Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики и информатики

О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева

Элементы теории множеств

Учебно-методическое пособие

Минск
БГУ
2023

УДК 510.3(075.8)
В 282

Решение о депонировании вынес:
Совет механико-математического факультета
Протокол № 6 от 28 февраля 2023 года

Авторы:
Велько Оксана Александровна, старший преподаватель;
Мартон Марина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент;
Моисеева Наталья Александровна, старший преподаватель.

Рецензенты:
Барвенов С.А., доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Механико-математического факультета БГУ, кандидат физико-математических наук, доцент;
Гулина О.В., заместитель декана факультета экономики и менеджмента учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

Велько, О. А. Элементы теории множеств : учебно-методическое пособие / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 49 с. : ил. – Библиогр.: с. 48–49.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов факультета философии и социальных наук БГУ специальностей «Социология», «Социальные коммуникации». Каждая тема содержит исторические сведения, теоретический материал, примеры решения, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. Многие математические понятия иллюстрируются примерами из социологии и экономики.

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ 3
ВВЕДЕНИЕ 4
1. Понятие множества. Примеры множеств в социологии 6
2. Диаграммы Эйлера-Венна 9
3. Операции над множествами и их основные свойства 12
4. Применение теории множеств в анкетировании и при изучении социальных групп 26
5. Бинарные отношения. Моделирование социальных процессов с помощью бинарных отношений 27
6. Примеры решения задач 32
7. Задачи для самостоятельного решения 38
8. Вопросы для самоконтроля 41
9. Контроль знаний 42
ПРИЛОЖЕНИЕ 46
ЛИТЕРАТУРА 47

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня мы не можем отрицать наличие междисциплинарных связей между социологией и математикой. И в последние годы эта связь становится все более тесной и многоплановой. Изучение математики будущими социологами и специалистами по социальным коммуникациям, а также применение ими современных математических методов анализа социальной реальности способствует более успешному формированию у студентов профессиональной компетентности, умению задействовать межпредметные связи, осуществлению преемственности в изучении математических понятий, развитию критического и прогностического мышления.

Математические методы уже давно и с успехом применяются в социальных науках. Процесс математизации науки необратим, он захватывает такие области знаний, в которых совсем недавно исключалась возможность использования математических методов исследования и измерений. Сегодня развитие теории и успешность практических приложений любой науки в значительной степени предопределяются мерой математизации данной области знаний. Математика занимает важное место в общественной жизни, культуре, науке и является одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса и информатизации современного общества. Изучение математики развивает познавательные способности и логическое мышление, а также влияет на изучение других дисциплин. Математические методы позволяют также систематизировать и классифицировать результаты исследований, определять сходство и различие между процессами взаимодействия в различных природных условиях, вероятностную зависимость между явлениями, выделять ведущие факторы, действующие на развитие процесса, создавать математические модели процессов или явлений в социологии.

Данное учебно-методическое пособие написано на основе опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математическим дисциплинам в течение ряда лет на факультете философии и социальных наук Белорусского государственного университета. В пособии большое внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал, причем многие изучаемые математические понятия иллюстрируются приложениями из социологии. Некоторые задачи, разобранные и предложенные для самостоятельного решения, подобраны так, чтобы показать возможность применения математических знаний в сфере будущей профессиональной деятельности студентов. Еще одна особенность настоящего учебно-методического пособия в том, что авторы сочли полезным дать историческую справку, где кратко сообщается история развития изучаемых понятий, обсуждается их значимость в науке. Это кажется важным и актуальным, поскольку дает студенту представление

о математике как области культуры человечества, знакомит с именами и историческими событиями, которые сопутствовали становлению математики.

Традиционно считают, что использование математики в социальных науках выражается в получении только количественных характеристик. Такое понимание крайне упрощено, поскольку количественные определенности всегда связаны с качественными. Конкретные социологические исследования могут успешно развиваться и будут иметь практическое и теоретическое значение только в том случае, если они используют математические методы при анализе различных механизмов социальных процессов, а также при сборе и обработке первичной социальной информации.

Рассмотрены конкретные задачи на применение теории множеств к анкетным опросам и социальным группам. Анализируя одну из главных задач социолога – поиск сочетаний значений рассматриваемых признаков, детерминирующих то или иное поведение человека, приходим к языку математической логики и теории множеств. На конкретных примерах показано, как мощность симметрической разности может служить количественной мерой различия между множествами анкет социологических опросов. Бинарные отношения, т.е. отношения между двумя элементами какого-либо множества, являются основным инструментом моделирования и исследования социальных отношений. Рассматриваются такие бинарные отношения, как «быть одноклассником», «быть родственником», «быть старше». Студенты учатся самостоятельно моделировать социальные процессы с их помощью.

Одной из инновационных технологий является оргдеятельностная технология, основанная на организации эвристической (обучение через открытия), диалоговой, продуктивной деятельности каждого обучающегося. Подобная деятельность приводит к созданию участником собственных образовательных продуктов, как внешних (самостоятельное составление примеров и задач по выбранной теме, составление кроссвордов, подготовка наглядных пособий, мультимедийных презентаций по изучаемым темам курса), так и внутренних, включая развитие коммуникативных, эвристических качеств его личности, обеспечивает самореализацию, а потому мотивацию к учебной деятельности.

Эвристический метод применяется для активизации творческой деятельности обучающихся через систему творческих заданий. Этот метод способствует лучшему пониманию и закреплению в памяти тех материалов, с которыми обучающийся ознакомился в процессе выполнения задания по дисциплине.

Авторы разработали эвристические задания открытого типа на очно-дистанционной программе повышения квалификации «Технологии эвристического обучения в высшей школе «Методика обучения через открытие: Как обучать всех по-разному, но одинаково» БГУ. Автор и ведущий программы повышения квалификации: Король А.Д., ректор БГУ, доктор педагогических наук, профессор. Некоторые из эвристических заданий открытого типа приводятся в данном пособии.

1. *Понятие множества. Примеры множеств в социологии*

Георг Кантор

Любая теория начинается с введения основных начальных понятий, т. е. минимального списка *неопределяемых* терминов, которые называются так потому, что любая попытка определить их через другие понятия приводит к появлению новых, которые нуждаются в определении. Примерами неопределяемых понятий является *точка* – то, что не имеет частей в интерпретации древнегреческих философов, или, *линия* – длина без ширины и т. д. Центральное место в иерархии математических сущностей занимают математический объект и понятие **множество**. Понятие множества в математике первично, несводимо к более простым понятиям.

Теория множеств является основой современной математики и возникла в конце XIX века в связи с необходимостью обоснования ряда разделов (например, теория вероятностей, теория чисел). Основоположник теории множеств немецкий математик и философ **Георг Кантор** под множеством понимал «любое собрание определённых и различимых между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое как единое целое». Г. Кантор впервые в математической науке изучил свойства абстрактных множеств и осуществил их классификацию, отвлекаясь от конкретной природы элементов множеств.

В математике **под множеством** понимается *совокупность некоторых объектов, объединяемых по общим характеристическим свойствам и мыслимых в качестве единого.* Канторовское определение множества потребовало введения следующих трех символов.

Первый символ должен представлять множество как «единое». Для обозначения множеств используются прописные буквы латинского алфавита

$$A, B, C, \ldots, X, Y, Z$$

или какого-либо другого по соглашению.

Второй символ должен представлять «многое», т. е. рассматриваться как «элемент множества». ***Элементами множества*** называются объекты, составляющие множество. Например, если множество представляет собой совокупность студентов-социологов конкретной группы, то его элементами будут фамилии студентов. Для обозначения элементов используются строчные буквы того же алфавита, например,

$$a, b, c, \ldots x, y, z.$$

Третий символ должен соотносить элемент со множеством. Тот факт, что «*x* является элементом множества *M*» записывается в виде

$$x \in M.$$

Это высказывание можно также прочесть следующим образом: «*x* принадлежит множеству *M*» или «*x* содержится в множестве *M*». Символ $\in$ называется ***символом принадлежности***. Он происходит от первой буквы греческого слова εστι – быть. Если «*x* не является элементом множества *M*», то пишут

$$x \notin M$$

и читают как «*x* не принадлежит множеству *M*», «*x* не содержится в множестве *M*».

Введение понятия множества в математику оказалось очень полезным и плодотворным. Элементами множеств могут быть объекты различной природы, поэтому одни и те же утверждения о множествах могут быть отнесены как к утверждениям о числах, так и к утверждениям о социальных объектах.

Способы задания множества

Множество считается ***заданным***, если о каждом объекте можно сказать принадлежит он этому множеству или нет. Например, совокупность студентов-социологов на потоке является множеством, так как про каждого студента можно сказать, числится он на данном потоке или нет.

Упражнение. Определить, какие из следующих совокупностей задают множества, а какие нет:

1. совокупность лиц, работающих в БГУ, имеющих высшее образование;
2. совокупность произведений искусства;
3. совокупность красивых девушек в аудитории;
4. совокупность студентов-социологов в университете;
5. совокупность зрителей в кинотеатрах Минска.

Возможны различные способы задания множества. Один из них состоит в том, что дается полный список элементов, входящих во множество.

Множество, состоящие из конечного числа элементов, называется ***конечным множеством***. Конечное множество можно задать, перечисляя его элементы. Элементы, принадлежащие конечному множеству, записывают между двумя фигурными скобками и разделяют их запятыми.

Например, множество букв алфавита белорусского языка – {а, б, в,…, я}; множество студентов данной учебной группы определяется их списком в

экзаменационной ведомости – {Баранкина О.В., Иванов А.П., …, Петрова И.Н.}; множество всех стран на земном шаре – их списком в последнем издании географического атласа; множество арабских цифр десятичной системы счисления: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}; половой диморфизм П={м, ж}, где м и ж – мужчины и женщины соответственно.

Но этот способ задания множеств, т.е. способ перечисления элементов множества, применим лишь к конечным множествам, да и то не ко всем. Например, множество рыб в океане конечно, однако задать их списком, перечислить трудно.

Замечание. *В дальнейшем, для удобства будем давать словесное описание множества в кавычках, например, множество А – «множество студентов-социологов».*

Если число элементов бесконечное, то множество называется ***бесконечным***. В пример можно привести множество натуральных чисел, множество точек на отрезке. К бесконечным множествам способ перечисления элементов вовсе не применим.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется ***пустым множеством*** и обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество единственно и оно является конечным. Например, множество динозавров в зоопарке Минска является пустым, так как не содержит ни одного элемента, как и множество электронных баз данных в XIX в. и действительных корней уравнения $x^2+1=0$.

Замечание. *Символ для пустого множества только один, потому что пустое множество единственно.*

Отметим, что введение понятия пустого множества можно объяснять тем, что при задании множества характеристическим свойством (т.е. с помощью описания свойств его элементов) не всегда известно, существует ли элемент с таким свойством. Например, мы говорим о множестве решений какого-либо уравнения, которое может и не иметь решения, т.е. это множество является пустым.

В большинстве случаев множество задается с помощью указания *характеристических свойств* его элементов, при этом используются фигурные скобки, а внутри них приводятся характеристические свойства, описывающие элементы множества (появляется строгое математическое описание). Так запись

$$\{x: \text{ } x \text{ обладает свойством } P\}$$

задает множество, содержащее только те объекты, которые имеют свойство *P*. Двоеточие в этой записи можно читать как «*такой, что*».

Таким образом, множества задают либо перечислением его элементов, либо описанием характеристического свойства множества, которое четко определяет совокупность его элементов.

Пример. Множество $A = \{2, 4, 6, \ldots\} = \{x: x$ – четное натуральное число$\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ или множество $B = \{x: x$ – натуральное число, такое, что $x < 6\}$.

Например, множества $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$ являются различными, так как $\varnothing$ – это пустое множество, не содержащее ни одного элемента, а множество $\{\varnothing\}$ – не пусто, его единственным элементом является само пустое множество, т.е. $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

Множество, состоящее из одного элемента a, обозначается $\{a\}$ и называется ***одноточечным множеством***; его следует отличать от элемента.

