

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

08 июля 2022

Регистрационный № - 11628/уч.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

направление специальности:

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

Минск, 2022

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021, типового учебного плана № G31-1-011/пр-тип. от 31.03.2021, учебных планов БГУ № G31-1-003/уч. от 25.05.2021, №G31-1-061/уч. ин. от 30.05.2021.

СОСТАВИТЕЛИ:

Дмитрий Федорович Базылев – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Виталий Владимирович Балащенко – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Глеб Олегович Кукрак – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Владимир Леонидович Тимохович – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Владимир Владимирович Шлыков – профессор кафедры математики и методики преподавания математики физико-математического факультета УО “Белорусский государственный педагогический университет имени М.Танка”, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор;

Геннадий Васильевич Матвеев, доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

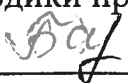
РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики (протокол № 12 от 25.05.2022);

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 6 от 29.06.2022)

Заведующий кафедрой геометрии, топологии
и методики преподавания математики

Д.Ф. Базылев



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина *«Дифференциальная геометрия и топология»* является одной из основных дисциплин, которые изучаются студентами-математиками, обучающимися на направлении «научно-производственная деятельность» на втором и третьем годах обучения в университете. Понятия и основные факты этой дисциплины используются при изучении ряда других математических дисциплин, в первую очередь таких, как *«Дифференциальные уравнения»*, *«Математический анализ»*, *«Функциональный анализ»*.

Цели и задачи учебной дисциплины

Главными целями учебной дисциплины *«Дифференциальная геометрия и топология»*

являются:

- освоение новых математических понятий: метрического пространства, топологического пространства, линии, поверхности, гладкого многообразия;
- приобретение студентами знаний в основах общей топологии и теории линий и поверхностей;
- овладение методами исследования, характерными для общей топологии и дифференциальной геометрии;
- приобретение студентами достаточного объема знаний, навыков и умений в области дифференциальной геометрии и топологии для их использования при изучении других математических дисциплин.

Для достижения этих целей решаются следующие задачи:

- определяются понятия метрического и топологического пространств. Излагаются основные факты, относящиеся к геометрии топологических пространств, свойства непрерывных отображений, свойства связных и компактных пространств, аксиомы счётности и сепарабельность;
- изучаются линии и поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве, являющиеся основными объектами исследования в классической дифференциальной геометрии;
- вводится понятие гладкого многообразия и излагаются первоначальные сведения по теории гладких многообразий.
- излагаются основы геометрии Лобачевского.

В начале изучения дисциплины излагаются основы теории метрических и топологических пространств. При этом особое внимание уделяется свойствам непрерывных отображений, а также таким свойствам топологических пространств как связность и компактность, поскольку владение этим материалом необходимо для изучения ряда других математических дисциплин.

Далее рассматриваются линии и поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве. Здесь излагается классический материал дифференциальной геометрии: репер Френе, кривизна и кручение линий, понятия и факты теории поверхностей, связанные с первой и второй квадратичной формами.

В заключительных разделах рассматриваются основы теории гладких многообразий, изометрические отображения поверхностей и элементы геометрии Лобачевского.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина *«Дифференциальная геометрия и топология»* относится к модулю *«Алгебра и геометрия»* 2 компонента учреждения высшего образования.

Изучение дисциплины *«Дифференциальная геометрия и топология»* в течение всего срока обучения проходит во **взаимосвязи** с дисциплинами: *«Алгебра и теория чисел»*, *«Математический анализ»*, *«Дифференциальные уравнения»*.

