математика» компонента учреждения высшего образования.

Для понимания учебной дисциплины студенту требуется минимум предварительных математических знаний и навыков. В частности, нужно иметь самые начальные сведения из общей теории отображений, теории множеств и линейной алгебры, которые даются в учебных дисциплинах «Математический анализ» и «Алгебра и теория чисел» государственного компонента.

#### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Дискретная математика и математическая логика» должно обеспечить формирование следующих универсальных, базовых профессиональных и специализированных компетенций.

##### **универсальные** компетенции:

- УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;
- УК-4. Работать в команде, толерантно воспринимать социальные, этнические, конфессиональные, культурные и иные различия;
- УК-5. Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;
- УК-6. Проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности;

##### **базовые профессиональные** компетенции:

БПК-2. Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира;

БПК-5. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы для решения теоретических и прикладных математических задач;

##### **специализированные** компетенции:

- СК-5. Применять основные понятия, утверждения и методы решения базовых задач дискретной математики.

В результате изучения дисциплины студент должен:

**знать:** основные понятия и утверждения из рассматриваемых разделов дискретной математики и математической логики;

**уметь:** доказывать основные утверждения и применять их для решения типовых задач;

**владеть:** основными методами решения типовых задач из изучаемых разделов дискретной математики и математической логики.

### **Структура учебной дисциплины**

Учебная программа предназначена для студентов очной и заочной форм получения высшего образования.

На изучение учебной дисциплины «Дискретная математика и математическая логика» по специальности 1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям), направление специальности 1-31 03 08-02 Математика и информационные технологии (математическое и программное обеспечение мобильных устройств), студентами очной формы обучения всего отведено 198 часов, в том числе 122 аудиторных часа, из них:

– в 3-м семестре 108 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, практические занятия – 32 часа, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетных единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

– в 4-м семестре – 90 часов, в том числе 50 аудиторных часов, из них: лекции – 16 часов, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетных единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

Для заочной формы обучения всего отведено 198 часов, в том числе 28 аудиторных часов, из них:

– в 3-м семестре 158 часов, в том числе 28 аудиторных часов, из них: лекции – 12 часов, практические занятия – 16 часов. Предусмотрено написание контрольной работы.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетных единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

– в 5-м семестре всего 40 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетных единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Раздел 1. Дискретная математика

### Тема 1.1. Элементы комбинаторики.

- 1.1.1. Предмет комбинаторики. Комбинаторные объекты и комбинаторные числа. Комбинаторные конфигурации. Подсчет числа комбинаторных конфигураций.
- 1.1.2. Размещения и сочетания. Число  $r$ -размещений с повторениями и без повторений из  $n$  элементов. Число подмножеств конечного множества.
- 1.1.3. Число  $r$ -сочетаний с повторениями и без повторений из  $n$  элементов. Биномиальная теорема. Свойства биномиальных коэффициентов.
- 1.1.4. Метод включения и исключения, его применение.
- 1.1.5. Рекуррентные соотношения. Рекуррентное соотношение  $k$ -го порядка для функции одной переменной. Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами.
- 1.1.6. Числа Фибоначчи. Числа Стирлинга 1-го и 2-го рода.

### Тема 1.2. Элементы алгебры логики.

- 1.2.1. Понятие функции алгебры логики (булевой функции). Задание булевой функции (БФ) с помощью таблицы истинности. Число БФ от  $n$  переменных. Существенные и фиктивные переменные. Элементарные БФ.
- 1.2.2. Задание БФ формулами над системой элементарных функций. Эквивалентность (равносильность) формул. Основные равносильности. Эквивалентные преобразования формул и проблема минимизации.
- 1.2.3. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы (ДНФ и КНФ). Число ДНФ и КНФ от  $n$  переменных. Эквивалентные преобразования ДНФ и КНФ и проблема минимизации.
- 1.2.4. Разложение Шеннона для БФ. Принцип двойственности.
- 1.2.5. Полиномиальные нормальные формы. Полиномы Жегалкина (ПЖ). Теорема о существовании и единственности ПЖ для произвольной БФ.
- 1.2.6. Формулы над произвольной системой БФ. Замкнутые и полные системы БФ. Функции Шеффера.
- 1.2.7. Основные замкнутые классы алгебры логики (предполные классы) и их свойства. Теорема Поста (критерий полноты системы БФ). Следствия из теоремы Поста. Число функций Шеффера от  $n$  переменных.

