Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики и информатики

М. В. Мартон, О. А. Велько, Н. А. Моисеева

Элементы теории вероятностей в социологических исследованиях: элементы комбинаторики

Учебно-методическое пособие

Минск
БГУ
2023

УДК 316:51(075.8)
М 293

Решение о депонировании вынес:
Совет механико-математического факультета
Протокол №6 от 28 февраля 2023 года

Авторы:
Мартон Марина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент;
Велько Оксана Александровна, старший преподаватель;
Моисеева Наталья Александровна, старший преподаватель.

Рецензенты:

Барвенов С.А., доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Механико-математического факультета БГУ, кандидат физико-математических наук, доцент;

Гулина О.В., заместитель декана факультета экономики и менеджмента учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

Мартон, М. В. Элементы теории вероятностей в социологических исследованиях: элементы комбинаторики : учебно-методическое пособие / М. В. Мартон, О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 46 с. : ил. – Библиогр.: с. 45–46.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов факультета философии и социальных наук БГУ специальностей «Социология», «Социальные коммуникации». Каждая тема содержит исторические сведения, теоретический материал, примеры решения, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. Многие математические понятия иллюстрируются примерами из социологии и экономики.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня мы не можем отрицать наличие междисциплинарных связей между социологией и математикой. И в последние годы эта связь становится все более тесной и многоплановой. Изучение математики будущими социологами и специалистами по социальным коммуникациям, а также применение ими современных математических методов анализа социальной реальности способствует более успешному формированию у студентов профессиональной компетентности, умению задействовать межпредметные связи, осуществлению преемственности в изучении математических понятий, развитию критического и прогностического мышления.

Математические методы уже давно и с успехом применяются в социальных науках. Процесс математизации науки необратим, он захватывает такие области знаний, в которых совсем недавно исключалась возможность использования математических методов исследования и измерений. Сегодня развитие теории и успешность практических приложений любой науки в значительной степени предопределяются мерой математизации данной области знаний. Математика занимает важное место в общественной жизни, культуре, науке и является одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса и информатизации современного общества. Изучение математики развивает познавательные способности и логическое мышление, а также влияет на изучение других дисциплин. Математические методы позволяют также систематизировать и классифицировать результаты исследований, определять сходство и различие между процессами взаимодействия в различных природных условиях, вероятностную зависимость между явлениями, выделять ведущие факторы, действующие на развитие процесса, создавать математические модели процессов или явлений в социологии.

Данное учебное пособие написано на основе опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математическим дисциплинам в течение ряда лет на факультете философии и социальных наук Белорусского государственного университета. В пособии большое внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал, причем многие изучаемые математические понятия иллюстрируются приложениями из социологии. Некоторые задачи, рассмотренные в пособии и предложенные для самостоятельного решения, подобраны так, чтобы показать возможность применения математических знаний в сфере будущей профессиональной деятельности студентов. Еще одна особенность настоящего пособия в том, что авторы сочли полезным дать историческую справку, где кратко сообщается история развития изучаемых понятий, обсуждается их значимость в науке. Это кажется важным и актуальным, поскольку дает студенту представление о математике как области культуры человечества, знакомит с именами и историческими событиями, которые сопутствовали становлению математики.

Традиционно считают, что использование математики в социальных науках выражается в получении только количественных характеристик. Такое понимание крайне упрощено, поскольку количественные определенности всегда связаны с качественными. Конкретные социологические исследования могут успешно развиваться и будут иметь практическое и теоретическое значение только в том случае, если они используют математические методы при анализе различных механизмов социальных процессов, а также при сборе и обработке первичной социальной информации.

Рассмотрены конкретные задачи на применение элементов комбинаторики в социологических исследованиях, а именно использование комбинаторных методов для обработки и анализа социологических данных. Одной из инновационных технологий является оргдеятельностная технология, основанная на организации эвристической (обучение через открытия), диалоговой, продуктивной деятельности каждого обучающегося. Подобная деятельность приводит к созданию участником собственных образовательных продуктов, как внешних (самостоятельное составление примеров и задач по выбранной теме, составление кроссвордов, подготовка наглядных пособий, мультимедийных презентаций по изучаемым темам курса), так и внутренних, включая развитие коммуникативных, эвристических качеств его личности, обеспечивает самореализацию, а потому мотивацию к учебной деятельности.

Эвристический метод применяется для активизации творческой деятельности обучающихся через систему творческих заданий. Этот метод способствует лучшему пониманию и закреплению в памяти тех материалов, с которыми обучающийся ознакомился в процессе выполнения задания по дисциплине.

Авторы разработали эвристические задания открытого типа на очно-дистанционной программе повышения квалификации «Технологии эвристического обучения в высшей школе «Методика обучения через открытие: Как обучать всех по-разному, но одинаково» БГУ. Автор и ведущий программы повышения квалификации: Король А.Д., ректор БГУ, доктор педагогических наук, профессор.

1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Прежде, чем любая область знаний сформируется в особую науку, она проходит длительный период накопления эмпирического материала, период развития в недрах другой, более общей науки, и затем выделяется в самостоятельную науку. Не является исключением и наука про общие законы комбинирования и образования различных конфигураций объектов, получившая название «комбинаторика». Еще в доисторическую эпоху люди столкнулись с проблемой выбора тех или иных объектов, расположения их в определенном порядке, нахождения среди различных расположений подходящих. Например, во время охоты необходимо было выбрать наилучшее расположение охотников, во время битвы – расположение воинов. Нельзя точно сказать, когда наряду с состязаниями в беге, метании диска, прыжках, появились игры, требовавшие умения рассчитывать, составлять планы и нарушать планы противника.

Комбинаторные мотивы можно заметить в символике китайской «Книги Перемен» (V век до н. э.). По мнению её авторов, всё в мире комбинируется из различных сочетаний мужского и женского начал, а также восьми стихий: земля, горы, вода, ветер, гроза, огонь, облака и небо. Историки отмечают также комбинаторные проблемы в руководствах, посвященных Го и другим играм. Большой интерес математиков многих стран с древних времён неизменно вызывали магические квадраты. Комбинаторные задачи, касавшиеся перечисления небольших групп предметов, решали греки. Аристотель описал без пропусков все виды правильных трехчленных силлогизмов, а его ученик Арисксен из Тарента перечислил различные комбинации длинных и коротких слогов в стихотворных размерах. Живший в IV в. н.э. математик Папп рассматривал число пар и троек, которые можно получить из трех элементов, допуская их повторения. Интерес к сочетаниям проявлялся и в Индии. В VII веке индийский математик Бхаскара в книге «Лилавати», изучая проблемы комбинаторики, писал о применении перестановок к подсчету вариаций размера в стихосложении, различных расположений в архитектуре и т. п. В его работе мы можем найти правила для отыскания числа перестановок и сочетаний нескольких предметов. При этом им также рассматривается и случай, когда в перестановках есть повторяющиеся элементы. В Западной Европе ряд глубоких открытий в области комбинаторики сделали два еврейских исследователя, Авраам ибн Эзра (XII в.) и Леви бен Гершом (он же Герсонид, XIV в.). Ибн Эзра подсчитывал число размещений с перестановками в огласовках имени Бога и обнаружил симметричность биномиальных коэффициентов, а Герсонид дал явные формулы для их подсчёта и применения в задачах вычисления числа размещений и сочетаний. Несколько комбинаторных задач содержит «Книга абака» (Фибоначчи, XIII в.). Например, он поставил задачу найти наименьшее число гирь, достаточное для взвешивания любого товара весом от 1 до 40 фунтов.

Наибольшее распространение получила игра в кости: два или три кубика с нанесенными на них очками бросали на стол, и ставку брал тот, у кого выпала большая сумма очков. Несмотря на грозные запреты церкви, азартные игры все же развивались. Позже некоторые игроки, которые наиболее часто играли в кости, подметили, что одни суммы очков выпадают часто, а другие – редко. Были составлены таблицы, показывавшие, сколькими способами можно получить то или иное число очков. Сначала допускалась ошибка – подсчитывали только число различных сочетаний, дававших данную сумму. Этими вопросами занимались такие известные итальянские математики XVI в., как Д. Кардано, Н. Тарталья и др. Наиболее полно исследовал данный вопрос в XVII в. Г. Галилей, но его рукопись оставалась неопубликованной до 1718 г. В 1713 г. была опубликована книга «Искусство предположений» Я. Бернулли, в которой указывались формулы для числа размещений из n элементов по k, выводились выражения для степенных сумм и т. д.

Работы Б. Паскаля и П. Ферма ознаменовали рождение двух новых ветвей математической науки – комбинаторики и теории вероятностей. Ранее комбинаторные проблемы лишь затрагивались в общих трудах по астрологии, логике и математике или большей частью относились к области математических развлечений. В 1666 году Г.В. Лейбниц публикует «Диссертацию о комбинаторном искусстве», в которой впервые появляется термин «комбинаторный». Этот математический труд Г.В. Лейбница должен был стать лишь началом большой работы, о которой он часто упоминал в своих письмах и печатных трудах. Г.В. Лейбниц планировал для комбинаторики многочисленные приложения: к играм, статистике, к кодированию и декодированию, к теории наблюдений. Он считал, что комбинаторика должна заниматься «одинаковым и различным, похожим и непохожим, абсолютным и относительным расположением, в то время как обычная математика занимается большим и малым, единицей и многим, целым и частью». Иными словами, под комбинаторикой Г.В. Лейбниц понимал примерно то, что мы теперь называем дискретной математикой. К области комбинаторики Г.В. Лейбниц относил и «универсальную характеристику» – математику суждений, то есть прообраз нынешней математической логики. Проекты Г.В. Лейбница казались несбыточными математикам его времени, но сейчас, после создания быстродействующих вычислительных устройств, многие его планы стали претворяться в жизнь, а дискретная математика выросла в своем значении и начала соперничать с математическим анализом.

Замечательные достижения в области комбинаторики принадлежат одному из величайших математиков XVIII в. Л. Эйлеру, швейцарцу, прожившему почти всю жизнь в России, где он был членом Петербургской академии наук. У Л. Эйлера хватало времени размышлять и над задачами, которые, казалось бы, не заслуживали его внимания: о том, можно ли обойти мосты в Кенигсберге (сегодня Калининграде) так, чтобы не побывать дважды на одном и том же мосту; можно ли поставить 36 офицеров из 6 разных полков так, чтобы в каждой шеренге и каждой колонне было по одному офицеру каждого воинского звания из каждого полка? – сколькими способами можно разбить данное число на слагаемые и т.д.