Например, множество корней уравнения x-7=0 является одноточечным. Так, в социальных науках выделяется понятие «семья, состоящая из одного человека» – тоже одноточечное множество.

Мощностью конечного множества S называется число элементов в нем. Оно обозначается как $n(S)$.

Принято считать, что математика возникла в глубокой древности из практических потребностей людей. По поводу древности математики никто не спорит, а вот по поводу того, что побудило людей ею заниматься, существует и другое мнение. Согласно ему, математика как и искусство, была вызвана к жизни духовными потребностями человека, его стремлением к познанию и красоте. Одних вдохновляет прикладной аспект математики, других – ее внутренняя красота и гармония! Все это накладывает определенные ограничения как на язык математики, так и на ее логическую аргументацию, когда из верных исходных положений получаются верные результаты.

2. Диаграммы Эйлера-Венна

Определение подмножества. Множество A называется ***подмножеством*** *множества* B, обозначается $A \subset B$ *(*или $B \supset A$*)*, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

В этой символической записи использованы логические обозначения: символ $\forall$ – ***квантор всеобщности*** («для всех», «для любого»), знак $\Rightarrow$ — ***импликация*** (т. е. $X \Rightarrow Y$ означает «*если X, то Y*», «в случае X выполняется Y»), логическая связка $\Leftrightarrow$ – ***эквивалентность*** («если и только если», ритуальное выражение «тогда и только тогда, когда»), называемая иногда двойной импликацией.

Пример. Например, имеют место следующие включения:

$$\boldsymbol{N \subset Z \subset Q \subset R},$$

где $\boldsymbol{N}$ – множество всех натуральных чисел; $\boldsymbol{Z}$ – множество всех целых чисел; $\boldsymbol{Q}$ – множество всех рациональных чисел; $\boldsymbol{R}$ – множество всех действительных чисел.

Пример. Пусть A – множество всех студентов БГУ, B – множество студентов факультета философии и социальных наук БГУ, C – множество студентов-заочников факультета философии и социальных наук БГУ.

$$C \subset B \subset A.$$

Замечание. *В число «подмножеств» непустого множества A удобно включить само A и пустое множество $\varnothing$, т. е.*

$$A \subset A \text{ и } \varnothing \subset A.$$

Таким образом, всякое множество есть подмножество самого себя. Второе включение можно мотивировать, исходя из следующего рассуждения. Если бы пустое множество $\varnothing$ не было подмножеством множества A, то содержало бы элемент принадлежащий $\varnothing$, но не принадлежащий A, а поскольку пустое множество не содержит элементов, то это невозможно.

Эти два подмножества, т. е. $\varnothing$ и A, называются ***несобственными подмножествами*** множества A. Остальные, если таковые есть, называются ***собственными подмножествами*** множества A. Например, множество гласных букв является собственным подмножеством множества букв русского алфавита.

Пример. Выпишем все подмножества заданных конечных множеств:

а) у двухэлементного множества $\{1, 2\}$ четыре множества: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$;

б) у трехэлементного множества $\{0, 1, 3\}$ восемь множеств: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{0, 1, 3\}$.

Замечание. *У конечного множества, состоящего из n элементов, будет ровно 2^n подмножеств, включая пустое и его самого*.

Обычно все множества, с которыми имеют дело в математическом рассуждении, являются подмножествами некоторого фиксированного множества. Поэтому будем предполагать, что множества, рассматриваемые в рамках какой-либо теории, являются подмножествами одного множества, называемого ***универсальным множеством***. Будем обозначать его через $\boldsymbol{U}$.

Существует очень удобный прием наглядного изображения взаимоотношений между множествами, позволяющий иллюстрировать операции над ними, – это так называемые ***диаграммы Эйлера–Венна***.

Леонард Эйлер

Это графический способ изображения множеств в виде кругов, которым активно пользовались Леонард Эйлер, а затем и Джон Венн. Множества в этих диаграммах чаще всего изображаются кругами, точнее их внутренностью и

Джон Венн

получаемыми из них фигурами, а прямоугольник изображает универсальное множество ***U.*** В диаграммах Эйлера-Венна не имеет значения относительный размер кругов, важно только их взаимное расположение.

На Рис. 1.1 два множества A и B изображены кругами, причем видно, что A включено в B, т. е. $A \subset B$, и A – собственное подмножество множества B, которое не совпадает с ним.

На рис. 1.2 также изображено включение $A \subset B$, но при этом A и B совпадают.

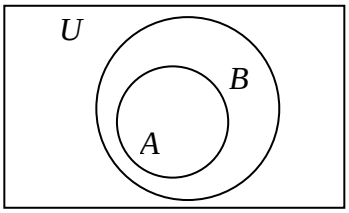


Рис. 1.1

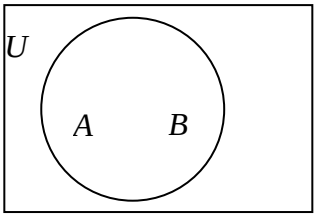


Рис. 1.2

Определение равенства множеств. Множества A и B **равны**, обозначается $A = B$, если все элементы множества A принадлежат также множеству B, а все элементы множества B принадлежат также множеству A:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

Согласно этому определению $A = B$, если каждое из двух множеств есть подмножество другого множества, поэтому можно говорить, что множества A и B «состоят из одних и тех же элементов» (см. р. 1.2).

Пример. Пусть множество $X=\{2, 3\}$, а множество $Y = \{y: y^2 - 5 \cdot y + 6 = 0\}$, тогда $X = Y$.

Определение неравенства множеств. Множества A *и* B ***неравны*** (обозначается $A \neq B$), если в одном из этих множеств есть хотя бы один элемент, которого нет в другом.

Пример. Если $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{1,2,4\}$, то множества A и B не равны, то есть $A \neq B$.

Замечание. *Для неравных множеств не выполняется хотя бы одно из этих включений* $A \subset B$, $B \subset A$.

Пример. Если $A = \{1,2\}$ и $B = \{1,2,4\}$, то $A \neq B$, так как множество B не является подмножеством множества A, то есть $B \not\subset A$.

В заключение этого раздела сформулируем **задачу о трех языках**, для решения которой потребуется не только понятие множества, но и знание операций над множествами. В студенческие группы направлен проверяющий, чтобы оценить уровень знаний иностранных языков. Был представлен следующий итоговый отчет.

Отчет проверяющего: В группах 100 студентов, каждый из которых изучает, по крайней мере, один из трех языков: английский, немецкий или французский. Причем все три языка изучают 5 человек, английский и французский – 8, немецкий и французский – 10, английский и немецкий – 20, немецкий – 23, французский – 30, английский – 50 человек.

Проверяющий, представивший этот отчет, был уволен. ***Почему?***

3. Операции над множествами и их основные свойства

Над множествами можно производить различные операции, результатом которых будут являться новые множества. Задать операцию над множествами означает указать способ как по двум заданным множествам A и B построить третье.

Определение пересечения множеств. ***Пересечением*** двух множеств A *и* B, (обозначается $A \cap B$) называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B:

$$A \cap B \overset{def}{=} \{x:\ x \in A \ \textbf{и}\ x \in B\}.$$

Символ равенства с *def*, т.е. запись $\overset{def}{=}$, в этой формуле означает «равенство по определению», т. е. то, что стоит слева от этого символа, определяется через то, что стоит справа, а *def* — это сокращение от лат. *definito* — определение.

Примеры:

1. Пусть A – «множество студентов 1-го курса отделения "Социология"», а B – «множество девушек-социологов ФФСН», то $A \cap B$ – «множество девушек–социологов 1-го курса ФФСН».
2. Пусть A – «множество нечетных чисел», а B – «множество двузначных чисел», то $A \cap B$ – «множество нечетных двузначных чисел».
3. Пусть A – «множество всех левшей», а B – «множество всех людей, носящих очки», тогда $A \cap B$ – «множество всех левшей, носящих очки».
4. Пусть A – «множество всех студентов, сдавших сессию на баллы не ниже 7, т. е. на 7, 8, 9, 10», и пусть B – «множество всех студентов, сдавших сессию на баллы не выше 8, т. е. на 4, 5, 6, 7, 8», тогда $A \cap B$ – «множество всех студентов, сдавших сессию на баллы 7 и 8».
5. Пусть $A=\{3,5,7\}$, $B=\{1,3,9\}$, тогда $A \cap B = \{3\}$.

Замечание. *Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечение пусто, пишем* $A \cap B = \varnothing$, *и в таком случае говорят, что множества A и B* ***не пересекаются***.

6. Пусть $A=\{3,5,7\}$, $C=\{4,6\}$, тогда $A \cap C = \varnothing$.

На рис. 1.3, 1.4 приведены диаграммы Эйлера–Венна для двух множеств A и B в случаях, когда соответственно $A \cap B \neq \varnothing$ и $A \subset B$. Множеству $A \cap B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

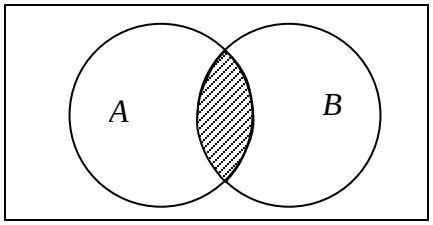


Рис. 1.3

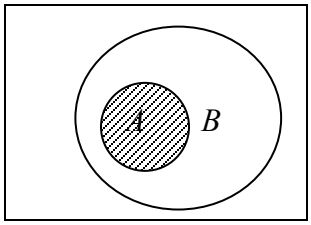


Рис. 1.4

Обратим внимание на то, что в описании пересечения множеств использована связка «и» вместе с символами принадлежности элемента $\in$.

Операция пересечения множеств обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции умножения чисел. Однако некоторые свойства пересечения множеств отличаются от соответствующих свойств умножения.

Замечания. 1.*Если A – подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то $A \cap B = A$ (см. рис.* 1.4*), поскольку общими для множеств A и B будут все элементы множества A и только они.*

2. *Отметим свойства пересечения множеств, справедливые для любых множеств A, B и C:*

$$A \cap B \subset A \quad \text{и} \quad A \cap B \subset B.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следует включение $A \cap C \subset B \cap C$. В частности, для любого множества A имеют место равенства

$$A \cap \varnothing = \varnothing \text{ и } A \cap \boldsymbol{U} = A.$$

Также верно равенство $A \cap A = A$.

3. *Для любых двух множеств A и B выполняется* ***свойство коммутативности*** *операции пересечения:*

$$A \cap B = B \cap A.$$

Коммутативный закон показывает, что можно как угодно менять порядок множеств в указанных операциях.

4. *Для любых трех множеств A, B и C выполняется* ***свойство ассоциативности*** *для операции пересечения:*

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем пересечение этих множеств $A \cap B$.

Множество A состоит из 7 различных букв:

$$A = \{С, О, Ц, И, Л, Г, Я\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{Ф, И, Л, О, Г, Я\}.$$

Пересечением этих множеств является следующий набор из 5 букв:

$$A \cap B = \{И, Л, О, Г, Я\},$$

который содержится как во множестве A, так и во множестве B.

Определение объединения множеств. ***Объединением*** *двух множеств A и B,* (обозначается $A \cup B$), называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.

$$A \cup B \stackrel{def}{=} \{x:\ x \in A \ \textbf{или}\ x \in B\}.$$

Примеры:

1. Пусть A – «множество всех государственных предприятий Минска», а B – «множество всех негосударственных предприятий города Минска», тогда $A \cup B$ – «множество всех как государственных, так и негосударственных предприятий Минска».
2. Пусть A – «множество всех нечетных натуральных чисел», а B – «множество всех четных натуральных чисел», то $A \cup B$ – «множество всех натуральных чисел».
3. Пусть A – «множество всех девушек, которые учатся на ФФСН», а B – «множество всех юношей, которые учатся на ФФСН», то $A \cup B$ – «множество всех студентов, которые учатся на ФФСН».
4. Пусть A={3,5,7}, B={1,3,9}, C={4,6}, тогда $A \cup B$={1,3,5,7,9}; $A \cup C$ ={3,4,5,6,7}.