### Тема 1.3. Элементы теории графов.

- 1.3.1. Основные понятия теории графов. Способы задания графов. Типы графов. Матрицы смежности и матрицы инциденций. Изоморфизм и гомеоморфизм графов.
- 1.3.2. Операции над графами. Подграфы. Маршруты, цепи и циклы. Компоненты связности. Деревья. Двудольные графы. Оценки числа графов и деревьев.

- 1.3.3. Эйлеров цикл. Критерий эйлеровости графа. Гамильтонов цикл. Достаточные условия гамильтоновости графа.
- 1.3.4. Плоские и планарные графы. Критерий планарности Понтрягина-Куратовского. Двойственные плоские графы.
- 1.3.5. Матроиды. Матроиды, представимые над полями. Графические матроиды. Представимость графического матроида над любым полем матрицей инциденций графа.

#### **Тема 1.4. Элементы математической кибернетики.**

- 1.4.1. Контактные схемы (КС) и схемы из функциональных элементов (СФЭ). Связь с формулами. Простейшие методы синтеза КС и СФЭ. Метод Шеннона и метод каскадов. Проблема минимизации.
- 1.4.2. Матрицы инциденций КС. Расширенные полиномиальные матрицы (РМ). Алгебраизация КС в классах РМ над произвольными полями.
- 1.4.3. Эквивалентные преобразования КС и РМ. Метод приведения произвольной РМ над кольцом ПЖ к одноэлементному виду.
- 1.4.4. Контактные матроиды. Гиперконтактные схемы (ГС) и контактно-трансформаторные схемы (ТКС). Простейшие методы синтеза ГС и ТКС.

### **Раздел 2. Математическая логика**

#### **Тема 2.1. Исчисление высказываний.**

- 2.1.1. Исчисление высказываний (ИВ). Аксиомы и правило вывода. Простейшие выводы в ИВ.
- 2.1.2. Теорема о дедукции и другие метатеоремы ИВ. Полнота и непротиворечивость ИВ. Независимость системы аксиом ИВ.

#### **Тема 2.2. Исчисление предикатов.**

- 2.2.1. Исчисление предикатов (ИП). Интерпретации формул ИП. Аксиомы и правила вывода ИП. Простейшие выводы в ИП.
- 2.2.2. Теорема о дедукции в ИП. Полнота и непротиворечивость чистого ИП. Независимость системы аксиом ИП.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
<b>1</b>	<b>Дискретная математика</b>								
<b>1.1</b>	<b>Элементы комбинаторики</b>	<b>12</b>	<b>9</b>				<b>1</b>		
1.1.1	Предмет комбинаторики. Комбинаторные объекты и комбинаторные числа. Комбинаторные конфигурации. Подсчет числа комбинаторных конфигураций.	2	2					[1,2,7,8] Экспресс-опрос	
1.1.2	Размещения и сочетания. Число $r$ -размещений с повторениями и без повторений из $n$ элементов. Число подмножеств конечного множества.	2	2				1	[1,2,7,8] Устный опрос	
1.1.3	Число $r$ -сочетаний с повторениями и без повторений из $n$ элементов. Биномиальная теорема. Свойства биномиальных коэффициентов.	2						[1,2,7,8] Устный опрос	
1.1.4	Метод включения и исключения, его применение.	2	2					[1,2,8] Экспресс-опрос	
1.1.5.	Рекуррентные соотношения. Рекуррентное соотношение $k$ -го порядка для функции одной переменной. Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами.	2	2					[1,2,8] Устный опрос	



1.1.6	Числа Фибоначчи. Числа Стирлинга 1-го и 2-го рода.	2	1					[1,2]	Устный опрос
<b>1.2</b>	<b>Элементы алгебры логики</b>	<b>14</b>	<b>13</b>				<b>2</b>		
1.2.1	Понятие функции алгебры логики (булевой функции). Задание булевой функции (БФ) с помощью таблицы истинности. Число БФ от $n$ переменных. Существенные и фиктивные переменные. Элементарные БФ.	2	2					[1,2,6,7,8]	Экспресс-опрос
1.2.2	Задание БФ формулами над системой элементарных функций. Эквивалентность (равносильность) формул. Основные равносильности. Эквивалентные преобразования формул и проблема минимизации.	2	2					[1,2,6,7,8]	Экспресс-опрос
1.2.3	Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы (ДНФ и КНФ). Число ДНФ и КНФ от $n$ переменных. Эквивалентные преобразования ДНФ и КНФ и проблема минимизации.	2	2				1	[1,2,7,8]	Контрольная работа № 1
1.2.4	Разложение Шеннона для БФ. Принцип двойственности.	2	1					[1,2,7,8]	Коллоквиум
1.2.5	Полиномиальные нормальные формы. Полиномы Жегалкина (ПЖ). Теорема о существовании и единственности ПЖ для произвольной БФ.	2	2					[1,2,7,8]	Устный опрос
1.2.6	Формулы над произвольной системой БФ. Замкнутые и полные системы БФ. Функции Шеффера.	2	2					[1,2,7,8]	Экспресс-опрос
1.2.7	Основные замкнутые классы алгебры логики (предполные классы) и их свойства. Теорема Поста (критерий полноты системы БФ). Следствия из теоремы Поста. Число функций Шеффера от $n$ переменных.	2	2				1	[1,2,7,8]	Экспресс-опрос
<b>1.3</b>	<b>Элементы теории графов</b>	<b>10</b>	<b>10</b>				<b>1</b>		
1.3.1	Основные понятия теории графов. Способы задания графов. Типы графов. Матрицы смежности и матрицы инцидентностей. Изоморфизм и гомеоморфизм графов.	2	2					[1,2,3,4]	Устный опрос