В соответствии с образовательным стандартом в результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать:

- понятия метрического и топологического пространств;
- свойства непрерывных отображений метрических и топологических пространств, свойства связных и компактных пространств;
- понятия линии и поверхности в трехмерном евклидовом пространстве и их характеристики;
- понятия гладкого многообразия и его касательного пространства;
- модели плоскости Лобачевского;

уметь:

- находить замыкание, внутренность и границу множеств в метрических и топологических пространствах, определять, является ли пространство связным, компактным, сепарабельным;
- вычислять кривизну и кручение линии, использовать понятия первой и второй квадратичных форм для исследования поверхности;

владеть:

- методами общей топологии и дифференциальной геометрии при решении геометрических задач.

Требование к компетенциям

Преподавание дисциплины *«Дифференциальная геометрия и топология»* должно строиться так, чтобы обучающийся приобретал следующие компетенции:

базовая профессиональная компетенция:

БПК -5. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

специализированная компетенция:

СК - 3. Применять основные алгоритмы компьютерной геометрии и современные математические средства визуализации изображений и анимации.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 3, 4 и 5 семестрах очной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» отведено 330 часов, в том числе 176 аудиторных часов, из них: лекции – 88 часов, лабораторные занятия – 76 часов, управляемая самостоятельная работа – 12 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 9 зачетных единиц.

Формы текущей аттестации – зачёт и экзамен в третьем семестре, зачёт в четвёртом семестре, экзамен в пятом семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Метрические и топологические пространства и их геометрия.

Тема 1.1. Первоначальные сведения о метрических пространствах.

Определение и примеры метрических пространств. Топология метрического пространства. Подпространство метрического пространства. Изометрия и изометрическое вложение.

Тема 1.2. Первоначальные сведения о топологических пространствах.

Определение и примеры топологических пространств. Метризуемые и неметризуемые пространства. Замкнутые множества. Подпространства. Хаусдорфовы пространства. Сходимость последовательностей в топологических пространствах.

Тема 1.3. Геометрия топологического пространства.

Замыкание, внутренность и граница множеств в топологических пространствах.

Раздел 2. Непрерывные отображения.

Тема 2.1. Основные свойства непрерывных отображений.

Понятие непрерывного отображения. Примеры. Критерии непрерывности. Операции над непрерывными функциями. Секвенциальная непрерывность.

Тема 2.2. Гомеоморфизмы.

Понятие гомеоморфизма. Примеры гомеоморфных пространств.

Раздел 3. Связность и компактность.

Тема 3.1. Связность.

Определение и примеры связных и несвязных пространств и их простейшие свойства. Связность и непрерывные отображения. Линейно связные пространства. Связные компоненты.

Тема 3.2. Компактность.

Определение и примеры компактных пространств и их простейшие свойства. Компактность и непрерывные отображения.

Тема 3.3. Полные и вполне ограниченные метрические пространства.

Определение и примеры полных метрических пространств. Свойства полных пространств. Вполне ограниченные метрические пространства и их простейшие свойства.

Тема 3.4. Компактные метризуемые пространства.

Основные критерии компактности метризуемых пространств.

Раздел 4. Базы и всюду плотные множества в топологических пространствах.

Тема 4.1. Аксиомы счётности и сепарабельность.

Понятие базы и фундаментальной системы окрестностей топологического пространства. Первая и вторая аксиомы счётности. Всюду плотные множества в топологических пространствах. Сепарабельность. Связь между сепарабельностью и второй аксиомой счётности.

Тема 4.2. Методы введения топологий.

Методы введения топологий. Примеры, иллюстрирующие связь между аксиомами счётности и сепарабельностью.

Раздел 5. Конструкции произведения и фактор-пространства.

Тема 5.1. Произведения топологических пространств.

Произведения топологических пространств и их простейшие свойства. Непрерывность отображения в произведение.

Тема 5.2. Фактор-пространства.

Фактор-пространства и факторные отображения. Примеры.

Раздел 6. Линии в E^3

Тема 6.1. Линии и способы их задания. Касательная к линии.

Параметризованные кривые в E^3 и вектор-функции одной переменной. Понятие линии. Примеры и способы задания линий. Касательная к линии.