На рис. 1.5 приведена диаграмма Эйлера–Венна для двух множеств A и B в случае, когда $A \cap B \neq \varnothing$. На рис. 1.6, 1.7 приведены диаграммы Эйлера–Венна для

двух множеств A и B в случаях, когда $A \subset B$ и $A \cap B = \varnothing$. Множеству $A \cup B$ на рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

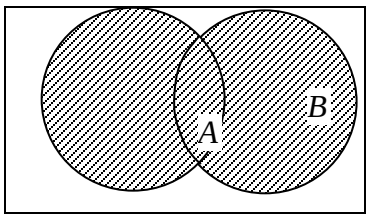


Рис. 1.5

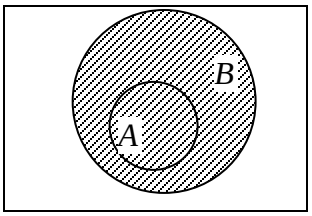


Рис. 1.6

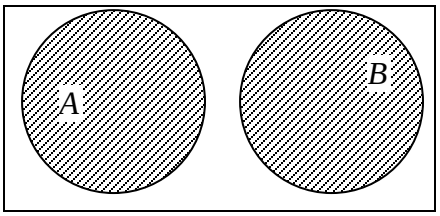


Рис. 1.7

Операция объединения множеств обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции сложения чисел. Однако некоторые свойства объединения множеств отличаются от соответствующих свойств сложения чисел.

Замечания. 1. *Если A подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то $A \cup B = B$ (см. рис.* 1.6*), так как элементы из множества A принадлежат множеству B и второй раз включать их в объединение не надо.*

2. *Отметим, что свойства объединения выполняются для любых множеств A, B и C:*

$$A \subset A \cup B \quad и \quad B \subset A \cup B.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следует включение $A \cup C \subset B \cup C$. В частности, для любого множества A выполняются равенства

$$A \cup \varnothing = A \text{ и } A \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}.$$

Выполняется также равенство

$$A \cup A = A.$$

Соотношение $A \cup B = \varnothing$ равносильно двум соотношениям $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$.

3. *Для любых двух множеств A и B выполняется* ***свойство коммутативности*** *операции объединения:*

$$A \cup B = B \cup A.$$

4. *Для любых трех множеств A, B и C выполняется* ***свойство ассоциативности*** *для операции объединения:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

5. *При чередовании операций объединения и пересечения для любых трех множеств A, B, и C выполняются* ***свойства дистрибутивности*** *одной операции относительно другой:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем объединение этих множеств $A \cup B$.

Множество A состоит из 7 различных букв:

$$A = \{\text{С, О, Ц, И, Л, Г, Я}\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{\text{Ф, И, Л, О, Г, Я}\}.$$

Объединением этих множеств является следующий набор из 8 букв:

$$A \cup B = \{\text{С, Ц, Ф, И, Л, О, Я, Г}\}.$$

Поскольку буквы И, Л, О, Г, Я, принадлежащие пересечению множеств A и B, вошли в объединение этих множеств лишь один раз, то мы получили только 8 букв, а не 7 + 6 = 13 букв, так как (7 + 6) – 5 = 8.

Определение разности множеств. ***Разностью*** двух множеств A и B (обозначается $A \setminus B$ (или $A - B$)), называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B:

$$A \setminus B \overset{def}{=} \{x:\ x \in A\ \textbf{и}\ x \notin B\}.$$

В определении разности множеств не предполагается, что B является подмножеством множества A.

Примеры:

1. Пусть A и B – «множества студентов отделения "Социология", изучающих английский и немецкий языки, соответственно», то $A \setminus B$ – «множество студентов отделения "Социология", которые изучают английский язык, но не изучают немецкий язык».
2. Пусть A={3,5,7}, B={1,3,9}, C={4,6}, тогда $A \setminus B$ ={5,7}, $A \setminus C = A$.
3. Пусть $A = \{x: |x| \le 5\}$ и множество $B = \{x: x < 2\}$, тогда разность $A \setminus B = \{x: 2 \le x \le 5\}$.

4. Пусть A – «множество всех студентов ФФСН», B – «множество всех людей, которые имеют автомобиль», тогда $A \setminus B$ – «множество всех студентов ФФСН, которые не имеют автомобиля», а $B \setminus A$ – «множество людей, которые имеют автомобиль, но не являются студентами ФФСН», т. е. $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Замечание. *Заметим, что если A – подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то их разность $A \setminus B = \varnothing$.*

На рис. 1.8–1.10 приведены диаграммы Эйлера–Венна для двух множеств A и B в случаях, когда соответственно $A \cap B \neq \varnothing$, $B \subset A$ и $A \cap B = \varnothing$. Множеству $A \setminus B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграммы.

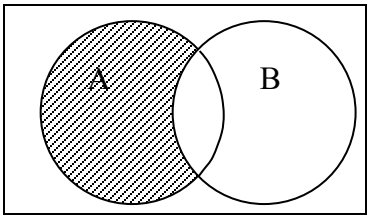


Рис. 1.8

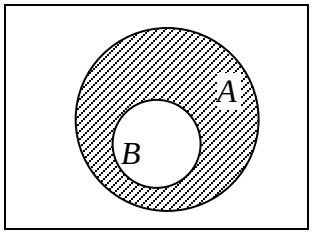


Рис. 1.9

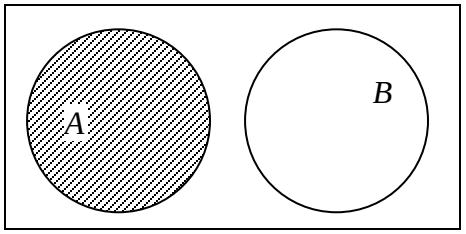


Рис. 1.10

Операция разность множеств обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции вычитания или разности чисел. Но следует обратить внимание на то, что *разность множеств не является операцией, обратной объединению множеств.*

Замечания.1. *Отметим свойство разности, справедливое для любых множеств A, B и C:*

$$A \setminus B \subset A.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следуют включения:

$$(A \setminus C) \subset (B \setminus C) \text{ и } (C \setminus B) \subset (C \setminus A).$$

В частности, для любого множества A имеют место равенства:

$$A \setminus A = \varnothing, \quad A \setminus \varnothing = A \quad и \quad \varnothing \setminus A = \varnothing.$$

2. *Операция разности множеств «не симметрична» относительно множеств A и B в том смысле, что $A \setminus B \neq B \setminus A$.* Более того,

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing.$$

3. *«Вычитание» из множества A множества B сводится к удалению из множества A общей части A и B, т. е. множества* $A \cap B$:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем разность этих множеств $A \setminus B$.

Множество A состоит из 7 различных букв:

$$A = \{\text{С, О, Ц, И, Л, Г, Я}\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{\text{Ф, И, Л, О, Г, Я}\}.$$

Разностью $A \setminus B$ этих множеств является набор из двух букв:

$$A \setminus B = \{\text{С, Ц}\},$$

которые принадлежат множеству A, но не содержатся в множестве B.

Определение дополнения множеств. Если $\boldsymbol{U}$ — универсальное множество, содержащее множество A, то разность $\boldsymbol{U} \setminus A$ называется ***дополнением*** множества A и обозначается $\overline{A}$:

$$\overline{A} \overset{def}{=} \{x:\ x \in \boldsymbol{U} \ \textbf{и}\ x \notin A\} = \boldsymbol{U} \setminus A.$$

Заметим, что дополнение $\overline{A}$ множества A – это множество элементов фиксированного универсального множества $\boldsymbol{U}$, не входящих в множество A.

Например, если $\boldsymbol{U}$ – множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, то дополнением множества всех рациональных чисел будет множество всех иррациональных чисел.

Универсальное множество $\boldsymbol{U}$ представляется обычно прямоугольником на плоскости, а множество A – круг, лежащий внутри этого прямоугольника (рис. 1.11).

На рис. 1.12 дополнению множества A, т. е. множеству $\overline{A}$ соответствует заштрихованная часть этого прямоугольника.

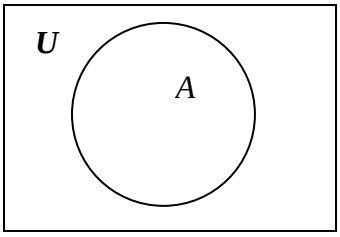


Рис. 1.11

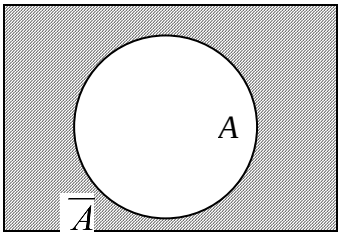


Рис. 1.12

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ». Найдем дополнение множества A, т. е. множество $\overline{A}$:

Множество А состоит из 7 различных букв: A = {С, О, Ц, И, Л, Г, Я}.

Поскольку в русском алфавите 33 буквы, то дополнением $\overline{A}$ является следующее множество, состоящее из 26 букв, среди которых нет букв, составляющих множество A:

$$\overline{A} = \{А, Б, В, Д, Е, Ё, Ж, \ldots, Ш, Щ, Ъ, Ь, Ы, Э, Ю\}.$$

Замечания.1. *Отметим следующие свойства дополнения, справедливые для любого множества А и содержащего его универсального множества* ***U:***

$$A \cup \overline{A} = \boldsymbol{U} \quad и \quad A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

$$\overline{\overline{A}} = A \text{ – закон двойного дополнения, } \overline{\varnothing} = U, \ \overline{U} = \varnothing.$$

2. *Выделим также свойство дополнения для включения множеств, т. е. если* $A \subset B$, *то* $\overline{B} \subset \overline{A}$ *или* $\boldsymbol{U} \setminus B \subset \boldsymbol{U} \setminus A$

3. *Разность множеств А и В можно выразить через пересечение множеств А и* $\overline{B}$, *а именно,* $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, *т. е. разность множеств* $A \setminus B$ *есть пересечение множества А и дополнения множества В.*

Определение симметрической разности. ***Симметрической разностью*** множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \Delta B$ и состоящее из элементов, которые принадлежат лишь одному из двух множеств, т.е. либо только A, либо только B:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Например, A – «множество всех социологов, проводящих анкетирование традиционно на бумажных бланках», B – «множество всех социологов, проводящих анкетирование при помощи компьютера», тогда $A \Delta B$ – «множество всех социологов, которые проводят анкетирование на бланке, но не проводят

анкетирование на компьютере, или множество всех социологов, которые проводят анкетирование на компьютере, но не проводят анкетирование на бланках».

Рассмотрим диаграммы Эйлера–Венна для симметрической разности двух множеств A и B в случаях, когда соответственно $A \cap B \neq \varnothing$, $A \subset B$ и $A \cap B = \varnothing$, (см. рис. 1.13–1.15). Множеству $A \Delta B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграммы.

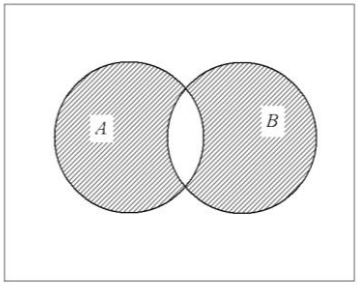


Рис. 1.13

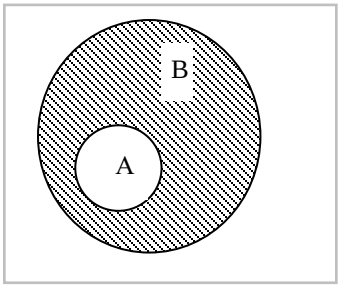


Рис. 1.14

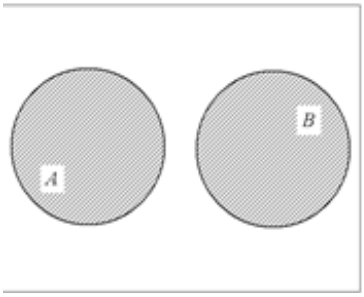


Рис. 1.15

***Замечания*.1.** *Если множества A и B не пересекаются, т.е.* $A \cap B = \varnothing$, *тогда*

$$A \Delta B = A \cup B.$$

2. *Симметрическую разность можно вычислять, в частности, следующим образом:*

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

3. *Отметим следующие свойства симметрической разности*:

$$A \Delta A = \varnothing, \; A \Delta \varnothing = A, \; \varnothing \Delta A = A.$$

4. *Для любых двух множеств A и B выполняется свойство коммутативности операции симметрической разности*:

$$A \Delta B = B \Delta A.$$

5. *Для любых трех множеств A, B и C выполняется свойство ассоциативности для операции симметрической разности:*

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$$

6. *Закон дистрибутивности. При чередовании операций пересечения и симметрической разности для любых трех множеств A, B, и C выполняется свойство дистрибутивности одной операции относительно другой:*

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

Напомним, что в числовых примерах есть аналог дистрибутивности умножения относительно сложения, но нет дистрибутивности сложения относительно умножения.