1.3.2	Операции над графами. Подграфы. Маршруты, цепи и циклы. Компоненты связности. Деревья. Двудольные графы. Оценки числа графов и деревьев.	2	2					[1,2,3,4]	Коллоквиум
1.3.3	Эйлеров цикл. Критерий эйлеровости графа. Гамильтонов цикл. Достаточные условия гамильтоновости графа.	2	2					[1,2,3,4]	Экспресс-опрос
1.3.4	Плоские и планарные графы. Критерий планарности Понтрягина-Куратовского. Двойственные плоские графы.	2	2				1	[1,2,3,4]	Контрольная работа № 2
1.3.5	Матроиды. Матроиды, представимые над полями. Графические матроиды. Представимость графического матроида над любым полем матрицей инцидентий графа.	2	2					[1,2,12]	Экспресс-опрос
	<b>Итого за 3-й семестр</b>	<b>36</b>	<b>32</b>				<b>4</b>		
<b>1.4</b>	<b>Элементы математической кибернетики</b>	<b>8</b>	<b>15</b>				<b>2</b>		
1.4.1	Контактные схемы (КС) и схемы из функциональных элементов (СФЭ). Связь с формулами. Простейшие методы синтеза КС и СФЭ. Метод Шеннона и метод каскадов. Проблема минимизации.	2	4					[1,7,8,9]	Устный опрос
1.4.2	Матрицы инцидентий КС. Расширенные полиномиальные матрицы (РМ). Алгебраизация КС в классах РМ над произвольными полями.	2	4				1	[1,2,3,4,13]	Экспресс-опрос
1.4.3	Эквивалентные преобразования КС и РМ. Метод приведения произвольной РМ над кольцом ПЖ к одноэлементному виду.	2	4					[8,9,13]	Контрольная работа № 3

1.4.4	Контактные матроиды. Гиперконтактные схемы (ГС) и контактно-трансформаторные схемы (ТКС). Простейшие методы синтеза ГС и ТКС.	2	3				1	[1,12,14]	Устный опрос
<b>2</b>	<b>Математическая логика</b>	<b>8</b>	<b>15</b>				<b>2</b>		
<b>2.1</b>	<b>Исчисление высказываний</b>	<b>4</b>	<b>7</b>				<b>1</b>		
2.1.1	Исчисление высказываний (ИВ). Аксиомы и правило вывода. Простейшие выводы в ИВ.	2	3					[5,6,10,11]	Экспресс-опрос
2.1.2	Теорема о дедукции и другие метатеоремы ИВ. Полнота и непротиворечивость ИВ. Независимость системы аксиом ИВ.	2	4				1	[5,6,10,11]	Устный опрос
<b>2.2</b>	<b>Исчисление предикатов</b>	<b>4</b>	<b>8</b>				<b>1</b>		
2.2.1	Исчисление предикатов (ИП). Интерпретации формул ИП. Аксиомы и правила вывода ИП. Простейшие выводы в ИП.	2	4					[5,6,10,11]	Коллоквиум
2.2.2	Теорема о дедукции в ИП. Полнота и непротиворечивость чистого ИП. Независимость системы аксиом ИП.	2	4				1	[5,6,10,11]	Контрольная работа № 4
	<b>Итого за 4-й семестр</b>	<b>16</b>	<b>30</b>				<b>4</b>		
	<b>ИТОГО</b>	<b>52</b>	<b>62</b>				<b>8</b>		