Пьер Ферма (1607–1665)

Блез Паскаль (1623–1662)

После работ Б. Паскаля и П. Ферма, Г. В. Лейбница и Л. Эйлера можно было уже говорить о комбинаторике как о самостоятельном разделе математики, тесно связанном с другими областями науки, такими, как теория вероятностей, учение о рядах и т.д. Таким образом, комбинаторика как самостоятельная ветвь математики возникла в XVII в. На протяжении долгого времени основную роль в изучении мироздания играл математический анализ: дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, вариационное исчисление и т.д. Все процессы рассматривались как непрерывные, чтобы можно было применять к ним развитый аппарат математики непрерывного. С появлением быстродействующих вычислительных машин такие абстрактные области математики, как математическая логика, общая алгебра, стали прикладными. Тогда для составления алгоритмических языков, на которых стали писать программы для машин, понадобились специалисты именно в этих областях математики. Произошло изменение соотношения между дискретной и классической математикой. Изменилась и роль древнейшей области дискретной математики – комбинаторики. Если раньше комбинаторика применялась для составления занимательных задач, для кодирования и расшифровки древних письменностей, то со временем она превращается в важнейшую область математического знания.

2. ОСНОВНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ПРИНЦИПЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

Задачи, при решении которых приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций, относятся к разделу математики, который называется ***комбинаторикой***. Этот раздел математики находит широкое применение в социологии. Классической теории вероятностей предшествуют разделы комбинаторики.

Комбинаторный подсчет числа случаев, благоприятствующих тому или иному событию, служит хорошей психологической подготовкой к введению понятия вероятности. Лучший способ освоения комбинаторики – решение задач. О простых и типовых, но в то же время важных, задачах пойдет речь ниже. Начнем с **основных принципов комбинаторики –** принципа сложения и принципа умножения, которые рассмотрим сначала на примерах.

Пример. Пусть в книжном магазине имеются 8 различных видов книг по социологии и 5 различных книг по высшей математике. Сколькими способами можно выбрать в подарок книгу по социологии или книгу по высшей математике? Сколько существует способов, чтобы выбрать две книги – по ыысшей математике и социологии?

Решение. Книгу по социологии» можно выбрать 8 способами, по высшей математике – 5 способами. Следовательно, книгу по социологии или по высшей математике можно выбрать 8+5=13 способами. Для ответа на второй вопрос заметим, что если мы выбираем две книги по высшей математике и социологии, то к каждой из 8 различных книг по социологии можно подобрать книгу по высшей математике 5 способами, а именно, к первой книге по социологии подбираем 5 различных книг по высшей математике, ко второй книге по социологии — опять 5 различных книг по высшей математике и т.д. Таким образом, набор, состоящий из книги по высшей математике и социологии можно выбрать $5+5+5+5+5+5+5+5=8\cdot5=40$ способами.

На этом простейшем примере мы продемонстрировали применение принципов сложения и умножения. Отметим, что понятия теории множеств, как подмножество, объединение множеств, пересечение множеств, рассмотренные в ранее, оказываются весьма полезными при решении комбинаторных задач. Сформулируем теперь основные принципы комбинаторики в общем виде.

Комбинаторный принцип сложения. Если множество A содержит n разных элементов, *а* множество B – m разных элементов и $A \cap B = \varnothing$, то множество $A \cup B$ содержит $n+m$ элементов.

Замечание. *Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а другой объект B, отличный от A, – m способами, то, согласно комбинаторному принципу сложения, объект «A или B» можно выбрать $n+m$ способами.*

Пример. Рассмотрим, сколькими способами студенту факультета философии и социальных наук БГУ можно выбрать 1 книгу, когда на полке находятся 14 книг по социологии, 10 книг по информационным технологиям и 6 книг по математике для гуманитариев.

Решение. Заметим, что книгу по социологии можно выбрать 14 способами, книгу по информационным технологиям – 10 способами, а книгу по математике для гуманитариев – 6 способами. Согласно комбинаторному принципу сложения и в силу предыдущего замечания, студент может выбрать 1 книгу на полке 14+10+6=30 способами.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий комбинаторный принцип умножения.

Пример. Из Минска в Москву ведет n путей, а из Москвы в Орел – m путей. Сколько существует различных путей, чтобы совершить путешествие из Минска в Орел через город Москву?

Решение. Выбрать один из n возможных путей из Минска в Москву, дальше можно продолжить путешествие m способами, поэтому общее число различных путей из города Минска в город Орёл равно $n \cdot m$.

Комбинаторный принцип умножения. Если множество A содержит n различных элементов, т.е. $A = \{a_i : i=1,2,\ldots,n\}$, а множество B – m различных элементов, т.е. $B = \{b_j : j=1,2,\ldots,m\}$, то тогда множество С, составленное из всех возможных пар, т.е. $C = \{(a_i, b_j): i=1,2, \ldots, n; j=1,2, \ldots, m\}$, содержит $n \cdot m$ элементов.

Замечание. *Если некоторый объект А можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора другой объект В можно, независимо от выбора А, выбрать m способами, то, согласно комбинаторному принципу умножения, объект «А и В» можно выбрать $n \cdot m$ способами*.

Пример. Рассмотрим, сколько существует способов, чтобы выбрать гласную и согласную буквы из слова ПРОЦЕНТ.

Решение. Гласную букву можно выбрать 2 способами (О или Е), а согласную — 5 способами (П, Р, Ц, Н или Т). Следовательно, согласно комбинаторному принципу умножения и в силу сделанного замечания, гласную и согласную буквы можно выбрать 2·5=10 способами.

Рассмотрим пример еще одной задачи, при решении которой используются оба принципа комбинаторики.

Пример. Сколько существует способов, чтобы студент факультета философии и социальных наук выбрал 2 книги по разным наукам, когда на полке находятся 14 книг по социологии, 10 книг по информационным технологиям и 6 книг по математике для гуманитариев?

Решение. Если выбирать книгу по социологии и книгу по информационным технологиям, то существует 14 вариантов выбора книги по социологии и 10 – по информационным технологиям, поэтому, по комбинаторному принципу умножения для этого выбора существует 14·10=140 возможностей.

Если выбирать книгу по социологии и книгу по математике для гуманитариев, то имеется 14 вариантов выбора книги по социологии и 6 – по математике для гуманитариев, поэтому, по комбинаторному принципу умножения для указанного выбора имеется $14 \cdot 6 = 84$ возможностей.

Если выбирается книга по информационным технологиям и книга по математике для гуманитариев, то существуют 10 способов выбора книги по информационным технологиям и 6 – по математике для гуманитариев, поэтому, по комбинаторному принципу умножения для такого выбора существует $10 \cdot 6 = 60$ возможностей.

Наконец, поскольку указанные 3выбора разных пар книг отличаются друг о друга, то, согласно комбинаторному принципу сложения, всего существует $140+84+60=284$ способа выбора 2 книг.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ: КОМБИНАТОРНЫЕ ПРИНЦИПЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

1. Студент факультета философии и социальных наук может пересдать зачет по «Основам высшей математике» либо в конце июня – и на это ему дается 3 попытки, – либо в сентябре с помощью 2 попыток. Сколько существует попыток, чтобы сдать зачет по «Основам высшей математики»?

Решение. Так как время попыток сдать зачет различное, то можно воспользоваться правилом суммы. Тогда количество попыток сдать зачет по «Основам высшей математики», согласно комбинаторному принципу сложения, равно 3+2=5.

2. В группе факультета философии и социальных наук 38 студентов. Сколько существует способов выбрать старосту группы и его заместителя.

Решение. Сначала выберем старосту группы. Число способов равно 38, так как каждый студент может быть старостой. После этого останется 37 студентов, из которых может быть выбран заместитель старосты, т.е. число способов выбора заместителя – 37. По комбинаторному принципу умножения количество способов выбора пары «староста и заместитель» равно $38 \cdot 37 = 1406$.

3. Пусть в магазине имеются 7 различных видов коробок конфет и 5 различных коробок печенья. Сколько существует способов, чтобы выбрать в подарок коробку конфет или коробку печенья? Сколько существует способов, чтобы составить набор, состоящий из коробки конфет и коробки печенья?

*Решение***.** Коробку конфет или коробки печенья можно выбрать, согласно принципу сложения, 7+5=12 способами. Составить набор из коробки конфет и коробки печенья можно, согласно принципу умножения, $7 \cdot 5 = 35$ способами.

4. Сколько существует способов, чтобы выбрать гласную и согласную буквы из слова МОСКВА?

*Решение***.** Гласную букву можно выбрать 2 способами (О или А), а согласную – 4 (М, С, К, В). Следовательно, согласно комбинаторному принципу умножения, гласную и согласную буквы можно выбрать $2 \cdot 4 = 8$ способами.

5. На полке в библиотеке стоят 5 книг по социальной психологии, 20 книг по социологии труда и 15 – по статистике. Сколько для студента существует способов, чтобы выбрать одну книгу?

Решение. Книгу по социальной психологии студент может выбрать 5 способами, книгу по социологии труда – 20 способами, а книгу по статистике – 15 способами, тогда по принципу сложения одну книгу можно выбрать 5+20+15=40 способами.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ: КОМБИНАТОРНЫЕ ПРИНЦИПЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

1. На факультете философии и социальных наук 5 специальностей. На первой специальности 25 студентов, на второй – 30, на третьей – 20, на четвертой – 23 и на пятой –19. Сколько существует способов, чтобы выбрать 1 студента?

2. Сколько существует способов, чтобы выбрать гласную и согласную буквы из слов **а)** ПРОДУКТЫ? **б**) МЕТОДИКА? **в**) РЕМОНТ?

3. В магазине одежды продается 5 разных рубашек и 4 разных галстука. Сколько существует способов выбора в подарок рубашки и галстука, без учета их фасона и цвета?

4. Сколькими способами можно оклеить 2 комнаты обоями, если имеется 4 вида различных обоев, при условии, что: а) комнаты могут быть оклеены одинаковыми обоями; б) комнаты не могут быть оклеены одинаковыми обоями?