Тема 6.2. Длина дуги. Натуральная параметризация.

Длина дуги линии. Натуральная параметризация. Касательная к линии как наиболее тесно прилегающая к ней прямая. Точки распрямления и условие бигулярности.

Тема 6.3. Кривизна линии.

Кривизна линии и формула для её вычисления. Механический смысл кривизны.

Тема 6.4. Репер Френе.

Репер Френе бигулярной линии. Координатные прямые и плоскости репера Френе. Свойства соприкасающейся плоскости.

Тема 6.5. Формулы Френе. Кручение.

Формулы Френе. Кручение, его механический смысл и формула для его вычисления. Натуральные уравнения.

Раздел 7. Поверхности в E^3

Тема 7.1. Поверхности и способы их задания.

Вектор-функции двух переменных. Поверхности и способы их задания. Линии на поверхности.

Тема 7.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Касательное пространство и касательная плоскость к поверхности. Нормаль

к поверхности.

Тема 7.3. Первая квадратичная форма поверхности.

Первая квадратичная форма поверхности. Вычисление дуги линии на поверхности и величины угла между линиями. Площадь поверхности.

Тема 7.4. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и типы точек на поверхности.

Ориентация поверхности. Нормальная кривизна линии на ориентированной поверхности и вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и главные направления поверхности. Полная и средняя кривизна. Типы точек на поверхности. Теорема Бонне.

Тема 7.5. Геодезические на поверхности.

Понятие геодезической на поверхности. Дифференциальные уравнения геодезических. Существование и единственность максимальной геодезической, проходящей через данную точку в данном направлении. Полугеодезическая параметризация на поверхности. Геодезические как локально кратчайшие.

Раздел 8. Гладкие многообразия.

Тема 8.1. Первоначальные сведения о гладких многообразиях.

Понятие гладкого многообразия. Линии и поверхности как гладкие многообразия. Другие примеры гладких многообразий.

Тема 8.2. Гладкие отображения многообразий.

Понятие гладкого отображения многообразий. Примеры. Алгебра гладких вещественнозначных функций. Диффеоморфизмы.

Тема 8.3. Касательное пространство к многообразию.

Понятие касательного вектора к многообразию в данной точке. Касательное пространство и его простейшие свойства.

Тема 8.4. Дифференциал гладкого отображения многообразий.

Понятие дифференциала гладкого отображения. Матрица Якоби. Примеры. Цепное правило.

Раздел 9. Изометрические отображения поверхностей.

Тема 9.1. Первоначальные сведения об изометрических отображениях.

Понятие изометрического отображения поверхностей. Дифференциал изометрического отображения. Критерий того, что две простые поверхности изометричны. Изометрические отображения и геодезические.

Тема 9.2. Гауссова кривизна как объект внутренней геометрии поверхности.

Сохранение гауссовой кривизны изометрическими отображениями (теорема Гаусса). Поверхности постоянной кривизны.

Раздел 10. Элементы геометрии Лобачевского.

Тема 10.1. Первоначальные сведения о римановых многообразиях.

Понятие риманова многообразия. Простейшие свойства римановых многообразий.

Тема 10.2. Плоскость Лобачевского.

Плоскость Лобачевского как двумерное риманово многообразие.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Иное	Форма контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия	Семинарские занятия	Практические занятия	Количество часов УСР		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
3 семестр								
1	Метрические и топологические пространства и их геометрия	8	6			2		
1.1	Первоначальные сведения о метрических пространствах	2	2					Опрос
1.2	Первоначальные сведения о топологических пространствах	4	2					Опрос
1.3	Геометрия топологического пространства.	2	2			2		Отчёт по индивидуальным заданиям
2	Непрерывные отображения	4	4					
2.1	Основные свойства непрерывных отображений.	2	2					Опрос
2.2	Гомеоморфизмы.	2	2					Опрос
3	Связность и компактность	14	12			2		
3.1	Связность.	4	4					Опрос
3.2	Компактность	4	2			2		Контрольная работа
3.3	Полные и вполне ограниченные метрические пространства.	4	4					Опрос
3.4.	Компактные метризуемые пространства.	2	2					Опрос
4	Базы и всюду плотные множества в топологических	6	4			2		