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические Занятия	Семинарские Занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>1</b>	<b>Дискретная математика</b>	<b>9</b>	<b>13</b>					
<b>1.1</b>	<b>Элементы комбинаторики</b>	<b>3</b>	<b>5</b>					
1.1.1	Предмет комбинаторики. Комбинаторные объекты и комбинаторные числа. Комбинаторная конфигурация. Подсчет числа комбинаторных конфигураций	0.5	1				[1,2,7,8]	Экспресс-опрос
1.1.2	Размещения и сочетания. Число $r$ -размещений с повторениями и без повторений из $n$ элементов. Число подмножеств конечного множества.	0,5	1				[1,2,7,8]	Устный опрос
1.1.3	Число $r$ -сочетаний с повторениями и без повторений из $n$ элементов. Биномиальная теорема. Свойства биномиальных коэффициентов.	0,5	1				[1,2,7,8]	Экспресс-опрос
1.1.4	Метод включения и исключения, его применение.	0.5	1				[1,2,7,8]	Устный опрос
1.1.5	Рекуррентные соотношения. Рекуррентное соотношение $k$ -го порядка для функции одной переменной. Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами.	1	1				[1,2,7,8]	Экспресс-опрос

<b>1.2</b>	<b>Элементы алгебры логики</b>	<b>4</b>	<b>5</b>					
1.2.1	Понятие функции алгебры логики (булевой функции). Задание булевой функции (БФ) с помощью таблицы истинности. Число БФ от $n$ переменных. Существенные и фиктивные переменные. Элементарные БФ.	0,5	1				[1,2,6,7,8]	Экспресс-опрос
1.2.2	Задание БФ формулами над системой элементарных функций. Эквивалентность (равносильность) формул. Основные равносильности. Эквивалентные преобразования формул и проблема минимизации.	1	1				[1,2,6,7,8]	Устный опрос
1.2.3	Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы (ДНФ и КНФ). Число ДНФ и КНФ от $n$ переменных. Эквивалентные преобразования ДНФ и КНФ и проблема минимизации.	1	1				[1,2,7,8]	Экспресс-опрос
1.2.5	Полиномиальные нормальные формы. Полиномы Жегалкина (ПЖ). Теорема о существовании и единственности ПЖ для произвольной БФ.	0,5	1				[1,2,7,8]	Устный опрос
1.2.7	Основные замкнутые классы алгебры логики (предполные классы) и их свойства. Теорема Поста (критерий полноты системы БФ). Следствия из теоремы Поста. Число функций Шеффера от $n$ переменных.	1	1				[1,2,7,8]	Экспресс-опрос
<b>1.3</b>	<b>Элементы теории графов</b>	<b>2</b>	<b>3</b>					
1.3.1	Основные понятия теории графов. Способы задания графов. Типы графов. Матрицы смежности и матрицы инцидентий. Изоморфизм и гомеоморфизм графов.	1	1				[1,2,3,4]	Устный опрос
1.3.2	Операции над графами. Подграфы. Маршруты, цепи и циклы. Компоненты связности. Деревья. Двудольные графы. Оценки числа графов и деревьев.	0,5	1				[1,2,3,4]	Экспресс-опрос
1.3.4	Плоские и планарные графы. Критерий планарности Понтрягина-Куратовского. Двойственные плоские графы.	0,5	1				[1,2,3,4,7]	Устный опрос

<b>2</b>	<b>Математическая логика</b>	<b>3</b>	<b>3</b>					
<b>2.1</b>	<b>Исчисление высказываний</b>	<b>1</b>	<b>1</b>					
2.1.1	Исчисление высказываний (ИВ). Аксиомы и правило вывода. Простейшие выводы в ИВ.	0,5	0,5				[5,6,10,11]	Устный опрос
2.1.2	Теорема о дедукции и другие метатеоремы ИВ. Полнота и непротиворечивость ИВ. Независимость системы аксиом ИВ.	0,5	0,5				[5,6,10,11]	Экспресс-опрос
<b>2.2</b>	<b>Исчисление предикатов</b>	<b>2</b>	<b>2</b>					
2.2.1	Исчисление предикатов (ИП). Интерпретации формул ИП. Аксиомы и правила вывода ИП. Простейшие выводы в ИП.	1	1				[5,6,10,11]	Экспресс-опрос
2.2.2	Теорема о дедукции в ИП. Полнота и непротиворечивость чистого ИП. Независимость системы аксиом ИП.	1	1				[5,6,10,11]	Устный опрос
	<b>ИТОГО</b>	<b>12</b>	<b>16</b>					