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем симметрическую разность этих множеств $A\Delta B$.

Множество A состоит из 7 различных букв:

$$A = \{\text{С, О, Ц, И, Л, Г, Я}\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{\text{Ф, И, Л, О, Г, Я}\}.$$

Симметрическая разность множеств A и B состоит из 3 букв:

$$A\Delta B = \{\text{С, Ц, Ф}\},$$

которые принадлежат разностям $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

Симметрическая разность множеств A и B состоит их тех элементов, которые принадлежат в точности одному из этих множеств. В определении симметрической разности, по существу, используется связка ***исключающее или***.

В заключение рассмотрим в следующих примерах все рассмотренные операции над множествами: пересечение, объединение, разность и симметрическая разность.

Пример. Пусть A – «множество студентов отделения "Социология" ФФСН», а B – «множество студентов, обучающихся на ФФСН». Опишем множества: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A\Delta B$, $\overline{A}$.

Получим следующие множества:

$A \cap B$ – «множество студентов отделения "Социология" ФФСН»;

$A \cup B = B$= «множество студентов, обучающихся на ФФСН»;

$A \setminus B = \varnothing$;

$B \setminus A$ – «множество студентов ФФСН отделений "Психология", "Философия", "Социальная работа" и "Социальные коммуникации"»;

$A \Delta B = B \setminus A$ – «множество студентов ФФСН отделений "Психология", "Философия", "Социальная работа" и "Социальные коммуникации"»;

$\overline{A}$ – «множество студентов ФФСН отделений "Психология", "Философия", "Социальная работа" и "Социальные коммуникации"». В качестве универсального множества рассмотрели множество B, т.е. $\boldsymbol{U} = B$.

Пример. Множество всех студентов отделения «Социология» является объединением следующих трех множеств: A – «множество всех успевающих студентов», B – «множество всех девушек», C – «множество всех неуспевающих юношей». Опишем множества, входящие в равенства законов дистрибутивности:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Ясно, что каждый студент отделения «Социология» принадлежит хотя бы одному из указанных множеств. Заметим, что множества A и B имеют общие элементы: успевающие девушки входят и в первое, и во второе множество.

Поскольку $B \cap C = \varnothing$, то $A \cup (B \cap C) = A \cup \varnothing = A$. С другой стороны, $A \cup B$ – «множество всех успевающих студентов и всех девушек», $A \cup C$ – «множество всех успевающих студентов и всех неуспевающих юношей», следовательно, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ – «множество всех успевающих студентов», т. е. это множество A. В этом примере для множеств A, B и C справедливы равенства

$$A \cup (B \cap C) = A = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Поскольку $B \cup C$ – «множество всех девушек и всех неуспевающих юношей», то $A \cap (B \cup C)$ – «множество всех успевающих девушек», с другой стороны, так как $A \cap C = \varnothing$, то $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap B$ – «множество всех успевающих девушек». В этом примере для множеств A, B и C справедливы равенства

$$A \cap (B \cup C) = A \cap B = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Посчитаем число элементов $n(A \cup B)$ объединения множеств A и B, в случае когда их пересечение не пусто, т. е. если $A \cap B \neq \varnothing$.

Утверждение. Для произвольных конечных множеств A и B число элементов объединения этих множеств

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Эта формула следует из того факта, что когда число элементов множества A суммируется с числом элементов множества B, то элементы, принадлежащие

множеству $A \cap B$, учитываются дважды. Чтобы повторяющие элементы не учитывались, их необходимо удалить.

Пример. В группе 25 человек изучают английский язык, 10 человек – немецкий язык, а 5 человек – одновременно английский и немецкий языки. Сколько студентов изучают английский или немецкий язык?

Решение. Пусть множество A – «множество студентов, изучающих английский язык», множество B – «множество студентов, изучающих немецкий язык». Тогда, в силу предыдущего утверждения, количество студентов, изучающих английский или немецкий языки,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 25 + 10 - 5 = 30.$$

Пример. Социолог опросил 100 граждан. По данным этого опроса, 75 граждан посещает государственные медицинские учреждения, 60 – коммерческие, а 45 граждан – одновременно и государственные, и коммерческие медицинские учреждения. Сколько граждан посещает государственные или коммерческие медицинские учреждения?

Решение. Пусть A – «множество граждан, посещающих государственные медицинские учреждения», B – «множество граждан, посещающих коммерческие медицинские учреждения», $A \cup B$ – «множество граждан, посещающих государственные или коммерческие медицинские учреждения». Тогда, в силу предыдущего утверждения, найдем

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 75+60-45 = 90.$$

Замечание (*Законы де Моргана (законы двойственности)). Обратим внимание на свойство дополнения от объединения множеств, т. е. справедливость равенства вида*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \textit{или} \quad U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B),$$

а также на свойство дополнения от пересечения множеств, т. е. справедливость равенства вида

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \textit{или} \quad U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B).$$

Пример. В группе из 40 студентов 25 человек изучают английский язык, 10 – немецкий язык, а 5 человек – одновременно английский и немецкий языки. Сколько студентов не изучают ни английский, ни немецкий язык?

Решение. Пусть A – «множество студентов, изучающих английский язык», B – «множество студентов, изучающих немецкий язык», а универсальное множество

$\boldsymbol{U}$ – это группа из 40 студентов. Тогда множество студентов, не изучающих ни английский, ни немецкий язык, равно пересечению дополнений $\overline{A} \cap \overline{B}$ или $(U \setminus A) \cap (U \setminus B)$. В силу свойства дополнения для объединения множеств имеем

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \quad \text{или} \quad (U \setminus A) \cap (U \setminus B) = U \setminus (A \cup B).$$

Напомним, что, по решению предыдущего примера, число студентов группы, изучающих английский или немецкий язык, равно $n(A \cup B) = 30$. Поэтому, так как

$$n((U \setminus A) \cap (U \setminus B)) = n(U \setminus (A \cup B)) = 40 - 30 = 10$$
$$\text{или} \quad n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = 40 - 30 = 10,$$

то всего 10 студентов группы не изучают эти иностранные языки.

Рассмотрим как в случае пересечения конечных множеств A, B и C посчитать число элементов множества $A \cup B \cup C$. Если просуммировать количество элементов в каждом множестве A, B и C, то некоторые подмножества при подсчете будут учтены дважды. Если вычесть число элементов множеств $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, т.е. $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$ и $n(B \cap C)$ соответственно, из числа элементов $n(A \cup B \cup C)$, то элементы множества $A \cap B \cap C$ совсем не будут учтены.

Поэтому если к указанной разности добавить $n(A \cap B \cap C)$, то каждый элемент множества $A \cup B \cup C$ будет учтен ровно один раз. Таким образом, получаем следующую формулу:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + \\ + n(A \cap B \cap C).$$

В частности, пользуясь этой формулой, можно решить задачу о трех языках, сформулированную в конце темы 1.2 (отчет проверяющего).

Начнем как всегда с обозначений. Пусть A – «множество студентов, изучающих английский язык», B – «множество студентов, изучающих немецкий язык», C – «множество студентов, изучающих французский язык» и $\boldsymbol{U}$ – «множество всех студентов». По условию задачи $n(\boldsymbol{U})=100$, $n(A)=50$, $n(B)=23$, $n(C)=30$, $n(A \cap B)=20$, $n(A \cap C)=8$, $n(B \cap C)=10$, $n(A \cap B \cap C)=5$. По предыдущей формуле для числа элементов $n(A \cup B \cup C)$ имеем

$$n(A \cup B \cup C) = 50+23+30-20-8-10+5=70.$$

Напомним, что в отчете инспектора сказано, что каждый из 100 студентов изучает хотя бы один из трех языков. Получили противоречие $100 \neq 70$.

Аналогичным образом посчитаем, *сколько студентов согласно инспектору, изучают только один немецкий язык*:

$$n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 23 - 20 - 10 + 5 = -2.$$

Опять нелепость! Можно сделать вывод о том, что проверка была проведена плохо или совсем не проводилась, а инспектор неудачно взял произвольные числа.

Исторические сведения (Наивная теория множеств)

Первый набросок теории множеств принадлежит Бернарду Больцано «Парадоксы бесконечного», 1850. В 1870 году немецкий математик Георг Кантор разработал свою программу стандартизации математики, в рамках которой любой математический объект должен был оказываться тем или иным «множеством». Этот подход изложен в двух его статьях, опубликованных в 1879 – 1897 годах в известном немецком журнале «Mathematische Annalen». Например, натуральное число, по Кантору, следовало рассматривать как множество, состоящее из единственного элемента другого множества, называемого «натуральным рядом» – который, в свою очередь, сам представляет собой множество, удовлетворяющее так называемым аксиомам Пеано. При этом общему понятию «множества», рассматриваемым им в качестве центрального для математики, Кантор давал мало что определяющие определения вроде «множество есть многое, мыслимое как единое», и т.д. Это вполне соответствовало умонастроению самого Кантора, подчёркнуто называвшего свою программу не «теорией множеств» (этот термин появился позднее), а учением о множествах.

Программа Кантора вызвала резкие протесты со стороны многих современных ему крупных математиков. Особенно выделялся своим непримиримым к ней отношением Леопольд Кронекер, полагавший, что математическими объектами могут считаться лишь натуральные числа и то, что к ним непосредственно сводится (известна его фраза о том, что «бог создал натуральные числа, а всё прочее – дело рук человеческих»). Полностью отвергли теорию множеств и такие авторитетные математики, как Герман Шварц и Анри Пуанкаре. Тем не менее, другие крупные математики – в частности, Готлоб Фреге, Рихард Дедекинд и Давид Гильберт – поддержали Кантора в его намерении перевести всю математику на теоретико-множественный язык. В частности, теория множеств стала фундаментом теории меры и интеграла, топологии и функционального анализа.

4. Применение теории множеств в анкетировании и при изучении социальных групп

1. На множестве может существовать либо не существовать отношение порядка типа «больше - меньше», «лучше - хуже», «более высокого уровня - более низкого уровня». Соответственно, выделяются упорядоченные и неупорядоченные множества. Например, порядок элементов отсутствует во множестве полового диморфизма (поэтому если 0 означает женский пол, а 1-мужской пол, то это не значит, что женский хуже, чем мужской, хотя 1>0), а вот множество «очень плохой, плохой, хороший, очень хороший» упорядочено по возрастанию значения элементов.

Пусть *x*, *y* – пара элементов множества *X*. Если $x \leq y$ либо $y \leq x$, будем говорить, что эти элементы сравнимы, иначе они не сравнимы.

Отношение порядка будем называть также *упорядочением* или *ранжировкой*. Очевидно, что на одном и том же множестве могут быть заданы различные отношения порядка. Это важно по той причине, что данные, значениями которых являются ранжировки, в социологии часто встречаются, например, когда респонденту предлагается упорядочить по важности какие-либо ценности.

Пример. Определим, можно ли установить отношение порядка на множестве или на его подмножестве

На какой срок Вы строите жизненные планы?

1. На длительную перспективу (более 5 лет).
2. На период от 3 до 5 лет.
3. На период в 2-3 года.
4. На период до 1 года.
5. Не планирую, живу сегодняшним днем.
6. Затрудняюсь ответить

Здесь 1<2<3<4<5 по отношению «беспечность» и 1>2>3>4>5 по отношению «предусмотрительность»; по любому из этих отношений 6 не сравнимо ни с одной из других позиций.