	пространствах						
4.1	Аксиомы счётности и сепарабельность.	4	2				Опрос
4.2	Методы введения топологий	2	2			2	Отчет по индивидуальным заданиям
5	Конструкции произведения и фактор-пространства.	4	4				
5.1	Произведения топологических пространств.	2	2				Опрос
5.2	Фактор-пространства.	2	2				Опрос
	Всего за семестр	36	30			6	Зачёт, Экзамен
4 семестр							
6	Линии в E^3	14	12			2	
6.1	Линии и способы их задания. Касательная к линии.	4	4				Опрос
6.2	Длина дуги. Натуральная параметризация.	2	2				Опрос
6.3	Кривизна линии.	2	2				Опрос
6.4	Репер Френе	2	2				Опрос
6.5	Формулы Френе. Кручение	4	2			2	Контрольная работа
7	Поверхности в E^3	20	18			2	
7.1	Поверхности и способы их задания	4	4				Опрос
7.2	Касательная плоскость и нормаль к поверхности.	2	2				Опрос
7.3	Первая квадратичная форма поверхности	4	4				Опрос
7.4	Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и типы точек на поверхности.	6	4			2	Контрольная работа
7.5	Геометрические на поверхности.	4	4				Опрос
	Всего за семестр	34	30			4	Зачёт
5 семестр							
8	Гладкие многообразия	8	8				

8.1	Первоначальные сведения о гладких многообразиях	2	2					Опрос
8.2	Гладкие отображения многообразий	2	2					Опрос
8.3	Касательное пространство к многообразию	2	2					Опрос
8.4	Дифференциал гладкого отображения многообразий	2	2					Опрос
9	Изометрические отображения поверхностей	4	4					
9.1	Первоначальные сведения об изометрических отображениях	2	2					Опрос
9.2	Гауссова кривизна как объект внутренней геометрии поверхности.	2	2					Опрос
10	Элементы геометрии Лобачевского	6	4			2		
10.1	Первоначальные сведения о римановых многообразиях	2						Опрос
10.2	Плоскость Лобачевского	4	4			2		Отчёт по индивидуальным заданиям
	Всего за семестр	18	16			2		Экзамен
	Всего по учебной дисциплине	88	76			12		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии: учебник для государственных университетов / П. К. Рашевский. - Изд. стер. - Москва: URSS: ЛКИ, 2021. - 428 с.
2. Александров, П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию: учебное пособие / П. С. Александров. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 368 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210431>.
3. Радыно, Я. В. Элементы общей топологии для студентов-аналитиков / Я. В. Радыно, А. Я. Радыно, Е. М. Радыно. - Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2015. - 295 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия: учебное пособие. – М., Наука, 1987. – 478 с.
2. Дифференциальная геометрия. Под редакцией А.С. Феденко: учебное пособие. – Минск: БГУ, 1982. – 255 с.
3. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии. Под редакцией А.С. Феденко: учебное пособие. – 2-е издание. М: Наука, Главная ред. физ.-мат. лит., 1979. — 272 с.
4. Топология. Под редакцией А.С. Феденко: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1990, 318 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для оценки соответствия достижений и уровня знаний студентов требованиям программы используется следующий диагностический инструментарий:

1. контрольные работы;
2. устный опрос;
3. отчет по индивидуальным заданиям.

При оценивании устных ответов учитываются полнота, глубина, обоснованность и точность изложения материала, степень осознанности изученного материала, подтверждение теоретических фактов примерами, грамотность речи.