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Ерусалимский, Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум: учебник / Я.М. Ерусалимский. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2018. - 472 с. - URL : <https://e.lanbook.com/book/212897>.
2. Кожухов, С. Ф. Сборник задач по дискретной математике : учебное пособие / С. Ф. Кожухов, П. И. Совертков. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. - 324с. - Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212675>.
3. Лекции по теории графов : учеб. пособие для студ., обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Емеличев [и др.]. - Изд. стер. - Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2017. - 383 с.
4. Теория графов в задачах и упражнениях. Более 200 задач с подробными решениями / В. А. Емеличев [и др.]. - Изд. стер. - Москва : URSS : Либроком, 2016. - 415 с.
5. Зюзьков, В. М. Введение в математическую логику : учебное пособие / В. М. Зюзьков. - Изд. 2-е, испр. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2018. - 265 с. - Текст : электронный// Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/213008>.
6. Супрун, В. П. Основы математической логики : [учеб. пособие] / В. П. Супрун. - Москва : URSS : Ленанд, 2017. - 197 с.

### Перечень дополнительной литературы

7. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учеб. Пособие для вузов / Под ред. В.А. Садовниченко. – 4-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 384 с.
8. Гаврилов, Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике : [учеб. пособие] / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. - Изд. 3-е, перераб. - Москва : ФИЗМАТЛИТ®, 2009. - 416 с.
9. Яблонский С.В. Элементы математической кибернетики. – М.: Высшая школа, 2007. – 188 с.
10. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1976.
11. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике, теории алгоритмов. – М.: Наука, 1984.
12. Эвнин А. Ю., “Элементарное введение в матроиды”, Матем. обр., 2005, №2(33), 2–33.
13. Таразевич Ю.Г. «Расширенные полиномиальные матрицы и алгебраизация контактных схем». Журнал Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика, 2017, № 3, 85–93.
14. Таразевич Ю.Г. «О сложности реализации булевых функций в некоторых классах гиперконтактных схем», *Дискрет. матем.*, **34**:3 (2022), 90–113.

## **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

С целью текущего контроля знаний студентов предусматривается проведение устных опросов, экспресс-опросов, коллоквиумов и контрольных работ.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Дискретная математика и математическая логика» учебным планом предусмотрены экзамен и зачет.

Итоговая отметка формируется на основе:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.).

2. Положения о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в БГУ (Приказ ректора БГУ от 31.03.2020 № 189-ОД).

3. Критериев оценки результатов учебной деятельности обучающихся в учреждениях высшего образования по десятибалльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 28.05.2013 г. № 09-10/53-ПО).

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- устный опрос – 17 %;
- экспресс-опрос – 17 %;
- коллоквиум – 33 %;
- контрольная работа – 33 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей успеваемости составляет 30 %, экзаменационной отметки – 70 %.

### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

#### **Раздел 1. Дискретная математика**

##### **Тема 1.1. Элементы комбинаторики (1 ч)**

1. Сколько существует вариантов выпадения  $n$  одинаковых игральных кубиков при условии, что как минимум на  $l_i > 0$  из них выпадет по  $i$  очков,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , где  $l_1 + l_2 + \dots + l_6 \leq n$ . В качестве вспомогательной задачи



вначале предполагается получить формулу для числа решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , в целых неотрицательных числах.

- Используя метод включения и исключения, получить формулу для числа сюръективных отображений  $f: X \rightarrow Y$ , где  $|X| = n$ ,  $|Y| = m$ ,  $n \geq m$ . Предполагается вначале, в качестве подзадачи, с помощью логического правила произведения получить формулу для числа произвольных отображений  $f: X \rightarrow Y$ , где  $|X| = n$ ,  $|Y| = m$ .
- Пусть  $\varphi(n)$  – значение функции Эйлера для натурального числа  $n$  (т.е.  $\varphi(n)$  – количество таких натуральных чисел  $m$ ,  $m \leq n$ , которые взаимно просты с  $n$ ). Используя метод включения и исключения, подсчитать значение  $\varphi(n)$ , если  $p_1, p_2, \dots, p_k$  – все простые делители числа  $n$ .
- Вывести явную формулу для чисел Стирлинга 2-го рода  $s_2(n, k)$ , использовав для этого формулу для числа сюръективных отображений  $f: X \rightarrow Y$ , где  $|X| = n$ ,  $|Y| = k$ ,  $n \geq k$ .