5. Сколько неудачных попыток можно сделать, открывая сейф, код которого состоит из 3 различных цифр?

6. Сколько «слов» длиной в 5 букв можно составить из 33 букв русского алфавита так, чтобы любые 2 соседние буквы были различными?

7. Три человека независимо друг от друга решили положить в определенный день свои вклады в банк в городе, в котором имеется 8 банков. Сколько может быть вариантов размещения вкладов?

8. Преступник может проникнуть в квартиру либо через входную дверь, либо через окно. Число способов проникновения через дверь – 4, через окно – 3. Сколько всего существует способов проникновения в квартиру?

5. КОМБИНАТОРИКА. ВЫБОР БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

Решение комбинаторных задач часто приводит к понятиям *перестановки, размещения* и *сочетания, п*оэтому на начальном этапе знакомства с основами комбинаторики необходимо научиться определять вид соединения элементов конечного множества, а также подсчитывтаь количество таких соединений.

Для построения соответствующих математических моделей комбинаторных задач будем использовать математический аппарат теории множеств. Если множество состоит из элементов a, b и c, то нам безразличен порядок, в котором указаны элементы, например:

$$\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, b, a\}.$$

Однако есть задачи, в которых важен порядок следования элементов. При этом указывается, какой элемент считается первым, какой – вторым, какой – третьим и т.д.

Множество вместе с заданным в нем порядком расположения его элементов называют ***упорядоченным множеством***.

Очевидно, что каждое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным способом. Упорядоченные множества записывают, располагая по порядку их элементы в круглых скобках:

$$(a, b, c), (b, a, c), (c, b, a).$$

Например, из двух букв А и Б можно построить упорядоченное множество двумя различными способами:

(А, Б), (Б, А).

Три буквы А, Б и В можно расположить в виде последовательности уже шестью способами. Разумеется, когда мы говорим о *последовательности*, то имеем в виду упорядоченное множество элементов. Например, АБ и БА – это разные последовательности. К каждой последовательности вида АБ и БА можно подставить букву В тремя различными способами: спереди, между буквами или сзади. Тогда из АБ получим: ВАБ, АВБ, АБВ, а из БА – ВБА, БВА и БАВ. Все получившиеся последовательности разные, и их можно записать в виде следующих упорядоченных множеств:

(А,Б,В), (А,В,Б), (Б,А,В), (Б,В,А), (В, А, Б), (В,Б,А).

Определение перестановки. Установленный в конечном множестве порядок называют ***перестановкой*** его элементов.

Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Замечание. *Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, т.е. могут быть получены из того же самого множества, называются перестановками этого множества.*

Для сокращения записи произведения всех натуральных чисел от 1 до n в математике используется n-факториал, обозначают $n!$ (читается «эн-факториал»), т.е.

$$\boldsymbol{n! \overset{def}{=} 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n.}$$

Число всевозможных перестановок в множестве из n элементов обозначают P_n (P – первая буква французского слова *permutation* – перестановка; читается «число перестановок из эн элементов» или «пэ из эн»).

Утверждение. Число перестановок P_n можно вычислить по формуле

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n = n!$$

Пусть $n = 2$, тогда число перестановок из двух элементов равно 2: на первое место поставили любой из двух, а на второе – оставшийся элемент, т.е. $P_2 = 2$. Если $n = 3$, тогда число перестановок из трех элементов вычисляется следующим образом: на первое место ставим любой один из трех элементов, вариантов в этом случае 3, на второе – любой один из двух оставшихся, вариантов 2 и на третье место – последний элемент, вариант 1. Таким образом, в силу комбинаторного принципа умножения число всех таких перестановок равно $P_3 = 3\cdot 2\cdot 1 = 3! = 6$.

Пример. Сколько существует вариантов проведения собрания учебной группы, если количество выступающих на собрании – 4?

Решение. Так как на собрании должны выступать всего 4 оратора, то число способов расположения их в списке выступающих и, соответственно, число способов проведения собрания равно числу перестановок из 4 элементов – P_4, т.е. $P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$.

При помощи формулы для P_n получаем:

$$1!=1,\ 2!=2,\ 3!=6,\ 4!=24,\ 5!=120,\ 6!=720,$$
$$7!=5040,\ 8!=740320,\ 9!=362\,880,\ 10!=3\,628\,800.$$

Принято считать, что **0!=1**.

Замечание. *Если рассматривать перестановки n предметов, расположенных не в ряд, а по кругу, и считать одинаковыми расположения, переходящие друг в друга при вращении, то число различных перестановок равно* $P_{n-1} = (n-1)!$

Перестановки букв некоторого слова называют ***анаграммами***. Например, среди анаграмм слова КРОТ, которых всего $P_4 = 4! = 24$, только одна, не считая самого слова КРОТ, имеет смысл в русском языке – КОРТ. Анаграмм слова ПРОЕКТ будет $P_6 = 6! = 720$.

При решении задач иногда необходимо из n имеющихся различных объектов отобрать произвольные m штук ($m \le n$) и расположить их в некотором порядке. Сколько существует упорядоченных расположений при заданных числах n и m?

Например, пусть даны четыре буквы А, Б, В, Г. Требуется выделить из них две буквы и эти две буквы расположить в определенном порядке. Таких способов 12. Действительно, первую букву можно выбрать четырьмя способами, а вторую придется выбирать из оставшихся трех, следовательно, в силу комбинаторного принципа умножения всего получается 4·3=12 способов. Запишем их в виде упорядоченных множеств:

(А, Б), (А, В), (А, Г), (Б, А), (Б, В), (Б, Г),
(В, А), (В, Б), (В, Г), (Г, А), (Г, Б), (Г, В).

В общем случае имеем n различных элементов, выберем из них m элементов. При этом выборки могут отличаться или составом элементов, или их порядком. Посчитаем число таких упорядоченных выборок. На первое место можно поставить любой из n элементов, на второе место – любой из оставшихся $(n–1)$ элементов и т.д., на m-ое место – любой из оставшихся $(n – (m–1))$ элементов. Следовательно, в силу комбинаторного принципа умножения всего получается $n·(n–1)·…·(n–(m–1))$ упорядоченных выборок из n элементов по m элементов.

Определение размещения. Конечные упорядоченные подмножества заданного множества называются ***размещениями***.

Число всевозможных размещений из n элементов по m *обозначают* A_n^m (A – первая буква французского слова *arrangement* – размещение; читается «число размещений из эн элементов по эм» или «A из эн по эм»).

Утверждение. Число размещений A_n^m, где $m \le n$, можно вычислить по формуле

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Из формулы числа размещений следует

$$A_n^1 = n,\ A_n^2 = n\cdot(n–1),\ A_n^3 = n\cdot(n–1)\cdot(n–2),$$

$$A_3^2 = 3\cdot2 = 6,\ A_4^3 = 4\cdot3\cdot2 = 24,\ A_5^4 = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120.$$

Принято считать, что $A_n^0 = 1$. Это верно, поскольку существует только одно пустое множество $\varnothing$ и можно считать, что оно может быть упорядочено одним–единственным образом. Кроме того, это логично: есть единственный способ не выбирать ни одного объекта из n имеющихся – «ничего не делать».

Замечание. *Перестановки – это частный случай размещения при $m=n$, т.е. $A_n^n = P_n = n!$ Кроме того, для $m = n–1$ в формуле для числа размещений имеем* $A_n^{n-1} = A_n^n = n!$

Последнее равенство справедливо, так как если из n различных объектов выбраны $n–1$ и расположены в некотором порядке, то на оставшееся место может претендовать только один оставшийся элемент, который можно и не выбирать, т.е. $A_n^{n-1} = A_n^n$.

Пример. Сколько существует в n–буквенном алфавите m–буквенных «слов», состоящих из различных букв?

Решение. По формуле для количества размещений искомое число

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Например, из 33 букв русского алфавита можно составить $A_{33}^2 = \frac{33!}{(33-2)!} = 33 \cdot 32 = 1056,$ двухбуквенных слов, не содержащих повторений букв.

Пример. Студенту-социологу необходимо срочно пересдать 2 экзамена на протяжении 4 дней. Посчитайте, сколько вариантов теоретически существует для сдачи этих экзаменов.

Решение. Искомое число способов равно числу 2–элементных упорядоченных подмножеств, т.е. дни сдачи экзаменов, 4–элементного множества. По формуле числа размещений оно равно A_4^2 = 12.

В некоторых задачах по комбинаторике не имеет значения порядок расположения объектов в той или иной совокупности. Важно лишь то, какие именно элементы ее составляют. Вот интересующий нас сейчас вопрос: сколькими способами можно выбрать из n различных предметов m штук ($m \le n$)?

Например, пусть из 4 корзин обозначенных буквами А, Б, В и Г нужно выбрать 2. Сколько существует способов, чтобы это сделать? Рассмотрим данный пример, немного изменив условие, а именно: выбранные корзины будем отмечать тем, что положим в них шары. Можно заметить, что каждый выбор пары корзин встречается в списке 12 соответствующих размещений дважды, например АБ и БА. Сейчас для нас не существенно, какой шар первым или вторым оказался в корзине или, другими словами, в каком порядке осуществлялся выбор корзин. Поскольку в нашем случае – перемен мест – 2 выбранных корзин, т.е. перестановок, всего 2, то 2 корзины из 4 можно выбрать 12:2=6 способами.

Определение сочетания. Конечные неупорядоченные подмножества заданного множества называют ***сочетаниями***.

Отметим, что перестановки и размещения – это упорядоченные множества, а сочетания – это неупорядоченные множества. Сочетание – это такая выборка элементов, при которой их порядок совершенно не важен.

Число всевозможных сочетаний из n элементов по m обозначают C_n^m (C – первая буква французского слова *combinaison* – сочетание; читается «число сочетаний из эн элементов по эм» или «C из эн по эм»).