Оценка за выполнение индивидуальных заданий отражает степень самостоятельности выполнения задания, соответствие теоретическим положениям, творческий подход.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология» учебным планом предусмотрены зачёт и экзамен в третьем семестре, зачёт в четвёртом семестре, экзамен в пятом семестре.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Отметка текущей успеваемости рассчитывается как среднее арифметическое отметок по всем формам (мероприятиям) текущего контроля знаний по учебной дисциплине.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки текущей успеваемости составляет 30 %, экзаменационной отметки – 70 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.3. Геометрия топологического пространства (2ч.)

Форма контроля – отчёт по индивидуальным заданиям (примерные варианты).

1. Пусть A – подмножество топологического пространства X . Докажите, что $\text{int } A = X \setminus (\overline{X \setminus A})$
2. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – подмножества топологического пространства X . Докажите, что $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}$
3. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – подмножества топологического пространства X . Докажите, что $\text{int}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \text{int } A_1 \cap \dots \cap \text{int } A_n$
4. Пусть A, B – подмножества топологического пространства X . Докажите, что $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Приведите примеры, когда $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ и когда $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.
5. Покажите, что замыкание объединения произвольного семейства подмножеств топологического пространства содержит объединение их замыканий. Приведите пример, показывающий, что равенства может не быть.

Тема 3.2 Компактность (2ч.)

Форма контроля - контрольная работа № 1 (примерный вариант).

1. Определите, какие из следующих фигур трёхмерного евклидова пространства гомеоморфны друг другу: эллиптический параболоид, сфера, гиперболический параболоид, эллипсоид. Ответ обосновать.

2. На вещественной прямой (топология естественная) найдите замыкание и внутренность подмножества $M = [-1, 0] \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Является ли это множество компактным?

3. Определите, является ли вещественная прямая с топологией Зарисского компактным топологическим пространством.

4. Приведите пример компактного несвязного подмножества евклидовой плоскости, имеющего непустую внутренность.

Тема 4.2. Методы введения топологий (2ч.)

Форма контроля – отчет по индивидуальным заданиям (примерные варианты).

1. Покажите, что пространство непрерывных функций на отрезке с топологией поточечной сходимости не удовлетворяет первой аксиоме счётности.

2. Покажите, что пространство непрерывных функций на отрезке сепарабельно, но не имеет счётной базы.

3. Покажите, что прямая Зоргенфрея сепарабельна, но не имеет счётной базы.

4. Покажите, что прямая Зоргенфрея удовлетворяет первой аксиоме счётности, но не удовлетворяет второй аксиоме счётности.

5. Покажите, что плоскость Немыцкого сепарабельна, но при этом имеет подпространство, которое не сепарабельно.

Тема 6.5. Формулы Френе. Кручение (2ч.)

Форма контроля - контрольная работа № 2 (примерный вариант).

1. Найти касательные к линии $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 + 1 \end{cases}$, параллельные прямой $2x - y + 3 = 0$

2. Найти точки пересечения и углы, под которыми пересекаются линии $x^2 + y^2 + 2x = 7$, $y^2 = 4x$.

3. Найти кривизну и кручение линии $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$ в произвольной точке.

4. Написать уравнение соприкасающейся плоскости линии $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = -t \sin t \\ z = at \end{cases}$ в

начале координат.

5. Написать уравнение главной нормали и бинормали линии $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ при $t = 1$.

Тема 7.4. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и типы точек на поверхности. (2ч.)

Форма контроля - контрольная работа № 3 (примерный вариант).

1. Для поверхности $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases}$ в точке $M(u = 2, v = \frac{\pi}{4})$ напишите

(а) уравнение касательной плоскости, (б) уравнение нормали, (в) уравнение касательной к линии $u = 2$.

2. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ в точке $M(3; 1; -1)$.

3. Найти косинус угла, под которым пересекаются линии $u + v = 0$ и $u - v = 0$ на поверхности $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = uv \end{cases}$.