**Форма контроля** - устный опрос.

### **Тема 1.2. Элементы алгебры логики (2 ч)**

- Найти формулу для числа булевых функций от  $n$  переменных, которые:  
1) сохраняют константу 0; 2) сохраняют константу 1; 3) являются самодвойственными; 4) являются линейными.
- Доказать, что из каждой немонотонной булевой функции от  $n$  переменных с помощью подстановки вместо ее переменных 0, 1 или  $x$  можно получить функцию  $\bar{x}$ .
- Построить полином Жегалкина, минимальные ДНФ и КНФ для заданной булевой функции 3-х переменных.
- Доказать, что любая полная независимая система, состоящая из 4-х булевых функций, содержит обе константы.

**Форма контроля** - контрольная работа № 1, экспресс-опрос.

### **Тема 1.3. Элементы теории графов (1 ч)**

- Доказать, что число помеченных деревьев порядка  $n$  равно  $n^{n-2}$ .
- Доказать, что число  $(k, l)$ -двудольных помеченных деревьев равно  $k^{l-1}l^{k-1}$ .
- Для заданного графа построить матрицы смежности и матрицу инцидентий.
- Для заданного графа выяснить, является ли он эйлеровым (гамильтоновым).
- Доказать представимость графического матроида над полем характеристики 2.

**Форма контроля** – контрольная работа № 2.

## Тема 1.4. Элементы математической кибернетики (2 ч)

1. Для заданной булевой функции 3-х переменных построить контактную схему с минимальным числом контактов.
2. Для заданной булевой функции 3-х переменных построить схему из функциональных элементов в заданном базисе с минимальным числом элементов.
3. Для заданной булевой функции 3-х переменных построить контактно-трансформаторную схему с минимальным числом контактов.
4. Заданную расширенную матрицу над кольцом полиномов Жегалкина 3-х переменных привести к одноэлементному каноническому виду.

**Форма контроля** – устный опрос, экспресс-опрос.

## Раздел 2. Математическая логика

### Тема 2.1. Исчисление высказываний (1 ч)

1. Для заданной формулы исчисления высказываний построить ее вывод либо доказать ее невыводимость.
2. Построить вывод теоремы исчисления высказываний:  $\neg x \supset (x \supset (\neg x \supset x))$ .
3. Найти теорему исчисления высказываний с кратчайшим выводом длины 3.
4. Найти теорему исчисления высказываний с кратчайшим выводом длины 4.
5. Существуют ли теоремы исчисления высказываний с кратчайшим выводом длины 2?

**Форма контроля** – устный опрос.

### Тема 2.2. Исчисление предикатов (1 ч)

1. Для заданной формулы исчисления предикатов (ИП) построить ее вывод либо доказать ее невыводимость.
2. Доказать выводимость формулы ИП:  $\forall x A(x) \supset \exists x A(x)$ .
3. Построить вывод теоремы ИП:  $\forall x \forall y A(x,y) \supset \forall y \forall x A(x,y)$ .
4. Для заданной формулы исчисления предикатов доказать ее выполнимость (опровержимость).
5. Доказать, что любая формула, выводимая в исчислении предикатов – тождественно истинная.
6. Доказать теорему о дедукции в исчислении предикатов.

**Форма контроля** – контрольная работа № 4.

## Примерная тематика контрольных работ

- **Контрольная работа № 1.** «Построение таблиц истинности для формул, эквивалентные преобразования и минимизация формул, построение и минимизация дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм».
- **Контрольная работа № 2.** «Построение матриц смежности и инцидентий для графов, распознавание эйлеровых и гамильтоновых графов,

распознавание планарных графов, построение двойственных плоских графов».

- **Контрольная работа № 3.** «Анализ, синтез и минимизация контактных схем и схем из функциональных элементов, приведение расширенных матриц над кольцом полиномов Жегалкина к одноэлементному каноническому виду».
- **Контрольная работа № 4.** «Доказательство выводимостей и построение выводов в исчислении высказываний и исчислении предикатов, доказательство выполнимости, опровержимости, противоречивости и тождественной истинности формул исчисления предикатов».

### Примерная тематика практических занятий

1. Подсчет числа комбинаторных конфигураций с помощью логических правил комбинаторики.
2. Решение задач с использованием формул для числа размещений и сочетаний.
3. Применение биномиальной теоремы и свойств биномиальных коэффициентов для решения комбинаторных задач.
4. Решение задач с использованием метода включения и исключения.
5. Составление рекуррентных соотношений для решения задач перечислительной комбинаторики.
6. Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами.
7. Нахождение чисел Стирлинга 1-го и 2-го рода с помощью рекуррентных соотношений.
8. Решение задач на задание булевых функций с помощью таблиц истинности: распознавание логических равносильностей, тавтологий, противоречий, решение логических уравнений.
9. Решение задач на равносильные преобразования логических формул.
10. Построение ДНФ (совершенной ДНФ) и КНФ (совершенной КНФ) с помощью таблиц истинности и с помощью равносильных логических преобразований.
11. Решение задач минимизации ДНФ и КНФ не более 3-х переменных.
12. Решение задач на нахождение полинома Жегалкина булевой функции.
13. Распознавание полноты системы системы булевых функций при помощи теоремы Поста.
14. Разбор первоначальных понятий теории графов. Распознавание изоморфных графов. Нахождение различных типов подграфов графа.
15. Связность, связная компонента. Нахождение графов с максимальным (минимальным) числом ребер при фиксированных числах вершин и связных компонент.
16. Решение задач на использование эквивалентных определений дерева.

17. Решение задач, использующих критерий эйлеровости графа. Нахождение минимального множества реберно непересекающихся цепей, покрывающих граф.
18. Задачи на гамильтоновы графы, достаточные условия гамильтоновости.
19. Решение задач минимизации контактных схем и схем из функциональных элементов не более 3-х переменных.
20. Решение задачи синтеза контактных схем и схем из функциональных элементов для булевых функций не более 4-х переменных.
21. Применение метода Шеннона и метода каскадов для синтеза контактных схем и схем из функциональных элементов.
22. Приведение расширенных матриц над кольцом полиномов Жегалкина к одноэлементному каноническому виду.
23. Решение простейших задач анализа и синтеза контактно-трансформаторных схем.
24. Распознавание выводимости формул и построение выводов в исчислении высказываний.
25. Распознавание выводимости формул и построение выводов в исчислении предикатов.

### **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает:

- осуществление студентами лично-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

Наиболее эффективной предполагается следующая форма реализации эвристического подхода: доказательства громоздких теорем, а также решения сложных задач разбиваются на этапы, после чего обучаемые подводятся к самостоятельному определению действий на этапах.

При организации образовательного процесса используется также *практико-ориентированный подход*, который предполагает:

- освоение содержания образования через решение практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по индивидуально заданной теме дисциплины;
- выполнение домашнего задания;
- проведение научно-исследовательских работ;
- подготовка к участию в научных и научно-практических конференциях и конкурсах.

### **Примерный перечень вопросов к экзамену**

дневная форма получения образования

1. Предмет комбинаторики. Комбинаторная конфигурация. Подсчет числа комбинаторных конфигураций. Логические правила комбинаторики.
2. Число  $r$ -размещений из  $n$  элементов. Число  $r$ -размещений с повторениями из  $n$  элементов.
3. Число подмножеств конечного множества.
4. Число  $r$ -сочетаний из  $n$  элементов. Биномиальная теорема и следствия из нее.
5. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.
6. Число  $r$ -сочетаний с повторениями из  $n$  элементов.
7. Метод включения и исключения, его применение.
8. Понятие рекуррентного соотношения. Рекуррентное соотношение  $k$ -го порядка для функции одной переменной. Решение и общее решение рекуррентного соотношения  $k$ -го порядка для функции одной переменной.
9. Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами.
10. Число Стирлинга 1-го рода, рекуррентное соотношение.
11. Разбиение конечного множества на фиксированное число непустых подмножеств. Число Стирлинга 2-го рода, рекуррентное соотношение.
12. Понятие булевой функции. Задание булевой функции с помощью таблицы истинности. Число булевых функций от  $n$  переменных.
13. Элементарные булевы функции.
14. Задание булевых функций с помощью логических формул. Основные логические равносильности.
15. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ).
16. Конъюнктивные нормальные формы (КНФ).

17. Разложение Шеннона. Принцип двойственности.
18. Полиномиальные нормальные формы. Полином Жегалкина. Теорема о единственности представления булевой функции посредством полинома Жегалкина.
19. Замыкание класса булевых функций. Пять основных замкнутых классов булевых функций.
20. Полнота системы булевых функций. Теорема Поста о полноте системы булевых функций (доказательство необходимости).
21. Теорема Поста о полноте системы булевых функций (первая часть доказательства достаточности).
22. Теорема Поста о полноте системы булевых функций (вторая часть доказательства достаточности).
23. Следствия из теоремы Поста о полноте системы булевых функций.
24. Графы и способы их задания (аналитический, графический, матричный). Степень вершины графа. Лемма о рукопожатиях.
25. Изоморфизм графов. Помеченный граф.
26. Операции над графами. Подграфы, их типы.
27. Маршруты, их типы и основные свойства.
28. Связная компонента графа. Число связных компонент в графе,
29. Деревья: эквивалентные определения. Число помеченных деревьев порядка  $n$ .
30. Эйлеров цикл. Критерий эйлеровости графа.
31. Гамильтонов цикл. Достаточные условия гамильтоновости графа.