Пример. Как связано содержание Вашей работы с уровнем Вашего образования и квалификации? Мое образование и квалификация:

1. Выше, чем того требует выполняемая мной работа.
2. Примерно соответствуют выполняемой мной работе.
3. Ниже, чем того требует выполняемая мной работа.
4. Не связаны с выполняемой мной работой.
5. Затрудняюсь ответить.

По отношению «уровень образования и квалификации по отношению к выполняемой работе» 1>2>3; 4 и 5 не сравнимы между собой и с 1, 2, 3.

2. Число элементов симметрической разности, т.е. $n(A\Delta B)$, может служить количественной мерой различия между множествами.

Пример. Пусть в трех последовательно проведенных анкетных опросах задавался следующий вопрос с соответствующими вариантами ответов.

Опрос 1	Опрос 2	Опрос 3
Какие из перечисленных качеств наиболее важны для современного специалиста		
Ответственность	Ответственность	Компетентность
Коммуникабельность	Компетентность	Коммуникабельность
Мобильность	Коммуникабельность	Трудолюбие
Самостоятельность	Мобильность	Мобильность
	Исполнительность	Самостоятельность

Между какими двумя последовательными опросами различия в вариантах ответов больше?

Решение. Рассмотрим опрос 1 и обозначим множество ответов на него через A, множество ответов на опрос 2 – через B, а множество ответов на Опрос 3 – через C, получаем AΔB={самостоятельность, исполнительность, компетентность}, тогда n(AΔB)=3; AΔC={ответственность, трудолюбие, компетентность}, тогда n(AΔC)=3. Наконец BΔC={самостоятельность, исполнительность, ответственность, трудолюбие}, тогда n(BΔC)=4. Таким образом, между вторым и третьим последовательными опросами различия в вариантах ответов больше, а в обеих парах A, B и A, C множества отличаются друг от друга на 3 элемента

5. Бинарные отношения. Моделирование социальных процессов с помощью бинарных отношений

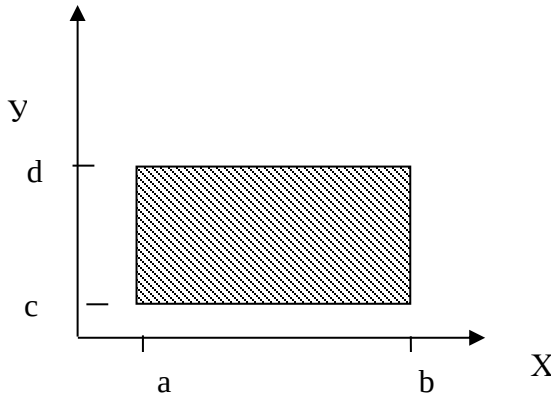
Пусть даны два множества A и B, которые могут как совпадать, так и нет.

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар элементов, первый из которых принадлежит множеству A, а второй – множеству B. Обозначается декартово произведение $A\times B$.

Например, пусть $A=\{a,b\}$, $B=\{a,c\}$, тогда $A\times B=\{(a,a), (a,c), (b,a), (b,c)\}$.

Упражнение. Обладает ли декартово произведение свойством коммутативности, т.е. выполняется ли равенство $A\times B = B\times A$?

Например, если множества A и B – числовые интервалы, то декартово произведение $A\times B$ представляет собой прямоугольник, сторонами которого являются множества A и B. Изобразим декартово произведение $[a,b]\times[c,d]$.



Если $A=B$, то допустимо писать $A\times A$, и в этом случае результатом произведения будет квадрат. Если R – множество действительных чисел, то $R\times R$ – множество точек плоскости.

Аналогично определяется декартово произведение большего числа множеств: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Отметим, что элементами нового множества являются всевозможные упорядоченные наборы элементов, содержащие ровно по одному представителю каждого из перемножаемых множеств. Такие наборы в общем случае принято называть ***кортежами*** и обозначать $(x_1,x_2, \ldots,x_n)$.

Примером, когда социолог встречается с подобным множеством, может служить анкетный опрос. Так если анкета содержит n закрытых вопросов и A_i ($i=1,2,...,n$) – множество предлагаемых ответов на поставленный вопрос, то декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ представляет собой множество вариантов заполнения анкеты. Число возможных вариантов заполнения анкеты находится так: пусть $n(A_1)=m_1$, $n(A_2)=m_2,\ldots$, $n(A_n)=m_n$, тогда

$$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$$

(эту формулу примем без доказательства).

В математике для обозначения какой-либо связи между переменными или понятиями часто пользуются термином «отношение». Бинарные отношения, т.е. отношения между двумя элементами какого-либо множества являются основным инструментом для моделирования и исследования социальных отношений.

Бинарным отношением на множестве A назовём некоторое подмножество R множества $A\times A$.

При этом будем говорить, что элемент a находится в бинарном отношении R с элементом b, если a и b принадлежат A и $(a,b)\in R$, и обозначается aRb.

Содержательный смысл этого формального определения состоит в том, что для задания бинарного отношения достаточно задать или знать список пар элементов, находящихся в данном отношении. На практике же социолог работает

с качественным определением отношения, и никто ему готового списка не даст. Множество, формально определяющее бинарное отношение, надо ещё построить. Для решения этой задачи необходимо сначала записать его на языке математики.

Пример. Пусть имеется некоторое подмножество натуральных чисел $A=\{1,2,4\}$ и пусть на нём задано отношение "быть делителем". Число ***x*** является делителем числа ***y***, если число ***y*** делится на ***x*** без остатка. Это качественное определение. Известно, что число x будет являться делителем числа y, если последнее представимо в виде: $y=n\cdot x$, где n – натуральное число. Это уже формализованное определение, которое позволяет построить множество, задающее отношение «быть делителем»: $R = \{(x,y): y = n\cdot x\} = \{(1,1); (1,2); (1,4); (2,2); (2,4); (4,4)\}$.

Для формализации социальных отношений, где элементами являются отдельные индивиды, надо иметь ещё некоторую дополнительную информацию или анкету об этих индивидах, которую можно записать в виде кортежа $x = (x_1, x_2,\ldots x_n)$. Рассмотрим несколько примеров бинарных отношений.

1. Отношение «быть младше». Индивид x младше индивида y, если он родился позже. Это качественное определение. Для того чтобы определить кто младше, достаточно знать дату рождения каждого, dx и dy, соответственно. Отметим, что у младшего дата рождения должна быть больше, тогда формализованное определение «быть младше» имеет следующий вид: $R=\{(x, y): dx>dy\}$.

2. Отношение «быть родственником». Родственные отношения – это связь между людьми, основанная на происхождении от общего предка. Однако такое определение оказывается слишком широким. Поэтому приходиться вводить понятие степени родства. В этом случае, для каждого индивида x и y кортеж представляет собой множество всех прародителей до k-ого колена включительно, т.е. $P_k(x)$, $P_k(y)$. Два индивида будут родственниками k-ой степени, если их соответствующие множества прародителей содержат хотя бы одного общего предка, т. е. $P_k(x) \cap P_k(y) \neq 0$.

Упражнение. Дайте формальное определение бинарного отношения «быть однокурсником».

Свойства бинарных отношений. Отношение эквивалентности.

Анализировать бинарные отношения можно через выявление тех свойств, которыми обладают или не обладают рассматриваемые отношения. Рассмотрим наиболее важные свойства.

1. Бинарное отношение R на множестве A будем называть ***рефлексивным***, если для всех элементов из этого множества имеет место xRx. Из рассмотренных примеров отношения «быть родственником», «быть делителем» являются рефлексивными. Отношение «быть старше» этим свойством не обладает.

2. Бинарное отношение R на множестве A будем называть ***симметричным***, если из xRy следует yRx.

Из рассмотренных примеров отношение «быть родственником» является симметричными. Отношения «быть делителем» и «быть старше» этим свойством не обладают.

3. Бинарное отношение R на множестве A будем называть ***транзитивным***, если из выполнения условий xRy и yRz следует, что xRz.

Транзитивными являются отношения «быть делителем» и «быть старше». Родственные отношения свойством транзитивности не обладают. Если отец и сын, и, соответственно, сын и мать (жена отца) находятся в близких родственных отношениях, то отсюда не следует, что муж и жена – близкие родственники.

Упражнение. Какими из вышеперечисленных свойств обладает бинарное отношение «быть одноклассником»?

Выявление свойств отношений, выполняющихся для любых множеств, позволяет классифицировать эти отношения и выделять целые классы отношений, обладающих общими свойствами. Такие классы образуют классы *эквивалентности*. Понятие эквивалентности, в том или ином виде, присутствует во всех без исключений научных дисциплинах и используется для выявления элементов, близких по своим характеристикам.

Бинарное отношение R на множестве A будем называть отношением ***эквивалентности*** (эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Для произвольного $y \in A$ множество всех x, эквивалентных y, называется ***классом эквивалентности***. Любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают, т.е. любая эквивалентность определяет разбиение множества A на непересекающиеся классы.

Если в качестве множества A возьмём множество респондентов, заполнивших анкету с закрытыми вопросами, то одинаковые ответы на некоторые из вопросов определят эквивалентность. Можно привести в пример такие отношения эквивалентности, как «состоять в одной партии», «иметь одинаковый пол» и т. п.

Рассмотрим несколько примеров:

1. Раньше, когда обработка анкет производилась вручную, часто приходилось их сортировать, складывая в отдельные пачки анкеты с одинаковыми ответами на некоторые из вопросов. Эта операция приводила к разбиению множества заполненных анкет на классы эквивалентности.

2. Пусть группа студентов из 30 человек сдала экзамен со следующими результатами:

«отлично» – 7;

«хорошо» – 12;

«удовлетворительно» – 6;

«неудовлетворительно» – 5.

Если ввести отношение «получить одинаковую оценку», то данное отношение будет эквивалентностью и группа студентов окажется разбитой на четыре класса: «отличники», «хорошисты», «троечники» и «двоечники».

Если возьмём отношение «родиться в одном году», то множество жителей города будет разбито на классы ровесников.

Эвристические задания

Целеполагание студента: Выберите из предложенных целей занятия две наиболее значимые для себя (или предложите свой вариант в пункте «другое») и обоснуйте их:

- Получить новые знания по математике, которые пригодятся в моей будущей профессии.
- Усвоить сложные математические понятия.
- Получить хорошую отметку по дисциплине.
- Научиться правильно задавать вопросы.
- Поприсутствовать на занятии, поскольку от этого зависит мая рейтинговая оценка.
- Убедиться в основательности собственных знаний, умений и навыков.
- Усовершенствовать собственную коммуникативную компетентность во время дискуссии с преподавателем и одногруппниками.
- Продемонстрировать преподавателю мой уровень знания математики.
- Продемонстрировать одногруппникам мой уровень знания математики.
- Другое:_____

Открытое задание: «РАЗНЫЕ ВЗГЛЯДЫ НА ОТНОШЕНИЯ…»

Бинарным отношением назовём некоторое подмножество R множества $A \times A$. При этом будем говорить, что элемент a находится в бинарном отношении R с элементом b, если a и b принадлежат A и (a,b) принадлежит R.

1. Проанализируйте: Являются ли бинарными следующие отношения: «быть одноклассником», «быть старше»?

2. Приведите от трёх до пяти примеров бинарных отношений, с которыми вы встречались в повседневной жизни. Каждый пример должен отражать определенную сферу вашей жизни: семья, друзья, учёба и т.д.

3. Состоите ли вы в каких-нибудь бинарных отношениях? В каких бинарных отношениях вы бы хотели состоять?

Открытое задание на обобщение темы занятия: «ФОРМУЛА ЛЮБВИ»

Изучив понятия «бинарное отношение на множестве» и «эквивалентность на множестве», выполните следующие задания и ответьте на вопросы:

1. Между членами семьи существуют отношения родства, которые можно выразить словами «быть мужем», «быть братом» и т. д. Множество M –

множество членов вашей семьи. Укажите всевозможные отношения на множестве *M*.

2. Бинарные отношения могут задаваться формулой. Формула

x+y=любовь

задает бинарное отношение на множестве людей. Этому отношению принадлежит любая пара людей, между которыми существует любовь. Придумайте свою формулу, задающую бинарное отношение.

3. В какой еще форме, на ваш взгляд, можно представить бинарное отношение? Какая форма представления бинарных отношений вам понравилась больше и почему?

Рефлексия студентов: Вернитесь к целеполаганию и ответьте на вопросы:

1. Перечислите трудности, с которыми вы столкнулись при изучении темы? Как вы преодолевали эти трудности?
2. Что вам удалось больше всего при изучении темы и почему?
3. Что и почему у вас не получилось?
4. Каков главный результат для вас лично при изучении темы?
5. Опишите свои эмоциональные впечатления на разных этапах занятия. Что труднее всего удалось в эмоциональном плане, а что – легче всего?
6. Удалось ли реализовать ваши цели, поставленные в начале занятия?

6. Примеры решения задач

1. Задайте множество способом перечисления его элементов:

а) Множество A – «множество дней недели».

б) Множество B – «множество основных арифметических действий».

Решение. а) Множество A = {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}.

Решение. б) Множество B = {сложение, вычитание, умножение, деление}.

2. Задайте множества из задачи **1**, указывая только характеристические свойства его элементов.

Решение. Указанные множества A и B можно задать следующим образом:

а) $A = \{a: a$ – день недели$\}$;

б) $B = \{в: в$ – арифметические действия$\}$.

3. Перечислите элементы множеств, заданных с помощью характеристического свойства:

а) Множество корней квадратного уравнения $X = \{ x: x^2 - 2 \cdot x - 15 = 0\}$.

б) Множество $X = \{ x$ – *натуральное число*: $-4 < x \leq 3\}\}$.

Решение. а) Множество $X = \{-3, 5\}$;

б) Множество $X = \{1, 2, 3\}$.

4. Перечислите элементы множества $A = \{a$ – натуральное число: $-5 < a \leq 5\}$ заданного с помощью характеристического свойства.

Решение. Имеем, множество $A = \{1, 2, 3,4,5\}$.

5. Выпишем все подмножества заданных конечных множеств.

а) Подмножествами двухэлементного множества $\{1, 3\}$ являются четыре множества: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$;

б) Подмножествами трехэлементного множества $\{0, 1, 4\}$ являются восемь множеств: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{4\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 4\}$, $\{1, 4\}$, $\{0, 1, 4\}$;

в) Подмножествами двухэлементного множества $\{\{0\}, 1\}$ являются четыре множества: $\varnothing$, $\{\{0\}\}$, $\{1\}$, $\{\{0\}, 1\}$.

6. Верны, ли следующие включения и вложения:

а) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

б) $\{2, 5\} \subset \{1, 2, 5, 7\}$.

*Решение***.** а) Нет, не верно, так как в множестве $A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$ нет элемента $\{1, 2\}$. Множество A содержит 4 элемента: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3\}$, 1 и 2!

б) да, верно, так как множество $\{2, 5\}$ – это подмножество множества $\{1, 2, 5, 7\}$.

7. Совпадают ли следующие множества: множество $A = \{\{0, 1\}, 2\}$ и множество $B = \{0, 1, 2\}$?

Решение. Нет, не совпадают, так как множество A состоит из двух элементов $\{0, 1\}$ и 2, а множество B – из трех элементов: 0, 1, 2.

8. Для каждых двух из следующих множеств указать, является ли одно из них подмножеством другого:

$A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{1,2,3\}$, $D = \{\{1\},2,3\}$, $E = \{3,2,1\}$, $F = \{\{1,2\},3\}$.

Решение. $A \subset B$, $A \subset C$, $A \subset E$; $B \subset C$, $B \subset E$; $C \subset E$.

9. Пусть заданы два множества A и B, где $A=\{3,4,5\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

Решение. $A \cup B=\{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B =\{3,4\}$, $A \setminus B =\{5\}$, $B \setminus A =\{1,2\}$, $A \Delta B =\{5,1,2\}$.

10. По заданным промежуткам A и B на числовой прямой определите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, где $A=(0,2]$, $B=(2,9)$.

Решение. $A \cup B =(0,9)$; $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B =(0,2]$, $B \setminus A=(2,9)$.

11. Пусть A – множество людей с гуманитарным образованием, B – множество людей с математическим образованием. Найдите $A \Delta B$.

Решение. Воспользуемся формулой $A \Delta B=(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Сначала найдём $A \setminus B$ – множество людей, имеющих только гуманитарное образование и не имеющих математического образования, затем $B \setminus A$ – множество людей, имеющих только математическое образование и не имеющих гуманитарного образования. Тогда $A \Delta B=(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – множество людей, имеющих только гуманитарное образование или только математическое образование.

12. Дано множество $A = \{1, 2, 3, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Укажите, какие из следующих выражений являются элементами заданного множества A, а какие его подмножествами: 2, $\{2\}$, $\{1, 2\}$,$\{1, 3\}$, $\{1, \{1\}\}$, $\{\{1\}\}$, $\{1, \{2\}\}$, $\{1, 2, \{1, 2\}\}$.

Решение. 2 – это элемент; {2} – подмножество; {1, 2} – это и элемент и подмножество; {1, 3} – подмножество; {1, {1}} – это подмножество; {{1}} – это тоже подмножество; {1, {2}} – это ни элемент, ни подмножество; {1, 2, {1, 2}} – подмножество.

13. Доказать, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

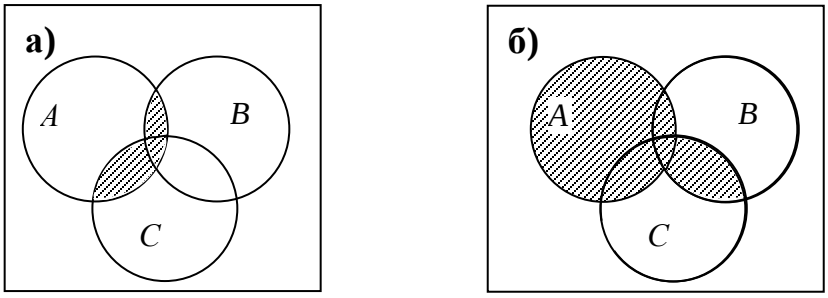
Решение. Множество $\{\varnothing\}$ имеет один элемент, а именно $\varnothing$, а множество $\varnothing$ не имеет элементов, следовательно, эти множества не равны, т.е. $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

14. Описать следующие множества: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, где A – «множество студентов-социологов – «отличников» группы», B – «множество студентов-социологов – «хорошистов» группы».

Решение. $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B$ – «множество «отличников» и «хорошистов» группы», $A \setminus B$ – «множество студентов-социологов «отличников» группы», $B \setminus A$ – «множество студентов-социологов «хорошистов» группы».

15. Заштриховать на кругах Эйлера-Венна ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству: **а)** $A \cap (B \cup C)$, **б) в)** $A \cup (B \cap C)$.

Решение.



16. Доказать равенство множеств.

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$

Доказательство. По определению равенства множеств $A \cup B$ и $A \cup (B \setminus A)$ надо доказать справедливость следующих двух включений

$$A \cup B \subset A \cup (B \setminus A) \text{ и } A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B.$$

а) Докажем первое включение $A \cup B \subset A \cup (B \setminus A)$. Пусть $x \in A \cup B$, тогда, по определению объединения множеств, $x \in A$ или $x \in B$.

Если $x \in A$, то по свойству объединения $x \in A \cup (B \setminus A)$.

Если $x \in B$, то тогда возможны два случая: $x \in A$ или $x \notin A$. Первый случай, т. е. $x \in A$, рассмотрен выше. Второй случай, т. е. $x \notin A$, по определению разности множеств означает, что $x \in B \setminus A$. Тогда по свойству объединения получим $x \in (B \setminus A) \cup A$, а по закону коммутативности операции объединения последнее соотношение означает, что $x \in A \cup (B \setminus A)$.

Таким образом, первое включение доказано.

б) Докажем второе включение $A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B$. Пусть $x \in A \cup (B \setminus A)$, тогда по определению объединения множеств $x \in A$ или $x \in B \setminus A$.

Если $x \in A$, то по свойству объединения $x \in A \cup B$.

Если $x \in B \setminus A$, то по свойству разности $x \in B$ и по свойству объединения получим $x \in B \cup A$. Тогда по закону коммутативности операции объединения последнее соотношение означает, что $x \in A \cup B$.

Таким образом, второе включение тоже доказано, что означает справедливость равенства $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

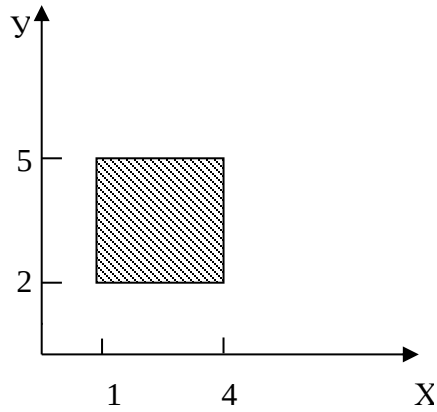
17. Пусть заданы два множества A={1,2}, B={3,4,5}, найти декартовы произведения $A \times B$, $A \times A$, $B \times A$.

Решение. $A \times B$={(1,3); (1,4); (1,5); (2,3); (2,4); (2,5)}; $A \times A$={(1,1); (1,2); (2,1); (2,2)}, $B \times A$={(3,1); (3,2); (4,1); (4,2); (5,1); (5,2)}.

18. Найдите $A \times B$, если A=[1,4], B=[2,5].

Решение. $A \times B$ ={(x,y): $x \in X$, $y \in Y$}. Это множество точек плоскости, которые лежат в прямоугольнике ABCD, где A(1,2); B(1,5); C(4,5); D(4,2).

19. Социолог исследует способности у 300 студентов. Оказалось, что 120 студентов преуспевают в математике, 90 – в музыке, 80 – в спорте. Кроме того, было обнаружено, что 40 студентов преуспевают как в математике, так и в



музыке, 30 – как в музыке, так и в спорте, 40 – как в математике, так и в спорте. И только 10 студентов преуспели сразу в трех областях. Сколько студентов вообще не преуспевает ни в одной области? Найдите количество студентов, которые преуспевают только в одной из областей?

Решение. Введем следующие обозначения: пусть A – «множество учащихся, преуспевающих в математике», B – «множество учащихся, преуспевающих в музыке», C – «множество учащихся, преуспевающих в спорте» и $\boldsymbol{U}$ – «множество всех студентов». По условию задачи $n(\boldsymbol{U})$=300, $n(A)$=120, $n(B)$=90, $n(C)$=80, $n(A \cap B)$=40, $n(A \cap C)$=40, $n(B \cap C)$=30, $n(A \cap B \cap C)$=10. По предыдущей формуле для числа элементов найдем количество студентов, преуспевающих хотя бы в одной из описанных областей $n(A \cup B \cup C)$:

$$n(A \cup B \cup C) = 120+90+80–40–40–30+10=190.$$

Таким образом, количество студентов, которые вообще не преуспевает ни в одной области, равно: $n(\boldsymbol{U} \setminus (A \cup B \cup C))$= 300–190=110.

Посчитаем количество студентов, преуспевающих только в математике:

$$n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 120 - 40 - 40 + 10 = 50.$$

Посчитаем количество студентов, преуспевающих только в музыке:

$$n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 90 - 40 - 30 + 10 = 30.$$

Посчитаем количество студентов, преуспевающих только в спорте:

$$n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 80 - 40 - 30 + 10 = 20.$$

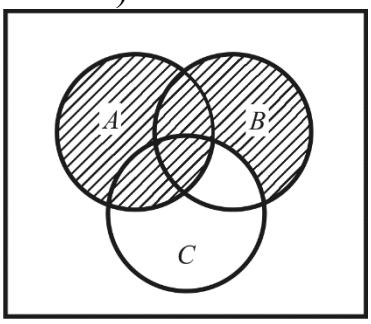
Таким образом, количество студентов, которые преуспевают только в одной из областей, 50+30+20=100.

20. Пусть A – множество иностранных студентов факультета философии и социальных наук, B – множество студентов первого курса факультета философии и социальных наук, U – множество всех студентов факультета философии и социальных наук. Описать словами множества: $\overline{A} \cup B$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \setminus B$, $B \setminus \overline{A}$.