4. На поверхности $\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u^2 - v^2 \\ z = uv \end{cases}$ найти длину дуги линии $v = au$ между

точками её пересечения с линиями $u = 1, u = 2$.

5. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизну прямого геликоида в произвольной точке.

Тема 10.2. Плоскость Лобачевского (2ч.)

Форма контроля – отчёт по индивидуальным заданиям (примерные варианты)

1. Докажите аналог теоремы Пифагора для плоскости Лобачевского.
2. Докажите аналог теоремы косинусов для плоскости Лобачевского.
3. Докажите аналог теоремы синусов для плоскости Лобачевского.
4. Докажите теорему о сумме углов треугольника на плоскости Лобачевского.
5. Докажите формулу Лобачевского.

Примерная тематика лабораторных занятий

3 семестр.

Метрические и топологические пространства и их геометрия

Занятие 1. Примеры метрических пространств.

Занятие 2. Задачи, связанные с понятиями открытого и замкнутого множеств.

Занятие 3. Нахождение замыкания, внутренности и границы множеств.

Непрерывные отображения

Занятие 4. Задачи на применение критериев непрерывности.

Занятие 5. Примеры гомеоморфизмов.

Связность и компактность

Занятия 6,7. Задачи на применение теоремы о промежуточных значениях.

Примеры связных и линейно связных пространств.

Занятие 8. Задачи на свойства компактных пространств.

Занятия 9,10. Примеры полных и не полных метрических пространств.

Примеры топологически эквивалентных метрик, одна из которых полная, а другая – нет, одна вполне ограничена, а другая – нет.

Занятие 11. Примеры замкнутых, ограниченных, но не компактных множеств в метрических пространствах.

Базы и всюду плотные множества в топологических пространствах

Занятие 12. Задачи на взаимосвязь между аксиомами счётности и сепарабельностью.

Занятие 13. Задачи, в которых используются различные методы введения топологий.

Конструкции произведения и фактор-пространства

Занятие 14. Задачи, связанные со свойствами произведений топологических пространств.

Занятие 15. Примеры фактор-пространств.

4 семестр

Линии в E^3

Занятия 1,2. Задачи на свойства вектор-функций. Примеры параметризованных кривых. Задачи на различные способы задания линий.

Занятие 3. Вычисление длины дуги. Нахождение натуральной

параметризации винтовой линии.

Занятие 4. Нахождение кривизны различных линий.

Занятие 5. Нахождение элементов репера Френе различных линий.

Занятие 6. Нахождение кручения различных линий.

Поверхности в E^3

Занятия 7,8. Задачи, иллюстрирующие различные способы задания поверхностей и задание параметризованных на поверхности в криволинейных координатах.

Занятие 9. Нахождение касательных плоскостей и нормалей к поверхностям для различных способов задания поверхностей.

Занятия 10, 11. Задачи на вычисление длины дуги линии на поверхности, нахождение угла между линиями на поверхности, нахождение площади области на поверхности с помощью первой квадратичной формы.

Занятия 12, 13. Задачи на нахождение главных кривизн поверхности, главных направлений на поверхности и полной кривизны поверхности. Определение типов точек на поверхности.

Занятия 14, 15. Задачи, иллюстрирующие свойства геодезических на поверхности.

5 семестр

Гладкие многообразия

Занятие 1. Задачи, связанные с примерами гладких многообразий.

Занятие 2. Задачи, связанные с примерами гладких отображений многообразий.

Занятие 3. Задачи, связанные с понятием касательного вектора и касательного пространства к многообразию.

Занятие 4. Задачи, связанные с понятием дифференциала гладкого отображения многообразий.

Изометрические отображения поверхностей

Занятие 5. Примеры изометричных поверхностей.

Занятие 6. Задачи на свойства псевдосферы.