### **Примерный перечень вопросов к зачету**

дневная форма получения образования

1. Контактная схема (КС). Проводимость схемы. Проблема синтеза.
2. Метод каскадов для КС.
3. Реализация линейных функций в классе КС.
4. Метод Шеннона для КС.
5. Плоские и параллельно-последовательные КС. Двойственность. Связь с формулами.
6. Эквивалентные преобразования и минимизация КС. Проблема минимизации КС.
7. Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Простейшие методы синтеза СФЭ.
8. Метод каскадов для СФЭ.
9. Метод Шеннона для СФЭ.
10. Реализация линейных функций в классе СФЭ.
11. Эквивалентные преобразования СФЭ.
12. Расширенные полиномиальные матрицы и алгебраизация КС. Метод приведения расширенной матрицы над кольцом полиномов Жегалкина к одноэлементному каноническому виду.

13. Контактные матроиды. Гиперконтактные схемы и контактно-трансформаторные схемы. Простейшие методы синтеза.
14. Реализация линейных функций гиперконтактными и контактно-трансформаторными схемами.
15. Реализация монотонных симметрических функций гиперконтактными и контактно-трансформаторными схемами.
16. Исчисление высказываний. Аксиомы и правило вывода. Простейшие выводы.
17. Теорема о дедукции в исчислении высказываний и ее применение.
18. Полнота исчисления высказываний.
19. Непротиворечивость исчисления высказываний.
20. Независимость системы аксиом исчисления высказываний.
21. Исчисление предикатов. Аксиомы и правила вывода. Простейшие выводы.
22. Теорема о дедукции в исчислении высказываний и ее применение для построения выводов.
23. Полнота и непротиворечивость исчисления предикатов.

**Примерный перечень вопросов к зачету**  
заочная форма получения образования

1. Предмет комбинаторики. Комбинаторная конфигурация. Подсчет числа комбинаторных конфигураций. Логические правила комбинаторики.
2. Число  $r$ -размещений из  $n$  элементов. Число  $r$ -размещений с повторениями из  $n$  элементов.
3. Число подмножеств конечного множества.
4. Число  $r$ -сочетаний из  $n$  элементов. Биномиальная теорема и следствия из нее.
5. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.
6. Число  $r$ -сочетаний с повторениями из  $n$  элементов.
7. Понятие булевой функции. Задание булевой функции с помощью таблицы истинности. Число булевых функций от  $n$  переменных.
8. Элементарные булевы функции.
9. Задание булевых функций с помощью логических формул. Основные логические равносильности.
10. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ).
11. Конъюнктивные нормальные формы (КНФ).
12. Разложение Шеннона. Принцип двойственности.
13. Полиномиальные нормальные формы. Полином Жегалкина. Теорема о единственности представления булевой функции посредством полинома Жегалкина.
14. Замыкание системы булевых функций. Пять основных замкнутых классов булевых функций.
15. Полные системы булевых функций.
16. Теорема Поста о полноте системы булевых функций.
17. Следствия из теоремы Поста о полноте системы булевых функций.

**Примерный перечень вопросов к экзамену**  
заочная форма получения образования

1. Графы и способы их задания (аналитический, графический, матричный). Степень вершины графа. Лемма о рукопожатиях.
2. Изоморфизм графов. Помеченный граф.
3. Операции над графами. Подграфы, их типы.
4. Маршруты, их типы и основные свойства.
5. Связная компонента графа. Число связных компонент в графе,
6. Деревья: эквивалентные определения. Число помеченных деревьев порядка  $n$ .
7. Эйлеров цикл. Критерий эйлеровости графа.
8. Гамильтонов цикл. Достаточные условия гамильтоновости графа.
9. Исчисление высказываний. Аксиомы и правило вывода. Простейшие выводы.
10. Теорема о дедукции в исчислении высказываний и ее применение.
11. Полнота и непротиворечивость исчисления высказываний.
12. Независимость системы аксиом исчисления высказываний.
13. Исчисление предикатов. Аксиомы и правила вывода. Простейшие выводы.
14. Теорема о дедукции в исчислении высказываний и ее применение для построения выводов.
15. Полнота и непротиворечивость исчисления предикатов.



## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ**  
на \_\_\_\_/\_\_\_\_ учебный год

№№ ПП	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры математической кибернетики (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.)

Заведующий кафедрой  
доктор физ.-мат. наук, профессор

А.Л. Гладков

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета  
доктор физ.-мат. наук, доцент

С.М. Босяков