Утверждение. Число сочетаний C_n^m*, где* $m \le n$, можно вычислить по формуле

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Формула числа сочетаний интересна уже тем, что дробь, стоящая в ее правой части, равна целому числу, т.е. все числа, стоящие в знаменателе, сократятся с числами, стоящими в числителе. В частности, из формулы числа сочетаний следует, что

$$C_n^1 = n,\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2},\ C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{2!} = 3,\ C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = 4,\ C_5^4 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!} = 5.$$

Если в этой формуле для C_n^m положить m=0, то получим, что $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$, поэтому *принято считать*, что $C_n^0 = 1$. Это равенство имеет содержательный смысл, состоящий в том, что есть только один способ не выбирать ни одного элемента (или выбрать 0 элементов) из n- элементного множества.

Замечание. *Обратим внимание на своеобразную симметричность формулы для числа сочетаний: если заменить m на $n–m$, то получится то же самое выражение, только факториалы в знаменателе поменяются местами*:

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = C_n^m.$$

Например, пусть в группе из n студентов-социологов надо выбрать m студентов для участия в студенческой факультетской конференции. Выбор m участников конференции равносилен выбору $n–m$ студентов группы, не участвующих в конференции. Поэтому число способов, которым можно выбрать m человек из n, равно числу способов, которым можно выбрать $n–m$ человек из n. Это означает, что $C_n^m = C_n^{n-m}$ или непосредственно $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!}$.

В частности, $C_5^0 = C_5^5 = 1$, $C_4^1 = C_4^3 = 4$.

Пример. Посчитаем, сколькими способами можно выбрать 3 человек на 3 одинаковые должности из 10 кандидатов?

Решение. Поскольку должности одинаковые, то порядок в каждой выборке из 3 человек не имеет значения. По формуле для числа сочетаний искомое количество способов выбора на 3 одинаковые должности из 10 кандидатов

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot (7)!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

Большинство задач этого раздела содержит слова «сколько». Одна из причин, по которой мы затрудняемся ответить на вопросы, начинающиеся с этого слова, состоит в отсутствии универсальной схемы, с помощью которой на них можно было бы ответить. В этом разделе были рассмотрены некоторые общие формулы для подсчета вариантов, использованные при решении отдельных задач.

При решении комбинаторных задач следует ответить на следующие вопросы:

1. Из какого конкретного множества осуществляется выбор (т.е. надо найти n – число элементов этого множества)?

2. Что требуется сделать: расставить все в ряд (перестановки), или выбрать часть упорядоченного подмножества?

3. Важен ли при выборе порядок? Если порядок важен, то применяем формулу для размещений, если порядок не важен – формулу для сочетаний.

6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ: ВЫБОР БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

1. Сколько существует способов, чтобы 7 студенток организовали хоровод на студенческом капустнике?

*Решение***.** Для решения отметим одну из девушек, скажем отличницу. Теперь надо указать, где будут располагаться остальные девушки: кто будет первой по кругу от отличницы, кто второй, третьей, …, шестой. Задача свелась к пересчету способов расположения 6 оставшихся девушек в последовательность, т.е. речь идет о всех перестановках из n–1 элементов, где n=7. Число таких перестановок равно $P_{n-1}= (n-1)! = 6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720$.

2. Из группы социологов, играющих в шахматы, состоящей из 25 человек, надо выбрать шахматную команду из 4 человек играющих на I, II, III и IV доске. Сколько существует способов, чтобы это сделать?

Решение. Так как из 25 человек выбираются четверо и порядок важен при распределении их по доскам, то число способов есть число размещений из 25 по 4:

A_{25}^{4} = 25!/(25–4)!=25!/21!=22·23·24·25=303 600 способов.

3. Студенту-социологу необходимо пересдать 2 экзамена на протяжении 6 дней (в один день можно сдавать не более 1 экзамена). Сколько вариантов теоретически существует для сдачи этих экзаменов?

Решение. Искомое число способов равно числу 2–элементных упорядоченных подмножеств, т.е. вариантов сдачи экзаменов, 6–элементного множества дней. По формуле числа размещений

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 6\cdot5 = 30.$$

4. Возьмем буквы А, Б и Р. Какие перестановки из этих букв можно получить? Сколько таких наборов получится, если буквы в наборе не повторяются?

Решение. Получатся наборы: БАР, БРА, АРБ, АБР, РАБ, РБА, и P_3= 3·2·1 = 3! = 6 наборов.

5. Возьмем следующие плоды: банан (Б), ананас (А) и киви (К). Какие сочетания из этих плодов, взятых по 2, можно составить любителю экзотических фруктов и сколько всего таких наборов получится?

*Решение***.** Получатся следующие наборы: БА («банан, ананас» и «ананас, банан» – один и тот же набор), АК и КБ. Всего по формуле числа сочетаний получим

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = 3 \text{ набора.}$$

6. На факультете философии и социальных наук в танцевальном кружке занимается 10 человек, в кружке художественного слова – 15 человек, в вокальном –12 человек и в фотокружке – 20 человек. Сколькими способами можно составить студенческую бригаду художественной самодеятельности из 4 чтецов, 3 танцоров, 5 певцов и 1 фотографа?

*Решение***.** Разобьем задачу на подзадачи.

1. Сначала найдем, сколько существует способов, чтобы выбрать чтецов: при выборе 4 чтецов из 15 порядок не важен, т.е. используем правило сочетаний
$$C_{15}^{4}= 15!/ (4!\cdot 11!) = (12\cdot 13\cdot 14\cdot 15)/(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)=1365.$$
2. Найдем, сколько существует способов, чтобы выбрать танцоров: при выборе 3 танцоров из 10 порядок не важен, т.е. используем правило сочетаний
$$C_{10}^{3}= 10!/(3!\cdot 7!) = (8\cdot 9\cdot 10)/(1\cdot 2\cdot 3) = 120.$$
3. Выбираем певцов: используем правило сочетаний 5 из 12
$$C_{12}^{5} = 12!/(5!\cdot 7!) = (8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12)/(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5) = 792.$$
4. Выбираем фотографа: используем правило сочетаний 1 из 20
$$C_{20}^{1}= 20!/(1!\cdot 19!) = 20.$$

Поскольку выбор производится по всем четырем позициям, а не по одной, применяем комбинаторный принцип умножения: ·
$$C_{15}^{4}\cdot C_{10}^{3}\cdot C_{12}^{5}\cdot C_{20}^{1} = 2\,594\,592\,000 \text{ способами.}$$

7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числах не повторяются?

Решение. Выбираем 3 цифры из 7, порядок важен:
$$A_7^3=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=7\cdot 6\cdot 5=210 \text{ чисел.}$$

8. В студенческой группе 12 девушек и 16 юношей. Сколькими способами можно выбрать 2 студентов одного пола?

Решение. Можно выбрать двух девушек или двух юношей. 2 девушек из 12 можно выбрать C_{12}^{2} способами, C_{12}^{2} = 12!/(2!·10!) = (11·12)/2 = 66, а 2 юношей из 16 – C_{16}^{2} способами, C_{16}^{2} = 16!/(2!·14!) = 120. Применяя комбинаторный принцип сложения, выбираем 2 девушек или 2 юношей получаем:
$$C_{12}^{2}+C_{16}^{2} = 66+120=186 \text{ способами.}$$

9. В книжном магазине в гуманитарном отделе продают 9 книг зарубежных авторов по социологии и 7 книг российских авторов по социологии. Сколько существует способов, чтобы выбрать: а) 3 книги по социологии; б) 6 книг по социологии зарубежных авторов или российских; в) 4 книги зарубежных авторов и 3 книги российских авторов?

Решение. а) так как не указано, книги каких авторов нужно выбирать, то выбрать 3 книги из 16 можно C_{16}^{3} способами. Получаем,
$$C_{16}^{3}= 16!/(3!\cdot 13!) = (14\cdot 15\cdot 16)/(1\cdot 2\cdot 3) = 560 \text{ способов;}$$

б) выбрать 6 книг зарубежных авторов можно C_9^6 = 84 способами, а 6 книг российских авторов – C_7^6 = 7 способами. По комбинаторному принципу сложения выбрать 6 книг по социологии зарубежных авторов или российских авторов можно $C_9^6+C_7^6$ = 84+7=91 способом;

в) выбрать 4 книги зарубежных авторов из 9 можно C_9^4 способами, а 3 книги российских авторов из 7 – C_7^3 способами. Поэтому набор из 4 книг зарубежных авторов и 3 книг российских авторов можно составить по комбинаторному принципу умножения

$C_9^6 \cdot C_7^3$ = (9!/(4! ·5!)) ·(7!/(3! ·4!)) = 4410 способами.

10. В группе студентов-социологов 17 девушек и 3 юноши. Выбирают по жребию трех человек в оргкомитет «Дня социолога». Сколько существует способов выбрать 2 девушек и 1 юношу?

Решение. 2 девушек из 17 девушек можно выбрать C_{17}^2 способами, а 1 юношу из 3 $-C_3^1$ способами. Тогда по комбинаторному принципу умножения 2 девушки и 1 юношу можно выбрать $C_{17}^2 \cdot C_3^1$ = (17!/(2! ·15!)) ·(3!/(1! ·2!)) = ((16·17)/2) ·3 = 8·17·3 = 408 способами.

11. Студенты-социологи сдают экзамен по дисциплине «Основы высшей математики». В группе 24 человека, из них формируют 2 подгруппы по 12 человек. Среди студентов есть 5 отличников. Сколько существует способов для формирования подгруппы, чтобы 2 отличника попали в одну подгруппу, а 3 – в другую.

Решение. Сформируем первую подгруппу: в ней должно быть 2 отличника и 10 не отличников. Во-первых, 2 отличника выбираем из 5 всего C_5^2 способами, далее выбираем 10 неотличников из остальных 19 студентов. Так как из 24 студентов 5 отличников нужно исключить, то это можно осуществить C_{19}^{10} способами. По комбинаторному принципу умножения 2 отличника и 15 неотличников можно выбрать

$C_5^2 \cdot C_{19}^{10}$ =(5!/(2!·3!)) ·(19!/(10! ·9!))=10·92 378 = 923 780·способами.

Для второй подгруппы выбираем 3 отличника из 5 и 9 не отличников из остальных 19 студентов, этот выбор можно осуществить

$C_5^3 \cdot C_{19}^9$ = (5!/(3! ·2!)) · (19!/(9! ·10!)) = 10·92 378 = 923 780 способами.

По комбинаторному принципу сложения способов сформировать подгруппы, чтобы 2 отличника попали в одну подгруппу, а 3 – в другую, можно

$C_5^2 \cdot C_{19}^{10} + C_5^3 \cdot C_{19}^9$ = 923 780+ 923 780 = 1 847 560.

7. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ: ВЫБОР БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

1. Сколько существует способов, чтобы 10 студентов могли встать в очередь друг за другом в университетской библиотеке?

2. Сколько существует способов, чтобы посадить 7 студентов за круглый стол на семинарском занятии?

3. Верно ли, что вершины нарисованного на плоскости правильного пятиугольника можно буквами А, Б, С, Д, Е обозначить 120 способами?

4. Верно ли, что если есть материи 6 различных цветов, то 3-цветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины можно сделать 120 способами?

5. Студенты-социологи изучают в каждом семестре 8 различных дисциплин. Расписание занятий на понедельник состоит из 4 различных дисциплин. Сколько различных расписаний на понедельник может составить методист факультета?

6. Сколько поединков по борьбе должны быть проведены между 15 спортсменами, если каждый из них должен встретиться с каждым?

7. В книжный магазин привезли новых 20 книг, из них по социологии – 5, по философии – 8, по высшей математике – 4 и по психологии – 3. Сколькими способами можно составить набор для университетской библиотеки, чтобы в него входило 3 книги по социологии, 5 – по философии, 3 – по высшей математике и 2 – по психологии?

8. Сколькими способами можно составить расписание из 4 различных дисциплин на один день, если имеется 10 дисциплин и одна из них – физическая культура – должна быть последней?

9. Возьмем буквы О, Е и Я. Какие перестановки из этих букв можно получить? Сколько таких наборов получится, если буквы в наборе не повторяются?

10. Колода состоит из 36 карт. Сколько всего существует способов извлечь 1 даму и 2 королей без учета их масти?

11. Студенты-социологи сдают экзамен по дисциплине «Философия». В группе 22 человека, из них формируют 2 подгруппы по 11 человек. Среди студентов есть 5 отличников. Сколько существует способов для формирования подгруппы, чтобы 2 отличника попали в одну подгруппу, а 3 – в другую?

12. Сколько неудачных попыток можно сделать, чтобы открыть сейф, если код сейфа содержит 4 различные цифры?

13. В библиотеке 30 книг стоит на книжной полке, из них 27 книг различных авторов и три книги одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

14. В конкурсе участвовало 8 фирм, 3 из которых жюри должно присудить 1-е, 2-е и 3-е места. Сколько вариантов решения жюри существует?

15. Перед выпуском группа студентов-социологов, состоящая из 19 человек, обменялась фотографиями. Сколько всего фотографий было роздано?

16. Для проведения социологического опроса социологу необходимо выбрать 4 группы студентов выпускных курсов, имеющих гуманитарное направление обучения. Он подобрал 8 одинаково подходящих групп. Сколько существует способов отбора 4 групп из 8 в случайном порядке?

17. В лотерее «Спортлото» игрок должен зачеркнуть 6 из 49 возможных чисел от 1 до 49. Сколько существует всевозможных вариантов выбора для игрока?

18. В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой 1 игру. Сколько игр сыграно в турнире?

19. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в запись числа только 1 раз?

20. Фирма нуждается в организации 4 новых складов. Её сотрудники подобрали 8 одинаково удобных помещений. Сколько существует способов отбора 4 помещений из 8 в случайном порядке?

21. Правление коммерческого банка выбирает из 8-ми кандидатов 3 человек на различные должности (все 8 кандидатов имеют равные шансы). Сколькими способами это можно сделать?

22. Из 10 мужчин и 8 женщин набирают состав работников фирмы. Требуется 6 человек, из них 4 мужчин и 2 женщины. Сколькими способами можно выбрать такой состав сотрудников?

8. КОМБИНАТОРИКА. ВЫБОР С ПОВТОРЕНИЯМИ

Одна из важных особенностей комбинаторики заключается в том, что в ней большую роль играет точная формулировка задачи. Большинство ошибок связано с некорректными постановками задач из-за неопределенности формулировок. Когда речь идет о подсчете числа студентов в группе никакой неопределенности не возникает. Менее определенная ситуация возникает, когда посчитать нужно число вариантов или способов. Рассмотрим следующие задачи.

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово АНКЕТА?

Решение. Слово АНКЕТА состоит из шести букв, которые можно переставить P_6=6! способами. Однако заметим, что в данном слове буква А встречается 2 раза и, меняя местами две буквы А, мы не получим новых слов. Так как две буквы А можно переставить P_2=2! способами, то все 6! перестановок букв, входящих в слово АНКЕТА, разбиваются на группы по 2! одинаковых перестановок в каждой группе. Количество таких групп равно $\frac{6!}{2!}$, значит, искомое число «слов» слова АНКЕТА равно

$$\frac{P_6}{P_2} = \frac{6!}{2!} = \frac{(2!)\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 360.$$

Напомним, что комбинаторика позволяет считать *словом* любую комбинацию букв. Математики любят сводить новые задачи к уже решенным. Для того чтобы воспользоваться способом подсчета числа перестановок, применим новый для нас ***прием растождествления***. Он показывает, как можно переходить от одного понятия «различия» к другому. При точном понимании терминов, т.е. при соблюдении *главного правила комбинаторики*, можно открыть дополнительные возможности решения комбинаторных задач. Слово «растождествление» вряд ли есть в словарях, но оно достаточно точно передает суть дела. Суть его в том, чтобы рассматривать одинаковые буквы слова как различные, например, с помощью их индексации.

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово КАРАОКЕ.

Решение. После индексации букв слова КАРАОКЕ, в котором 2 буквы К, 2 буквы А и 1 буква О, 1 буква Е, 1 буква Р, получим 7=2+2+1+1+1 различных букв $К_1$, $А_1$, $Р_1$, $А_2$, $О_1$, $К_2$, $Е_1$. Из них можно составить P_7 = 7! различных 7–буквенных слов, т.е. перестановок из 7 различных букв. Они образуют вспомогательный перечень.

Не трогая остальных букв и меняя местами лишь 2 буквы К всеми возможными способами, а их будет по числу перестановок из 2 букв $К_1$, $К_2$, всего 2!, получим вроде бы новые перестановки, но без индексации букв они будут неразличимы. Поэтому общее число перестановок уменьшиться в 2! раза.

Аналогичные рассуждения верны и для 2 букв А, и лишь буквы О, Е и Р по одной. В итоге количество анаграмм слова КАРАОКЕ, без учета повторов слов, пересчитанных с помощью комбинаторного принципа умножения, окажется равным числу 7!/(2!·2!) = 1260. Чтобы не нарушать единообразия, поделим указанное выражение на 1!=1, соответствующее числу перестановок одной буквы О, Е и Р в указанных анаграммах, поскольку полученное число анаграмм принято записывать в виде

$$7!/(2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!) = 1260.$$

Для того чтобы частный случай подсчета анаграмм не стал, как сказал бы Козьма Прутков «пустою забавою», рассмотрим эту задачу в более общей постановке.

Определение перестановок с повторениями. Перестановка элементов конечного набора, состоящего из n элементов таких, что элемент a_1 повторяется n_1 раз, элемент a_2 повторяется n_2 раз, …,элемент a_k повторяется n_k раз, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, называется ***перестановкой с повторениями***.

Число всевозможных перестановок с повторениями, а именно, выборов n объектов n_1, n_2, …, n_k с повторяющимися элементами, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, обозначают $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots n_k}$. С помощью горизонтальной черты над буквой P отличают случай с повторениями от обычных перестановок (читается «число перестановок с повторениями из эн-один, эн-два и т.д. до эн-ка» или «пэ с чертой из эн-один, эн-два и т.д. до эн-ка»).

Утверждение. Число перестановок с повторениями $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots n_k}$, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, можно вычислить по формуле

$$\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

С помощью формулы числа перестановок с повторениями число анаграмм слова КАРАОКЕ, подсчитанное выше, можно записать в виде

$$\overline{P}_{2,2,1,1,1} = 7!/(2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!) = 1260.$$

Далее дадим обобщение понятия размещения, а именно – рассмотрим задачи, решения которых приводят к понятию размещения с повторениями.

Пример. Сколько двухбуквенных «слов» можно составить из 33 букв алфавита русского языка?

Решение. Двухбуквенное «слово» может быть составлено либо из 2 различных букв, либо из 2 одинаковых букв. На первое место мы можем поставить любую из 33 букв алфавита русского языка. Независимо от этого, на второе место опять можно поставить любую из 33 букв. Значит, по комбинаторному принципу умножения количество двухбуквенных слов будет равно $33\cdot 33=33^2$.

Определение размещений с повторениями. Упорядоченный набор элементов, содержащий m элементов из данных n, причем один и тот же элемент может повторяться не более m раз, называется ***размещениями с повторениями***.

Число всевозможных размещений с повторениями, а именно, выборов m объектов из повторяющихся n элементов, обозначают $\overline{A_n^m}$. С помощью горизонтальной черты над буквой A отличают случай с повторениями от обычных размещений. (читается «число размещений с повторениями из эн по эм» или «A с чертой из эн по эм»). Первое название излишне длинное и «торжественное», но в ясности ему не откажешь.

Утверждение. Число размещений с повторениями $\overline{A_n^m}$ можно вычислить по формуле:

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Пример. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, в записи которых используются цифры 1, 2, 3?

Решение. По условию задачи даны 3 цифры, из которых составляются пятизначные натуральные числа, значит, n=3. Заметим также, что цифры в записи числа будут повторяться. Пятизначное число представляет собой упорядоченный набор из 5 элементов-цифр, поэтому m=5. Тогда по формуле для числа размещений с повторениями количество пятизначных натуральных чисел, в записи которых используются цифры 1, 2 ,3, равно $\overline{A_3^5} = 3^5 = 243$.

Замечание. *Обратим внимание на то, что в формуле числа размещений с повторениями* $\overline{A_n^k} = n^k$ *допустим случай, когда* $k > n$.

Например, число размещений с повторениями четырехбуквенных «слов», составленных из алфавита, содержащего всего две буквы – А и М, равно $\overline{A_2^4}$ $=2^4=16$. Среди этих размещений с повторениями есть, например, слова АААА, АААМ, АММА, МАМА, МААМ, МААА, ММММ.

Пример. Шестизначный велосипедный номер считается «счастливым» если в нем нет ни одной цифры 8, поскольку «восьмерка» — один из дефектов велосипедного колеса. Посчитаем, каких номеров больше: «счастливых» или «несчастливых».

Решение. На первый взгляд кажется, что поскольку 8 — это лишь одна цифра из десяти возможных, то счастливых номеров должно быть в несколько раз больше. Счастливый номер — это шестибуквенное слово в «алфавите», содержащем девять цифр, т.е. все цифры, кроме восьмерки: 0,1,2,3,4,5,6,7,9. Число таких слов по формуле числа размещений с повторениями равно $\overline{A_9^6}$ $=9^6=531\ 441$. Если отбросить «слово» «000000», непригодное в качестве велосипедного номера, то счастливых номеров будет 531 440. Всего шестизначных номеров, за вычетом непригодного, равно $\overline{A_{10}^6}$ –1=1 000 000–1=999 999. Таким образом, несчастливых номеров 999 999–531 440=468 559, т.е. ненамного меньше, чем счастливых.

Любопытно то, что если бы номера были бы семизначными, то тогда счастливых номеров было бы меньше, чем несчастливых.

Напомним, что *перестановки* – частный случай размещений и формула для числа перестановок – частный случай формулы для числа размещений. А как обстоит дело для перестановок и размещений с повторениями? Являются ли перестановки с повторениями частным случаем размещений с повторениями?

Замечание. *Формула для числа перестановок с повторениями не является частным случаем формулы для числа размещений с повторениями*.

Разберем в чем тут дело. Когда речь идет о повторениях в упорядоченном или неупорядоченном наборе объектов, то возможны две противоположные ситуации:

а) каждый объект должен повторяться в наборе строго заданное число раз;

б) нет никаких ограничений на число повторений объектов, кроме общего их числа в наборе.

В этом отличие перестановок с повторениями и размещений с повторениями. Объединяет их другое – *это упорядоченные наборы*. Отметим, что для *неупорядоченных наборов* ситуация с фиксированным набором каждого объекта бессодержательна, поскольку в таком случае это один вариант.

Размещение с повторениями – термин достаточно явный и удобный. В случае «сочетаний с повторениями» с ясностью не все благополучно. Хотя, если перестановки и размещения могут быть с повторениями, имеет смысл говорить и о сочетаниях с повторениями.

Определение сочетаний с повторениями. Неупорядоченный набор элементов, содержащий m элементов из данных n, причем один и тот же элемент может повторяться не более m раз, называется ***сочетанием с повторениями***.

Число всевозможных сочетаний с повторениями, а именно выборов m объектов из повторяющихся n элементов обозначают $\overline{C_n^m}$ (читается «число сочетаний из эн по эм» или «С с чертой из эн по эм»). Для нахождения числа $\overline{C_n^m}$ сочетаний с повторениями из n элементов по m приходится проявить определенную избирательность.

Утверждение. Число сочетаний с повторениями $\overline{C_n^m}$ можно вычислить по формуле:

$$\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$$

Рассмотрим *модельную задачу о голосовании*.

Пример. При принятии решения члены комитета из 7 человек голосуют: «за», «против», «воздержался». Посчитаем, сколько может быть возможных исходов голосования по данному решению.

Решение. Если нас интересует, кто и как голосовал, т.е. поименное открытое голосование, то тогда речь идет о *размещениях с повторениями*, что даст $\overline{A_3^7} = 3^7 =$ 2187 возможных исходов голосования.

Если нас не интересует, кто и как голосовал, а только общий результат голосования или, например, голосование тайное, то тогда речь идет о *сочетаниях с повторениями*. В этом случае подсчитывается число всевозможных сочетаний m=7 голосований членов комитета из повторяющихся n=3 видов голосования: «за», «против», «воздержался», что даст

$$\overline{C_n^m} = \overline{C_3^7} = C_{7+3-1}^7 = C_9^7 = 9!/(7!2!) = (9\cdot 8)/2 = 36$$

возможных исходов голосования.

Замечание. *Сочетания с повторениями и размещения с повторениями объединяет то, что нет никаких ограничений на число повторений элементов, кроме общего их числа в наборе, поэтому в формуле числа сочетаний с повторениями* $\overline{C_n^m} = \dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$ *допустим случай, когда* $m>n$.

Отличаются сочетания (с повторениями или без) от размещений (с повторениями или без) тем, что первые – неупорядоченные наборы, а вторые – упорядоченные.

Рассмотрим еще одну модельную задачу**.**

Пример. Сколько существует способов, чтобы 4 пирата могли разделить между собой 8 одинаковых монет?

Решение. Рассматриваем два варианта.

Вариант 1 — пираты с признаками морали, т.е. допускается любой способ дележа монет, при котором каждый пират получает хотя бы 1 монету. Варианты дележа монет между пиратами могут быть разные. Возможен такой вариант, где первому пирату достанется 2 монеты, второму – 1 монета, третьему – 3 монеты и четвертому – 2 монеты. Рассмотрим этот вариант, записывая его в виде множества, где M_i – монета i-го пирата и «перегородки» указывают способ дележа монет среди пиратов: $\{M_1M_1|\ M_2\ |\ M_3M_3M_3\ |M_4M_4\}$. Три «перегородки-разделителя» делят пиратов на 4 группы по количеству монет. Заметим, что разделители могут находиться только в промежутках между M_i, но не слева и не справа от них и в каждом промежутке должно быть не более одного разделителя, поскольку каждый пират получает хотя бы 1 монету. Таким образом, в задаче речь идет о выборе 3 мест для разделителей из 7 возможных мест (промежутков). Получаем, что в построенной «модели» задачи число способов дележа монет будет равно $C_{8-1}^{4-1} = C_7^3$=35.

Вариант 2 — пираты без признаков морали, т.е. допускаются любые способы дележа, когда, например, некоторые пираты могут остаться без монет или все монеты достанутся одному пирату. Например, первому пирату – 3 монеты, второму – ни одной, третьему – 5 монет и четвертому – ни одной. Получим, что число способов дележа во втором варианте соответствуют числу сочетания с повторениями $\overline{C_4^8} = C_{8+4-1}^{4-1} = C_{11}^3 = 165$. А что, собственно, повторяется в варианте 2? Это не монеты, поскольку, несмотря на их идентичность, они были и в варианте 1.

Каждый пират в единственном экземпляре. Что же тогда? Если забыть о способе решения этой задачи, то придется признать, что «повторяются» все-таки пираты.

Замечание. *Мораль из сказанного проста: без особой надобности не следует связываться с термином «сочетания с повторениями».*

9. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ: ВЫБОР С ПОВТОРЕНИЯМИ

1. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1,1,1,2,2,2?

Решение. В задаче нужно найти число перестановок с повторениями – «1» повторяется 3 раза и «2» повторяется 3 раза:

$$\overline{P}_{3,3} = 6!/(3!\cdot 3!) = (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)/(1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3) = 20.$$

2. Возьмем буквы А, Б и Р. Какие перестановки из этих букв можно получить, если буква А в наборе повторяется два раза? Сколько таких перестановок можно получить?

Решение. Получаются наборы:

БАРА, БРАА, БААР, ААРБ, ААБР, АБАР,
АРАБ, АРБА, АБРА, РАБА, РААБ, РБАА.

$$\overline{P}_{2,1,1} = 4!/(2!\cdot 1!\cdot 1!) = 3\cdot 4 = 12 \text{ наборов.}$$

3. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах ФИЛОСОФИЯ, СОЦИОЛГОИЯ, МАТЕМАТИКА, ЛОГИКА?

Решение. В слове ФИЛОСОФИЯ, состоящем из 9 букв, буквы Ф, О и И повторяются дважды:

$$\overline{P}_{2,2,2,1,1,1} = 9!/(2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!) = (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9)/(1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2) = 45\,360.$$

В слове СОЦИОЛОГИЯ, состоящем из 10 букв, буква О повторяется трижды, буква И – дважды:

$$\overline{P}_{1,3,1,2,1,1,1} = 10!/(1!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!) = (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10)/(1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2) = 302400.$$

В слове МАТЕМАТИКА, состоящем из 10 букв, буква А повторяется 3 раза, буквы М, Т – дважды:

$$\overline{P}_{3,2,2,1,1,1} = 10!/(3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!) =$$
$$= (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10)/(1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2) = 151\,200.$$

В слове ЛОГИКА все буквы разные:

$$P_6 = 6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720.$$

4. Группа из 25 студентов сдает экзамен по высшей математики. Положительные оценки для сдачи экзамена – 4,5,6, …10. Сколько существует способов для заполнения экзаменационной ведомости?

Решение. Для каждого студента выбирается 1 оценка из 7, выбор делается 25 раз. Возможны повторения, так как каждая оценка может быть выбрана любое число раз. Порядок важен, так как он показывает, какому студенту достается выбранная оценка. Таким образом, число способов есть число размещений с повторением из 7 по 25,

$$\overline{A_7^{25}} = 7^{25}.$$

5. Возьмем буквы А, Б, Р. Какие размещения из этих букв по 2 можно получить? Сколько таких наборов получится, если: а) буквы не повторяются; б) буквы могут повторяться?

Решение. а) БА, БР, АР, АБ, РБ, РА и $A_3^2 = 3!/1! = 6$;

б) БА, БР, ББ, АА, АБ, АР, РБ, РА, РР и $\overline{A_3^2} = 3^2 = 9$.

6. Пять студентов вошли в лифт на 1-м этаже 9–этажного университетского корпуса. Сколько существует способов, чтобы студенты вышли из лифта на нужных этажах?

Решение. Каждый из 5 студентов может выйти на любом из 8 этажей со второго по девятый включительно. Таким образом, получаем, $\overline{A_8^5} = 8^5 = 32\ 768$ способов.

7. В магазине имеется 7 видов тортов. Сколько существует способов, чтобы составить набор, содержащий 3 торта? А если имеются 3 вида тортов и нужен набор из 7?

Решение. Поскольку порядок расположения тортов в наборе не играет роли, то искомое число наборов равно числу сочетаний с повторениями из 7 по 3 в каждом:

$$\overline{C_7^3} = (7+3-1)!/(3!\cdot(7-1)!) = 9!/(3!\cdot 6!) = (7\cdot 8\cdot 9)/(1\cdot 2\cdot 3) = 84.$$

Если имеется 3 вида тортов, а нужен набор из 7 тортов, то число возможных наборов

$$\overline{C_3^7} = (3+7-1)!/(7!\cdot(3-1)!) = 9!/(7!\cdot 2!) = (8\cdot 9)/(1\cdot 2) = 36.$$

8. Анкета по изучению общественного мнения содержит 10 вопросов, на каждый из которых отвечающий дает один из трех ответов: «да», «нет» и «не знаю». Найдите число всех различных способов заполнения анкеты.

Решение. Каждый вариант заполнения анкеты представляет собой упорядоченный набор из 10 элементов (значит, m=10) трех видов: «да», «нет» и «не знаю», т.е. n=3. Заметим также, что данные элементы, т.е. варианты ответов на вопросы анкеты, в наборе будут повторяться, например, может быть такой способ заполнения анкеты, при котором на все 10 вопрос дан одинаковый ответ «да». Значит, по формуле для числа размещений с повторениями искомое количество способов заполнения анкеты равно $\overline{A_3^{10}} = 3^{10}$.

9. В магазине продаются булочки 3 видов: с маком, изюмом и повидлом. Староста группы решил купить 6 булочек, чтобы угостить девушек. Сколько возможных вариантов выбора у него есть?

Решение. По условию задачи требуется составить набор из 6 булочек, которые выбираются (возможны повторения наименований булочек) из 3 видов булочек (с маком, изюмом или повидлом). Значит, по формуле для числа сочетаний с повторениями искомое количество возможных наборов булочек

$$\overline{C_3^6} = C_{6+3-1}^6 = C_8^6 = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8}{6!\cdot 2!} = \frac{56}{2} = 28.$$

10. Сколько трехзначных чисел можно составить из нечетных цифр?

Решение. По условию задачи требуется составить трехзначные числа, т.е. m=3, из 5 нечетных цифр: 1, 3, 5, 7, 9. Так как при составлении чисел порядок следования цифр важен, то по формуле для числа размещений с повторениями получаем количество вариантов $\overline{A}_5^3 = 5^3 = 125$.

10. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ:ВЫБОР С ПОВТОРЕНИЯМИ

1. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: на двух карточках Л, на остальных трех – И. Сколько существует способов составить слово ЛИЛИИ?

2. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах: БАЛЛАДА, КОЛОКОЛ, РОТОР, КАРАТЕ, ТАЛАНТ?

3. В цветочном магазине продаются цветы 6 сортов. Сколькими способами можно составить букет из 7 цветов?

4. Группа студентов из 6 человек сдаёт экзамен по английскому языку. Сколькими способами может быть заполнена экзаменационная ведомость?

5. Возьмем буквы А, О, Е. Какие размещения из этих букв по 2 можно получить? Сколько таких наборов получится, если: а) буквы не повторяются; б) буквы могут повторяться?

6. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах: ПСИХОЛОГИЯ, СОЦИОЛОГИЯ, ФИЛОСОФИЯ?

7. Кодовый замок сейфа открывается, если набрана определенная комбинация из 4 цифр. Сколько всего существует кодовых комбинаций цифр замка сейфа?

8. В составе следственной группы, состоящей из 7 человек, должны быть психологи, следователи, эксперты, криминалисты, хотя бы по одному. Сколько различных составов следственных групп может быть?

9. Шесть человек вошли в лифт на 1-м этаже 10-этажного дома. Сколько существует способов, чтобы пассажиры вышли из лифта на нужных этажах?

10. В кошельке студента находится достаточно большое количество 1-, 2-, 5- и 10- копеечных монет. Сколько существует способов, чтобы студент мог извлечь 3 монеты из кошелька?

11. В студенческой столовой из всего ассортимента наибольшим спросом пользуются сосиски в тесте, ватрушки и пончики. Какие варианты покупки 5 «пирожков» (под «пирожками» понимаем ватрушки, сосиски в тесте или пончики) могут быть?

12. Номер автомобиля состоит из 2 букв и 4 цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

11. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОБРАБОТКИ И АНАЛИЗА СОЦИОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Рассмотрим вопрос о том, с кем респондент проводит или предпочитает проводить свое свободное время. Предлагаются следующие варианты ответов:

1. С друзьями;
2. С коллегами по работе, учебе;
3. С членами своей семьи;
4. С другими родственниками
5. В одиночестве;
6. С любимым человеком;
7. С домашним питомцем.

Респонденту обычно предлагается один из следующих способов ответа:

1) проранжировать, т.е. упорядочить (например, по важности) позиции;

2) отметить заданное число позиций (например, 3 позиции);

3) отметить заданное число позиций (например, 3 позиции) и проранжировать их;

4) отметить не больше заданного числа позиций.

Нас интересует, сколькими вариантами можно ответить на такой вопрос при каждом способе ответа? Этот вопрос важен, в частности, при статистической обработке данных анкеты.

Переведем эти вопросы на математический язык. Пусть имеется множество X состоящее из n элементов (в нашем случае из 7). Требуется:

1) проранжировать, т.е. упорядочить (например, по важности) позиции, означает найти число перестановок из 7 элементов: $P_7 = 7! = 5040$;

2) отметить заданное число позиций (например, 3 позиции) – выбрать из 7-элементного множества подмножество, состоящее из 3 элементов, а значит найти число сочетаний

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 35;$$

3) отметить заданное число позиций (например, 3 позиции) и проранжировать их – выбрать подмножество из 3 элементов и упорядочить его, а это значит найти

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 5\cdot 6\cdot 7 = 210;$$

4) выбрать из множества X подмножество, состоящее не более чем из m элементов, – вычислить $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{m-1} + C_n^m$, при этом слагаемое C_n^0 учитывает случай, когда выбирается пустое множество или, применительно к

ответам на вопрос анкеты, когда респондент не отмечает ни одной позиции, в нашем случае n=7, m=3 и $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 = 1 + 7 + 21 + 35 = 64$.

12. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сколько вариантов ответа у следующего вопроса анкеты, т.е. сколькими способами можно на него ответить? Отметьте, пожалуйста, 4 наиболее важных для Вас позиции и проранжируйте их. Расставьте все позиции по важности.

Что бы Вы сделали в первую очередь, оказавшись в сложной жизненной ситуации?

1. Обратился бы в администрацию своего предприятия (учреждения).
2. Обратился бы за помощью к коллегам по работе.
3. Попросил бы помощи у семьи, друзей.
4. Обратился бы в суд.
5. Написал (обратился) бы в международную организацию.

2. Сколько вариантов ответа у следующего вопроса анкеты, т.е. сколькими способами можно на него ответить? Отметьте, пожалуйста, 5 наиболее важных для Вас позиции. Отметьте, пожалуйста, 6 наиболее важных для Вас позиции и проранжируйте их по важности.

Если бы у Вас появилась значительная сумма денег, то на что Вы их потратите в первую очередь?

1. Открою свое дело, вложу в бизнес
2. Куплю дом, квартиру
3. Куплю дорогие товары длительного пользования
4. Вложу в ценные бумаги, положу под проценты
5. Потрачу на поддержание своего здоровья
6. Потрачу на собственное образование
7. Сделаю ремонт квартиры, дома
8. Помогу родственникам, близким
9. Потрачу на развлечения
10. Потрачу на благотворительность

13. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое комбинаторика? Перечислите основные комбинаторные принципы умножения и сложения.
2. Дайте определение перестановок из n элементов. По какой формуле можно найти число всевозможных перестановок из n элементов? Приведите соответствующий пример.
3. Что называют размещениями из n элементов по m элементов? По какой формуле можно найти число всевозможных размещений из n элементов по m элементов? Приведите соответствующий пример.
4. Дайте определение сочетаний из n элементов по m элементов. Чему равно число сочетаний из n элементов по m элементов без повторений? Приведите соответствующий пример.
5. В чем отличие комбинаторных понятий «размещение» и «сочетание»?
6. Как связаны комбинаторные понятия «перестановки» и «размещение»?
7. Каким равенством связаны числа перестановок, размещений и сочетаний?
8. Дайте определение перестановок с повторениями. Чему равно число перестановок с повторениями? Приведите соответствующий пример.
9. Дайте определение размещения с повторениями. Чему равно число размещения с повторениями? Приведите соответствующий пример.
10. Дайте определение сочетания с повторениями. Чему равно число сочетаний с повторениями? Приведите соответствующий пример.
11. Докажите, что $A_n^{n-1} = A_n^n = n!$
12. Упростите выражения: а) $\frac{2}{n+1} \cdot C_{n+1}^{n-1}$; б) $C_9^4 + C_9^5$; в) $\frac{(A_7^4 \cdot C_6^4)}{P_5}$.

14. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ В ТАБЛИЧНОМ ПРОЦЕССОРЕ MS EXCEL

В данной лабораторной работе разберем на простых примерах основные комбинаторны формулы, такие как сочетания, размещения, перестановки без повторений и с повторениями, а также научимся вычислять их с помощью встроенных функций табличного процессора MS Excel.

Перестановки без повторений в табличном процессоре MS Excel

Установленный в конечном множестве порядок называют ***перестановкой*** *его элементов*.

Число перестановок P_n *можно вычислить по формуле*:

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1 = n!$$

Для нахождения числа перестановок в *табличном процессоре MS Excel* можно использовать одну из двух функций:

=ПЕРЕСТ(n;n) или =ФАКТР(n), где *n* – число переставляемых объектов.

Пример. *Сколькими способами можно расставить 7 различных книг по социологии на одной полке?*

Решение. Вводим число объектов 7 и получаем ответ: 5040 способов.

количество перестановок		
число объектов, *n*	*n* =	7
число перестановок	P(n)=	5040
факториал	n!=	5040

В режиме формул следующее отображние:

количество перестановок		
число объектов, *n*	*n* =	7
число перестановок	P(n)=	=ПЕРЕСТ(7;7)
факториал	n!=	=ФАКТР(7)

Перестановки с повторениями в табличном процессоре MS Excel

Перестановка элементов конечного набора, состоящего из n элементов таких, что элемент a_1 *повторяется* n_1 *раз, элемент* a_2 *повторяется* n_2 *раз, …,элемент* a_k *повторяется* n_k раз, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, *называется* ***перестановкой с повторениями***.

Число перестановок с повторениями $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots n_k}$, *где* $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, *можно вычислить по формуле:*

$$\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Для нахождения числа перестановок в табличном процессоре MS Excel будем использовать функцию

=ФАКТР(),

которая находит факториал чисел и обычные действия умножение и деление.

Пример. *Сколько различных слов можно составить из букв слова* "колокол"?

Решение. Вводим число букв n=7, а также следующие повторы букв К, О и Л: n_1=2, (2 буквы "к"), n_2=3 (3 буквы "о"), n_3=2 (2 буквы "л"), и получаем ответ: 210 слов.

количество перестановок с повторениями		
число объектов, *n*	*n* =	7
число повторений буквы "К"	n_1	2
число повторений буквы "О"	n_2	3
число повторений буквы "Л"	n_3	2
Число перестановок с повторениями	*P*	210

В режиме формул это выглядит так:

количество перестановок с повторениями		
число объектов, *n*	*n* =	=СУММ(D5;D6;D7)
число повторений буквы "К"	n_1	2
число повторений буквы "О"	n_2	3
число повторений буквы "Л"	n_3	2
Число перестановок с повторениями	*P*	=ФАКТР(D4)/(ФАКТР(D5)*ФАКТР(D6)*ФАКТ

Размещения без повторений в табличном процессоре MS Excel

Конечные упорядоченные подмножества заданного множества называются ***размещениями****.*

Число размещений A_n^k, *где* $k \le n$, *можно вычислить по формуле*:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Для нахождения числа размещений в табличном процессоре MS Excel используем функцию

=ПЕРЕСТ(n;k).

Пример. *В студенческой группе учится 10 студентов. Нужно выбрать из них 3 человек на должности старосты, заместителя и дежурного. Сколькими способами можно это сделать?*

Решение. Вводим n=10, k=3 и получаем ответ: 720 способов.

количество размещений из *n* по *k*		
число объектов, *n*	*n* =	10
число выбираемых объект	$k=$	3
число размещений *A(n,k)*	$A(n,k)=$	720

В режиме формул это выглядит так:

количество размещений из *n* по *k*		
число объектов, *n*	*n* =	10
число выбираемых объектов, *k*	$k=$	3
число размещений *A(n,k)*	$A(n,k)=$	=ПЕРЕСТ(10;3)

Размещение с повторениями в табличном процессоре MS Excel

Упорядоченный набор элементов, содержащий m *элементов из данных* n, *причем один и тот же элемент может повторяться не более* k *раз, называется* ***размещениями с повторениями****.*

Число размещений с повторениями $\overline{A_n^k}$ *можно вычислить по формуле:*

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Для вычисления в табличном процессоре MS Excel используем функцию

=СТЕПЕНЬ(n;k).

Пример. *Сколько трехзначных номеров можно составить для автомобилей, используя все возможные цифры от* 0 *до* 9?

Решение. Вводим n=10 – это количество всех возможных цифр, k=3 – это количество цифр в номере, и получаем ответ: 1000 номеров.

количество размещений с повторениями из *n* по *k*		
число объектов, *n*	n =	10
число выбираемых	k=	3
число размещений с повторениями $\bar{A}(n,k)$	$\bar{A}(n,k))=$	1000

В режиме формул это выглядит так:

количество размещений с повторениями из *n* по *k*		
число объектов, *n*	n =	10
число выбираемых объектов, *k*	k=	3
число размещений с повторениями $\bar{A}(n,k)$	$\bar{A}(n,k))=$	=СТЕПЕНЬ(D4;D5)

Сочетания без повторений в табличном процессоре MS Excel

*Конечные неупорядоченные подмножества заданного множества называют **сочетаниями**.*

Число сочетаний C_n^k, где $k \le n$, *можно вычислить по формуле:*

$$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Для нахождения числа сочетаний в табличном процессоре MS Excel используем функцию

=ЧИСЛКОМБ(n;k).

Пример. *В студенческий поход пошло 10 студентов. Нужно выбрать из них 3, которые понесут флажки. Сколькими способами можно это сделать*?

Решение. Вводим n=10, k=3 и получаем ответ: 120 способов.

B	C	D	E
количество сочетаний из *n* по *k*			
число объектов, *n*	*n* =	10	
число выбираемых	$k=$	3	
число сочетаний C(*n*,*k*)	$C(n,k)=$	120	

В режиме формул это выглядит так:

количество сочетаний из *n* по *k*		
число объектов, *n*	*n* =	10
число выбираемых объектов, *k*	$k=$	3
число сочетаний C(*n*,*k*)	$C(n,k)=$	=ЧИСЛКОМБ(D4;D5)

Сочетание с повторениями в табличном процессоре MS Excel

Неупорядоченный набор элементов, содержащий k *элементов из данных* n, *причем один и тот же элемент может повторяться не более* k *раз, называется* ***сочетанием с повторениями***.

Число сочетаний с повторениями $\overline{C_n^k}$ *можно вычислить по формуле:*

$$\overline{C_n^k} = C_{k+n-1}^{n-1} = C_{k+n-1}^{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

Для вычисления в табличном процессоре MS Excel используем функцию

=ЧИСЛКОМБ(n+k−1;k).

Пример. *В книжном магазине есть книги трех различных авторов по социологии. Студенты собираются купить 10 книг, в качестве подарков для первокурсников. Сколько возможных вариантов выбора у них есть?*

Решение. Вводим n=3 – книги из трех авторов выбираются, k=10 – количество книг, которое необходимо выбрать. Получаем ответ: 220 способов.

количество сочетаний с повторениями из *n* по *k*		
число объектов, *n*	*n* =	10
число выбираемых	$k=$	3
число сочетаний с повторениями Ĉ(*n*,*k*)	$\hat{C}(n,k)=$	220

В режиме формул это выглядит так:

количество сочетаний с повторениями из *n* по *k*		
число объектов, *n*	$n =$	10
число выбираемых объектов, *k*	$k=$	3
число сочетаний с повторениями $\hat{C}(n,k)$	$\hat{C}(n,k)=C(n+k-1;k)$	=ЧИСЛКОМБ(D4+D5-1;D5)

ЛИТЕРАТУРА

1 Ахтямов, А.М. Математика для социологов и экономистов: учеб.пособие / А.М. Ахтямов. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.

2 Велько, О.А. Основы высшей математики для социологов: Учебно-методическое пособие / О.А. Велько, М.В. Мартон, Н.А. Моисеева. – Минск: БГУ, 2020. – 303 с.

3 Велько, О.А. Основы высшей математики и теории вероятностей: Учебно-методическое пособие / О.А. Велько, М.В. Мартон, Н.А. Моисеева. – Минск: БГУ, 2022. – 399 с.

4 Велько, О. А. Основы высшей математики и теории вероятностей: учебная программа УВО по учебной дисциплине по специальности 1-23 01 15 Социальные коммуникации [Электронный ресурс] / О.А. Велько // Белорусский государственный университет. – Минск, 2021. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/269619. – Дата доступа: 2.07.2021.

5 Велько, О.А. Основы высшей математики. Учебная программа УВО для специальности 1-23 01 05 Социология [Электронный ресурс] / О.А. Велько, Н.А. Моисеева // Белорусский государственный университет. – Минск, 2019. – Режим доступа:http://elib.bsu.by/handle/123456789/233274. – Дата доступа: 12.07.2019.

6 Велько, О. А. Основы высшей математики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-23 01 05 «Социология» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск: БГУ, 2020. – 257 с.: ил. – Библиогр.: с. 255–257. [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/241078. Дата доступа: 06.03.2020.

7 Еровенко, В. А. Основы высшей математики: типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В. А. Еровенко, М.В. Мартон, О.А. Велько // Типовая учебная программа располагается в коллекциях: Кафедра общей математики и информатики. [Электронный ресурс]. – 2019. – Режим доступа: –http://elib.bsu.by/handle/123456789/218164.

8 Еровенко, В.А. Избранные главы курса «Основы высшей математики» для философов: Методическое пособие для студентов-заочников / В.А. Еровенко, М.В. Мартон. – Минск: БГУ, 2009. – 68 с.

9 Еровенко, В.А. Основы высшей математики: типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В.А. Еровенко, С.Н. Сиренко, О.А. Велько // Основы высшей математики. Основы информационных технологий: типовые учебные программы для высших учебных

заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В.А. Еровенко [и др.]; под ред. В.А. Еровенко. – Минск: БГУ, 2009. – С. 5–14.

10 Еровенко, В.А. Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры: курс лекций / В.А. Еровенко. – Минск: БГУ, 2006. – 175 с.

11 Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч2. – М.: Высшая школа, 1982.

12 Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Физматлит, 2001. – 256 с.

13 Леонов, Н.Н. Математическая социология: структурно-аппроксимационный подход / Н.Н. Леонов. – Минск, «ООО ФУАинформ», 2002. – 220 с.

14 Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / К.Н. Лунгу и [и др.]. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 576с.

15 Малыхин В.И. Математика в экономике. – М.: Инфра-М, 2001.

16 Мацкевич, И.П. Математические методы в психологии / И.П. Мацкевич, О.А. Велько, Е.В. Воронкова, С.Л. Гуринович. – 3-е изд. – Минск: МИУ, 2009. – 188 с.

17 Моисеева, Н. А. Основы высшей математики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-23 01 15 «Социальные коммуникации» / Н. А. Моисеева, О. А. Велько; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск: БГУ, 2020. – 193 с.: ил. – Библиогр.: с. 191–193. [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/241081. Дата доступа: 06.03.2020.

18 Моисеева, Н. А. Основы высшей математики и теории вероятностей : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-23 01 15 «Социальные коммуникации» [Электронный ресурс] / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2021. – 239 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 238–239. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/274772: 26.01.2022.

19 Путькина, Л. В. Информатика и математика для гуманитарных вузов : учеб.пособие / Л. В. Путькина, Т. Г. Пискунова, Т. Б. Антипова. – Санкт-Петербург : СПбГУП, 2014. – 236 с. : ил.

20 Суходольский, Г.В. Лекции по высшей математике для гуманитариев: учеб. пособие / Г.В. Суходольский. – Харьков: Изд-во Гуманитарный Центр, 2001. – 248 с.