Элементы геометрии Лобачевского

Занятия 7,8. Задачи связанные с понятиями и фактами геометрии Лобачевского.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие подходы и методы:

При организации образовательного процесса используются следующие подходы и методы:

эвристический, ориентированный на: - осуществление студентами личностно-значимых открытий в процессе подготовки к практическим занятиям по методике преподавания математики; - демонстрацию многообразия решений математических задач, методов, форм, средств и приемов организации учебной деятельности школьников; - творческую самореализацию студентов в процессе создания планов-конспектов уроков и их видеофрагментов; - индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

практико-ориентированный, предполагающий: - освоение содержание образования через решения практических задач; - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности; - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;

метод группового обучения, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности студентов, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями;

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

В процессе самостоятельной работы по дисциплине *«Дифференциальная геометрия и топология»* студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

- изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях и лабораторных занятиях на самостоятельное изучение по источникам основной и дополнительной литературы;
- подготовка к различным формам промежуточной аттестации (лабораторной и контрольной работе, зачету, экзамену);
- поиск и изучение понятий и фактов из дисциплин *«Алгебра и теория чисел»*, *«Математический анализ»*, *«Дифференциальные уравнения»*, необходимых для усвоения дисциплины *«Дифференциальная геометрия и топология»*;
- выполнение домашних заданий; самостоятельное выполнение заданий для лабораторных работ;

- подбор необходимой литературы, поиск необходимой информации в сети Интернет.

Критерием оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «*Дифференциальная геометрия и топология*», является уровень усвоения учебного материала, который проверяется и оценивается при выполнении контрольных и лабораторных работ, индивидуальных заданий и при сдаче зачетов и экзаменов.

К *организационным формам* проведения УСР по дисциплине «*Дифференциальная геометрия и топология*» относится аудиторная деятельность на лабораторных занятиях. *Видами отчетности* УСР являются: контрольные работы и отчеты по индивидуальным заданиям.

Контроль УСР по дисциплине «*Дифференциальная геометрия и топология*» проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

- экспресс-опроса на аудиторных занятиях;
- контрольной работы;
- защиты отчета по индивидуальным заданиям.

Учет результатов контроля текущей успеваемости студентов ведется преподавателем. Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются как составная часть итоговой отметки по дисциплине в рамках рейтинговой системы оценки знаний студента.

Примерный перечень вопросов к зачёту (3 семестр)

1. Понятие метрического пространства. Топология метрического пространства. Изометрия.
2. Понятие топологического пространства. Открытые и замкнутые множества.
3. Хаусдорфовы пространства.
4. Замыкание множества в топологическом пространстве.
5. Внутренность множества в топологическом пространстве.
6. Граница множества в топологическом пространстве.
7. Непрерывные отображения и их свойства.
8. Критерии непрерывности.
9. Гомеоморфизмы.
10. Связные пространства и их основные свойства.
11. Линейно связные пространства.
12. Связные компоненты.
13. Компактные пространства и их основные свойства.
14. Непрерывные отображения компактных пространств.
15. Полные метрические пространства.
16. Вполне ограниченные метрические пространства.
17. Критерии компактности метризуемых пространств.

18. Базы и локальные базы в топологических пространствах.
19. Аксиомы счётности.
20. Сепарабельные пространства и их свойства.
21. Произведения топологических пространств.
22. Фактор-пространства топологических пространств.