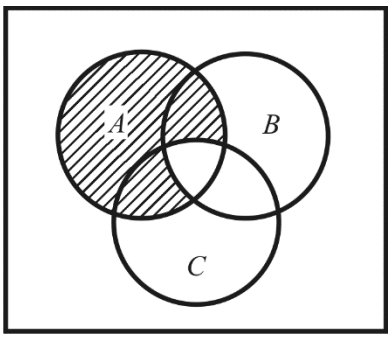
Решение. Дадим описания заданных множеств: $\overline{A} = U \setminus A$ – множество студентов факультета философии и социальных наук, которые являются гражданами Республики Беларусь, тогда $\overline{A} \cup B$ – множество, которое состоит из студентов факультета философии и социальных наук, являющихся гражданами Республики Беларусь, и иностранных студентов первого курса факультета философии и социальных наук; $\overline{A} \cap B$ – множество студентов первого курса факультета философии и социальных наук, являющихся гражданами Республики Беларусь; $\overline{A} \setminus B$ – множество студентов факультета философии и социальных наук, являющихся гражданами Республики Беларусь, кроме студентов первого курса факультета философии и социальных наук; $B \setminus \overline{A} = B \cap A$ – множество иностранных студентов первого курса факультета философии и социальных наук.

21. Изобразить множества: а) $A \cup (B \cap \overline{C})$; б) $A \setminus (B \cap C)$; в) $\overline{A} \cap (B \setminus \overline{C})$.

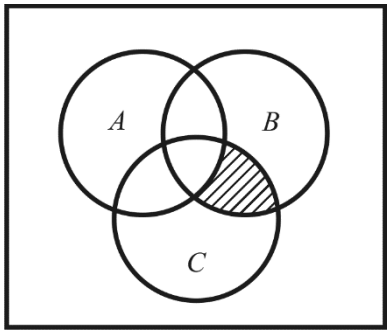
а) Множеству $A \cup (B \cap \overline{C})$ соответствует заштрихованная часть (множество U представлено в виде прямоугольника).



б) Множеству $A \setminus (B \cap C)$ соответствует заштрихованная часть (множество U представлено в виде прямоугольника).



в) Множеству $\overline{A} \cap (B \setminus \overline{C})$ соответствует заштрихованная часть на рис. 9.5 (множество U представлено в виде прямоугольника).



22. Доказать равенство множеств

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

Доказательство. По определению равенства множеств $A \cap B$ и $A \setminus (A \setminus B)$ надо доказать справедливость следующих двух включений:

$$A \cap B \subset A \setminus (A \setminus B) \quad \text{и} \quad A \setminus (A \setminus B) \subset A \cap B.$$

а) Докажем первое включение $A \cap B \subset A \setminus (A \setminus B)$.

Пусть $x \in A \cap B$, тогда по определению пересечения множеств $x \in A$ и $x \in B$.

Заметим, что по свойству объединения множеств $B \subset \overline{A} \cup B$, т. е. если $x \in B$, то и $x \in \overline{A} \cup B$. Далее, так как множество B равно дополнению от дополнения множества B, т. е. $B = \overline{\overline{B}}$, то $\overline{A} \cup B = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}}$, а последнее, по свойству дополнения от пересечения множеств, равно $\overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A \cap \overline{B}}$. Поэтому, если $x \in \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A \cap \overline{B}}$, то по определению дополнения отсюда следует, что $x \notin A \cap \overline{B}$. Теперь можно воспользоваться выражением разности множеств A и B через пересечение множеств A и $\overline{B}$, а именно, равенством $A \cap \overline{B} = A \setminus B$. Поэтому из $x \notin A \cap \overline{B}$ следует, что $x \notin A \setminus B$.

Следовательно, из начального предположения $x \in A$ и $x \in B$ мы окончательно получим, что $x \in A$ и $x \notin A \setminus B$, а по определению разности множеств A и $A \setminus B$ это означает, что $x \in A \setminus (A \setminus B)$.

Таким образом, первое включение доказано.

б) Докажем второе включение $A \setminus (A \setminus B) \subset A \cap B$.

Пусть $x \in A \setminus (A \setminus B)$, тогда по определению разности для множеств A и $A \setminus B$ имеем, что $x \in A$ и $x \notin A \setminus B$.

Заметим, что разность множеств A и B можно представить в виде пересечения множеств A и $\overline{B}$, а именно, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Поэтому из $x \notin A \setminus B$ следует, что $x \notin A \cap \overline{B}$, а по определению дополнения это означает, что $x \in \overline{A \cap \overline{B}}$. По свойству дополнения от пересечения множеств $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}}$, а так как $\overline{\overline{B}} = B$, то $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup B$. Таким образом, если $x \notin A \setminus B$, то $x \in \overline{A \cap \overline{B}}$ и, в силу последнего равенства, $x \in \overline{A}$ или $x \in B$, другими словами, по определению дополнения, $x \notin A$ или $x \in B$.

Следовательно, из начального предположения что $x \in A$ и $x \notin A \setminus B$ мы окончательно получили, что $x \in A$ и одновременно $x \notin A$ или $x \in B$. Отсюда вытекает, во-первых, $x \in A$ и $x \notin A$, что влечет за собой $x \in \varnothing$, а, во-вторых, $x \in A$ и $x \in B$, что по определению пересечения означает $x \in A \cap B$.

Таким образом, второе включение тоже доказано, что означает справедливость равенства $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

7. Задачи для самостоятельного решения

1. Задайте множество X – «множество корней квадратного уравнения $x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0$» способом перечисления его элементов.

2. Задайте множество X – «множество корней квадратного уравнения $x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0$» с помощью указания характеристических свойств его элементов.

3. Составьте список элементов множества, заданного с помощью характеристического свойства элементов:

а) *Множество* $X = \{x$ *– натуральное число:* $x < 7\}$;

б) *Множество* $X = \{x$ *– натуральное число:* $|x| < 4\}$.

4. Проверьте, совпадают ли множества $A = \{\{1, 3\}, 2\}$ *и* $B = \{1, 2, 3\}$.

5. Выясните справедливо ли включение: $\{1, 2\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

6. Пусть A – множество студентов факультета философии и социальных наук, прогуливающих занятия по высшей математике, а B – множество студентов факультета философии и социальных наук, надеющихся сдать экзамен по высшей математике. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

7. Даны множества $A=\{1,2,4,8,10\}$, $B=\{2,3,8,12\}$. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

8. Даны множества $A=\{0,3,4,5,15\}$, $B=\{1,3,8,10\}$, $C=\{1,2,4,8,10,15\}$. Найдите максимальный элемент множества $(A \setminus B) \cup (B \cap C)$.

9. По заданным промежуткам A=(-2;2] и B=[0;5) на числовой прямой определите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

10. Существуют ли такие множества A, B, C, что $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

11. Опишите следующие множества: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$:

а) A – «множество студентов-социологов – отличников группы» и B – «множество студентов ФФСН»;

б) A – «множество успевающих студентов-социологов» и B – «множество юношей-социологов»;

в) A – «множество отличников–заочников-социологов» и B – «множество девушек–заочниц-социологов».

12. Даны следующие числовые множества: $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 5, 6, 11, 12\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 9, 12\}$. Найдите множества, которые будут получены в результате выполнения следующих операций:

а) $(C \setminus B) \cap A$; **б)** $B \setminus (A \cap C)$; **в)** $(C \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

13. Докажите равенство $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

14. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества $A \cap \overline{B}$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

15. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества:

а) $(A \cup B) \setminus C$.

б) $(A \setminus C) \cup (C \setminus B)$.

в) $(A \setminus B) \cap (C \setminus B)$.

г) $B \cap \overline{A}$.

д) $A \setminus (B \cap \overline{C})$.

е) $A \setminus \overline{(B \cup C)}$.

16. Если $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, то могут ли выполняться следующие равенства $A \cup B = \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$?

17. Выпишите все подмножества множества: A={1,{2,{3}}}.

18. Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует множеству: $C \setminus (B \setminus \overline{A})$, где A, B и C три произвольных пересекающихся множества.

19. На курсах иностранных языков учатся 600 человек, из них французский изучают 220 человек, английский – 270 человек, причем те, кто изучают английский, не изучают немецкий язык; только французский изучают 100 человек, только немецкий – 180 человек. Сколько человек изучают по два иностранных языка? Сколько человек изучает один иностранный язык?

20. Среди студентов первого курса проводилось анкетирование по любимым телесериалам. Самыми популярными оказались три сериала: «Звёздный путь», «Игра престолов», «Друзья». Всего в группе 38 человек. «Звёздный путь» выбрали 21 студент, среди которых трое назвали еще «Игра престолов», 6 – «Друзей», а один написал все три сериала. Сериал «Игра престолов» назвали 13

студентов, среди которых пятеро выбрали сразу два сериала. Сколько человек выбрали сериал «Друзья»?

21. Многие студенты любят футбол, баскетбол и волейбол. А некоторые - даже два или три из этих видов спорта. Была опрошена группа студентов. Известно, что 6 студентов играют только в волейбол, 2 – только в футбол, 5 – только в баскетбол. Только в волейбол и футбол умеют играть 3 студента, в футбол и баскетбол – 4, в волейбол и баскетбол – 2. Один студент умеет играть во все игры, 7 не умеют играть ни в одну игру. Найдите:

a) сколько всего было опрошено студентов;

b) сколько человек умеют играть в футбол;

c) сколько человек умеют играть в волейбол.

22. Каждый из 35 шестиклассников является читателем, по крайней мере, одной из двух библиотек: школьной и районной. Из них 25 человек берут книги в школьной библиотеке, 20 – в районной. Сколько шестиклассников:

a) являются читателями обеих библиотек;

b) не являются читателями районной библиотеки;

c) не являются читателями школьной библиотеки;

d) являются читателями только районной библиотеки;

e) являются читателями только школьной библиотеки?

23. В группе 30 человек. 20 из них каждый день пользуются метро, 15 – автобусом, 23 – троллейбусом, 10 – и метро, и троллейбусом, 12 – и метро, и автобусом, 9 – и троллейбусом, и автобусом. Сколько человек ежедневно пользуется всеми тремя видами транспорта?

24. В НИИ работает 67 человек. Из них 20 человек французский язык, 47 – английский язык, 35 человек – немецкий, 23 – немецкий и английский, 12 человек – английский и французский, 11 – немецкий и французский, а все три языка знают 5 человек. Сколько человек не знают ни английского, ни немецкого, ни французского?

25. Из 100 студентов изучают только немецкий 18 человек, немецкий и французский – 8 человек, немецкий – 26, французский – 48, французский и испанский – 8, все три языка – 5, никакого языка не изучают 24 человека. Сколько студентов изучают:

a) только испанский язык;

b) немецкий и испанский, но не французский;

c) французский, в том и только том случае, если они не изучают испанский;

d) испанский язык?

26. Определите, можно ли установить отношение порядка на множестве ответов на вопросы социологической анкеты: *Когда Вы или члены Вашей семьи нуждаетесь в лечении, то куда Вы обычно обращаетесь?*

1. Только в государственные медицинские учреждения.
2. Только в частные медицинские учреждения.

3. И в государственные, и в частные, в зависимости от того, какое лечение требуется.

4. Не обращаюсь в медицинские учреждения.

5. Затрудняюсь ответить.

27. Пусть в трех последовательно проведенных анкетных опросах задавался следующий вопрос с соответствующими вариантами ответов.

Опрос 1	Опрос 2	Опрос 3
Кого из перечисленных ниже телеведущих Вы знаете?		
Андрей Малахов	Андрей Малахов	Гарик Мартерасян
Дана Борисова	Гарик Мартерасян	Дана Борисова
Ксения Собчак	Дана Борисова	Максим Галкин
Иван Ургант	Ксения Собчак	Ксения Собчак
	А. В. Масляков – старший	Иван Ургант

Между какими двумя последовательными опросами различия в вариантах ответов больше?

28. Пусть заданы два множества $A=\{1,2,3\}$, $B=\{5,9\}$.Найдите декартовы произведения $A\times B$, $A\times A$, $B\times A$.

29. Найдите $A\times B$, если $A=[-2,3]$, $B=[1,4]$.

30. Докажите, что отношение «быть ровесником» является отношением эквивалентности.

8. Вопросы для самоконтроля

1. Что такое множество? Приведите примеры множеств. Назовите способы задания множества.

2. Какие множества называются конечными, бесконечными? Приведите соответствующие примеры.

3. Как определяется пустое множество? Является ли пустое множество конечным?

4. Какое множество называется одноточечным? Чем одноточечное множество отличается от элемента множества?

5. Дайте определение подмножества множества A. Какие два множества называются равными?

6. Назовите известные вам числовые множества.

7. Что такое объединение двух множеств? Приведите пример. Изобразите объединение двух множеств на диаграммах Эйлера-Венна. Перечислите свойства операции объединения.

8. Что такое пересечение двух множеств? Приведите пример. Изобразите пересечение двух множеств на диаграммах Эйлера-Венна. Перечислите свойства операции пересечения.

9. Что такое разность двух множеств? Приведите пример. Изобразите разность двух множеств на диаграммах Эйлера-Венна. Перечислите свойства операции разности.

10. Что такое симметрическая разность двух множеств? Запишите две формулы для нахождения симметрической разности. Как используется симметрическая разность в социологических исследованиях?

11. Что такое декартово произведение двух множеств? Дайте определение кортежа. Приведите примеры использования социологами кортежей.

12. Какие отношения называются бинарными? Приведите примеры бинарных отношений.

13. Перечислите свойства бинарных отношений.

14. Дайте определение отношения эквивалентности. Приведите примеры использования отношения эквивалентности в социологических исследованиях.

9. Контроль знаний

Примерная контрольная работа.

1. Пусть даны множества A={1,6,8}, B={3,4,5,6}. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \Delta B$.

2. Являются ли множества {1,2,5}, {{1,2},{2,5}} одинаковыми? Почему?

3. Докажите $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

4. Социолог исследует способности у 300 студентов. Оказалось, что 100 студентов преуспевают в математике, 120 – в музыке, 110 – в спорте. Кроме того, было обнаружено, что 30 студентов преуспевают как в математике, так и в музыке, 30 – как в музыке, так и в спорте, 40 – как в математике, так и в спорте. И только 10 студентов преуспели сразу в трех областях. Сколько студентов преуспевает в двух областях? Сколько студентов преуспевает в одной области?

5. Пусть A – «множество букв вашей фамилии», а B – «множество букв вашего имени». Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ и $A \Delta B$.

6. Дано множество A={1, 7, 3, {1}, {1,4}}. Укажите, какие из следующих объектов являются элементами множества A, а какие подмножествами: 1, 7, {7}, {1,7}, {1,3}, {7,{3}}, {{1}}, {1,4}, {3,7,{1,4}}

7. Выписать все подмножества множества: A={–1, ∅, {1}}.

8. Заштриховать ту часть диаграммы, которая соответствует множеству: $B \cap (A \cup C)$, $A \setminus (B \setminus C)$.

Примерные тестовые задания

1. Основоположником теории множеств является немецкий математик

a) Георг Кантор;

b) Исаак Ньютон;

c) Рене Декарт.

2. Каждый элемент множества содержится в нем

a) один раз;

b) два раза;

c) бесконечное количество раз.

3. Для обозначения множеств используются

a) строчные буквы латинского алфавита, например, a, в, c, ...;

b) прописные буквы русского алфавита А, Б, В, …;

c) прописные буквы латинского алфавита A, B, C,…,;

d) строчные буквы русского алфавита, например, а, б, в, ...

4. Для обозначения элементов множества используются

a) прописные буквы латинского алфавита A, B, C,…;

b) строчные буквы латинского алфавита, например, a, в, c, ...;

c) прописные буквы русского алфавита А, Б, В, …;

d) строчные буквы русского алфавита, например, а, б, в, ...

5. Что имеет значение в диаграммах Эйлера-Венна

a) относительный размер кругов;

b) взаимное расположение кругов;

c) относительный размер и взаимное расположение кругов.

6. Что не имеет значение в диаграммах Эйлера-Венна

a) относительный размер кругов;

b) взаимное расположение кругов;

c) относительный размер и взаимное расположение кругов.

7. Из представленных ниже совокупностей укажите те, которые являются множествами:

a) Изданные книги;

b) Великие русские писатели;

c) Студенты-отличники;

d) Числа от 1 до 5.

8. Из представленных ниже совокупностей укажите те, которые не являются множествами:

a) Дни с хорошей погодой в году;

b) Студенты-отличники;

c) Недорогие автомобили;

d) Точки на прямой;

e) Числа от 10 до 15.

9. Укажите верные утверждения: Пустое множество

a) Одно;

b) Конечное;

c) Универсальное;

d) Бесконечное;

e) Неопределенное;

f) Является подмножеством любого множества.

10. Дано множество A = {1, 7, 3, {1}, {1,4}}. Укажите, какие из следующих объектов являются элементами множества A:

a) 1;
b) {7};
c) {1,7};
d) {1,3};
e) {7,{3}};
f) {{1}};
g) {1,{4}};
h) {3,7,{1,4}}.

11. Дано множество A = {1, 7, 3, {1}, {1,4}}. Укажите, какие из следующих объектов являются подмножествами множества:

a) 1;
b) {7};
c) {1,7};
d) {1,3};
e) {7,{3}};
f) {{1}};
g) {1,{4}};
h) {3,7,{1,4}}.

12. Множества состоят из

a) Элементов;
b) Списков;
c) Чисел;
d) Точек;
e) Социальных объектов.

13. Пусть даны множества A={4,6,8}, B={3,4, 6,9}. Найти $A \cap B$.

a) {4, 6, 8, 9};
b) {4, 6};
c) {3, 4, 6, 8, 9};
d) {8};
e) {3, 9};
f) {3, 8, 9}.

14. Пусть даны множества A={4,6,8}, B={3,4, 6,9}. Найти $A \cup B$.

a) {4, 6, 8, 9};
b) {4, 6};
c) {3, 4, 6, 8, 9};
d) {8};
e) {3, 9};
f) {3, 8, 9}.

15. Пусть даны множества A={4,6,8}, B={3,4, 6,9}. Найти $A \setminus B$.

a) {4, 6, 8, 9};

b) {4, 6};
c) {3, 4, 6, 8, 9};
d) {8};
e) {3, 9};
f) {3, 8, 9}.

16. Пусть даны множества A={4,6,8}, B={3,4, 6,9}. Найти B \ A.

a) {4, 6, 8, 9};
b) {4, 6};
c) {3, 4, 6, 8, 9};
d) {8};
e) {3, 9};
f) {3, 8, 9}.

17. Пусть даны множества A={4,6,8}, B={3,4, 6,9}. Найти A Δ B.

a) {4, 6, 8, 9};
b) {4, 6};
c) {3, 4, 6, 8, 9};
d) {8};
e) {3, 9};
f) {3, 8, 9}.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

A a	А	*J j*	йот (жи)	*S s*	Эс
B b	Бэ	*K k*	Ка	*T t*	Тэ
C c	Цэ	*L l*	Эль	*U u*	У
D d	Дэ	*M m*	Эм	*V v*	Вэ
E e	Э	*N n*	Эн	*W w*	дубль-вэ
F f	эф	*O o*	О	*X x*	Икс
G g	же	*P p*	Пэ	*Y y*	Игрек
H h	аш	*Q q*	Ку	*Z z*	Зэт
I i	и	*R r*	Эр		

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Α α	альфа	Ι ι	йота	Ρ ρ	ро
Β β	бета	Κ κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	Мю	Υ υ	ипсилон
Ε ε	эпсилон	Ν ν	Ню	Φ φ	фи
Ζ ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Χ χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ	тэта	Π π	Пи	Ω ω	омега

ЛИТЕРАТУРА

1 Ахтямов, А.М. Математика для социологов и экономистов: учеб.пособие / А.М. Ахтямов. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.

2 Велько, О.А. Методические подходы к преподаванию математики студентам-социологам // Математика и информатика в естественнонаучном и гуманитарном образовании. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. –С. 58–61.

3 Велько, О.А. Основы высшей математики для социологов: Учебно-методическое пособие / О.А. Велько, М.В. Мартон, Н.А. Моисеева. – Минск: БГУ, 2020. – 303 с.

4 Велько, О.А. Основы высшей математики и теории вероятностей: Учебно-методическое пособие / О.А. Велько, М.В. Мартон, Н.А. Моисеева. – Минск: БГУ, 2022. – 399 с.

5 Велько, О. А. Основы высшей математики и теории вероятностей: учебная программа УВО по учебной дисциплине по специальности 1-23 01 15 Социальные коммуникации [Электронный ресурс] / О.А. Велько // Белорусский государственный университет. – Минск, 2021. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/269619. – Дата доступа: 2.07.2021.

6 Велько, О.А. Основы высшей математики. Учебная программа УВО для специальности 1-23 01 05 Социология [Электронный ресурс] / О.А. Велько, Н.А. Моисеева // Белорусский государственный университет. – Минск, 2019. – Режим доступа:http://elib.bsu.by/handle/123456789/233274. – Дата доступа: 12.07.2019.

7 Велько, О. А. Основы высшей математики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-23 01 05 «Социология» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск: БГУ, 2020. – 257 с.: ил. – Библиогр.: с. 255–257. [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/241078. Дата доступа: 06.03.2020.

8 Еровенко, В. А. Основы высшей математики: типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В. А. Еровенко, М.В. Мартон, О.А. Велько // Типовая учебная программа располагается в коллекциях: Кафедра общей математики и информатики. [Электронный ресурс]. – 2019. – Режим доступа: –http://elib.bsu.by/handle/123456789/218164.

9 Еровенко, В.А. Избранные главы курса «Основы высшей математики» для философов: Методическое пособие для студентов-заочников / В.А. Еровенко, М.В. Мартон. – Минск: БГУ, 2009. – 68 с.

10 Еровенко, В.А. Основы высшей математики: типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В.А. Еровенко, С.Н. Сиренко, О.А. Велько // Основы высшей математики. Основы информационных технологий: типовые учебные программы для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В.А. Еровенко [и др.]; под ред. В.А. Еровенко. – Минск: БГУ, 2009. – С. 5–14.

11 Еровенко, В.А. Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры: курс лекций / В.А. Еровенко. – Минск: БГУ, 2006. – 175 с.

12 Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч2. – М.: Высшая школа, 1982.

13 Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Физматлит, 2001. – 256 с.

14 Леонов, Н.Н. Математическая социология: структурно-аппроксимационный подход / Н.Н. Леонов. – Минск, «ООО ФУАинформ», 2002. – 220 с.

15 Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / К.Н. Лунгу и [и др.]. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 576с.

16 Малыхин В.И. Математика в экономике. – М.: Инфра-М, 2001.

17 Мацкевич, И.П. Математические методы в психологии / И.П. Мацкевич, О.А. Велько, Е.В. Воронкова, С.Л. Гуринович. – 3-е изд. – Минск: МИУ, 2009. – 188 с.

18 Моисеева, Н. А. Основы высшей математики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-23 01 15 «Социальные коммуникации» / Н. А. Моисеева, О. А. Велько; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск: БГУ, 2020. – 193 с.: ил. – Библиогр.: с. 191–193. [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/241081. Дата доступа: 06.03.2020.

19 Моисеева, Н. А. Основы высшей математики и теории вероятностей : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-23 01 15 «Социальные коммуникации» [Электронный ресурс] / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2021. – 239 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 238–239. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/274772: 26.01.2022.

20 Путькина, Л. В. Информатика и математика для гуманитарных вузов : учеб.пособие / Л. В. Путькина, Т. Г. Пискунова, Т. Б. Антипова. – Санкт-Петербург : СПбГУП, 2014. – 236 с. : ил.

21 Суходольский, Г.В. Лекции по высшей математике для гуманитариев: учеб. пособие / Г.В. Суходольский. – Харьков: Изд-во Гуманитарный Центр, 2001. – 248 с.