**Примерный перечень вопросов к экзамену
(3 семестр)**

1. Понятие метрического пространства. Примеры и простейшие свойства. Топология метрического пространства.
2. Подпространство метрического пространства и его топология.
3. Понятие топологического пространства. Метризуемые и не метризуемые пространства. Открытые и замкнутые множества.
4. Подпространства топологического пространства. Свойства индуцированной топологии.
5. Хаусдорфовы пространства. Сходимость последовательностей в топологических пространствах.
6. Замыкание множества в топологическом пространстве и его свойства.
7. Внутренность и граница множеств в топологическом пространстве.
8. Понятие непрерывного отображения топологических пространств. Критерии непрерывности. Непрерывность композиции.
9. Алгебраические операции над вещественнозначными непрерывными функциями. Секвенциальная непрерывность.
10. Гомеоморфизмы. Примеры гомеоморфных подпространств евклидова пространства.
11. Связные пространства и их простейшие свойства. Примеры связных и несвязных пространств.
12. Сохранение связности непрерывными отображениями. Теорема о промежуточных значениях.
13. Линейно связные пространства.
14. Замыкание связного множества в топологическом пространстве. Свойство веера.
15. Связные компоненты топологических пространств.
16. Компактные пространства. Примеры. Характеристика компактности в терминах центрированных семейств множеств.
17. Компактность подпространств. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$.
18. Компактность и непрерывные отображения.
19. Полные метрические пространства.
20. Вполне ограниченные метрические пространства.
21. Теорема о связи между компактностью, полнотой и вполне ограниченностью метрического пространства.
22. Предельные точки множеств в топологических пространствах. Критерий компактности метризуемого пространства в терминах

- последовательностей и предельных точек.
23. Базы и локальные базы в топологических пространствах. Первая и вторая аксиомы счётности и связь между ними.
 24. Сепарабельные пространства. Связь между сепарабельностью и второй аксиомой счётности.
 25. Введение топологии с помощью ФСО.
 26. Произведение топологических пространств. Проектирования. Отображение в произведение.
 27. Фактор-пространства топологических пространств и факторные отображения.

Примерный перечень вопросов к зачёту (4 семестр)

1. Параметризованные кривые и вектор-функции.
2. Понятие линии. Способы задания линий.
3. Касательная к линии.
4. Длина дуги линии.
5. Натуральная параметризация.
6. Касательная как прямая, наиболее тесно прилегающая к линии.
7. Точки распрямления и условие бигулярности.
8. Кривизна линии. Формула для вычисления кривизны.
9. Механический смысл кривизны.
10. Репер Френе бигулярной линии. Элементы репера Френе.
11. Соприкасающаяся плоскость и её свойства.
12. Формулы Френе.
13. Кривизна, его механический смысл и формула для его вычисления.
14. Понятие поверхности. Примеры и способы задания поверхностей.
15. Внутренние уравнения линий на поверхности.
16. Касательное пространство и касательная плоскость к поверхности. Нормаль к поверхности.
17. Первая квадратичная форма поверхности и задачи, решаемые с её помощью.
18. Нормальная кривизна линии на поверхности.
19. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна поверхности в данном направлении.
20. Главные направления и главные кривизны поверхности в данной точке.
21. Полная и средняя кривизна поверхности в данной точке. Типы точек на поверхности.
22. Геодезические и их свойства.

**Примерный перечень вопросов к экзамену
(5 семестр)**

1. Понятие гладкого многообразия.
2. Примеры гладких многообразий.
3. Линии как гладкие многообразия.
4. Поверхности как гладкие многообразия.
5. Алгебра гладких функций на многообразии.
6. Гладкие отображения многообразий.
7. Примеры гладких отображений многообразий.
8. Понятие диффеоморфизма.
9. Касательный вектор и касательное пространство к многообразию в точке.
10. Дифференциал гладкого отображения многообразий.
11. Цепное правило.
12. Изометрическое отображение поверхностей.
13. Дифференциал изометрического отображения поверхностей.
14. Критерий изометричности двух прострых поверхностей.
15. Теорема Гаусса.
16. Поверхности постоянной положительной кривизны.
17. Поверхности нулевой кривизны.
18. Поверхности постоянной отрицательной кривизны.
19. Понятие риманова многообразия.
20. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского.
21. Движения в модели Пуанкаре.
22. Примеры теорем геометрии Лобачевского.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)*
Дифференциальные уравнения	Дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 25.05.2022)
Функциональный анализ	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 25.05.2022)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета
