Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики и информатики

О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева

Элементы теории вероятностей

Учебно-методическое пособие

Минск
БГУ
2023

УДК 519.2(075.8)
В 282

Решение о депонировании вынес:
Совет механико-математического факультета
Протокол № 6 от 28 февраля 2023 года

Авторы:
Велько Оксана Александровна, старший преподаватель;
Мартон Марина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент;
Моисеева Наталья Александровна, старший преподаватель.

Рецензенты:
Барвенов С.А., доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Механико-математического факультета БГУ, кандидат физико-математических наук, доцент;
Гулина О.В., заместитель декана факультета экономики и менеджмента учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

Велько, О. А. Элементы теории вероятностей : учебно-методическое пособие / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 104 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 99–101.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов факультета философии и социальных наук БГУ специальностей «Социология», «Социальные коммуникации». Каждая тема содержит исторические сведения, теоретический материал, примеры решения, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. Многие математические понятия иллюстрируются примерами из социологии и экономики.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня мы не можем отрицать наличие междисциплинарных связей между социологией и математикой. И в последние годы эта связь становится все более тесной и многоплановой. Изучение математики будущими социологами и специалистами по социальным коммуникациям, а также применение ими современных математических методов анализа социальной реальности способствует более успешному формированию у студентов профессиональной компетентности, умению задействовать межпредметные связи, осуществлению преемственности в изучении математических понятий, развитию критического и прогностического мышления.

Математические методы уже давно и с успехом применяются в социальных науках. Процесс математизации науки необратим, он захватывает такие области знаний, в которых совсем недавно исключалась возможность использования математических методов исследования и измерений. Сегодня развитие теории и успешность практических приложений любой науки в значительной степени предопределяются мерой математизации данной области знаний. Математика занимает важное место в общественной жизни, культуре, науке и является одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса и информатизации современного общества. Изучение математики развивает познавательные способности и логическое мышление, а также влияет на изучение других дисциплин. Математические методы позволяют также систематизировать и классифицировать результаты исследований, определять сходство и различие между процессами взаимодействия в различных природных условиях, вероятностную зависимость между явлениями, выделять ведущие факторы, действующие на развитие процесса, создавать математические модели процессов или явлений в социологии.

Данное учебно-методическое пособие написано на основе опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математическим дисциплинам в течение ряда лет на факультете философии и социальных наук Белорусского государственного университета. В учебно-методическом пособии большое внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал, причем многие изучаемые математические понятия иллюстрируются приложениями из социологии. Некоторые задачи, разобранные и предложенные для самостоятельного решения, подобраны так, чтобы показать возможность применения математических знаний в сфере будущей профессиональной деятельности студентов. Еще одна особенность настоящего пособия в том, что авторы сочли полезным дать историческую справку, где кратко сообщается история развития изучаемых понятий, обсуждается их значимость в науке. Это кажется важным и актуальным, поскольку дает студенту представление о математике как области культуры человечества, знакомит с именами и историческими событиями, которые сопутствовали становлению математики.

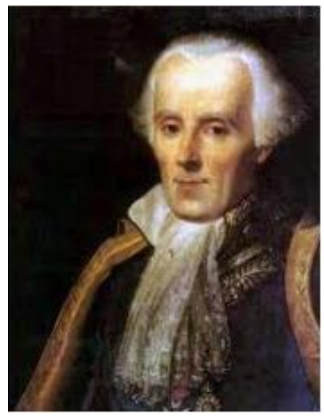
Традиционно считают, что использование математики в социальных науках выражается в получении только количественных характеристик. Такое понимание крайне упрощено, поскольку количественные определенности всегда связаны с качественными. Конкретные социологические исследования могут успешно развиваться и будут иметь практическое и теоретическое значение только в том случае, если они используют математические методы при анализе различных механизмов социальных процессов, а также при сборе и обработке первичной социальной информации. В практических задачах, маркетинговых исследованиях, опросах общественного мнения заказчику нужен достоверный результат, но достоверный результат требует статистической проверки. Таким образом, теория вероятностей и математическая статистика (ее продолжение) дают возможность сформулировать, что такое «существенное различие», «существенная зависимость», что позволяет избежать ненадежных выводов, изучить некоторые аспекты репрезентативности выборки, построить вероятностные модели социальных явлений.

.

1. ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Теория вероятностей возникла в середине XVII века. Первые работы по теории вероятностей, принадлежащие французским учёным Б. Паскалю и П. Ферма и голландскому учёному Х. Гюйгенсу, появились в связи с подсчётом различных вероятностей в азартных играх. Крупный успех теории вероятностей связан с именем швейцарского математика Я. Бернулли, установившего закон больших чисел для схемы независимых испытаний с двумя исходами.

А. Муавр (1667–1754)



П. Лаплас (1749–1827)

С. Пуассон (1781–1840)

Следующий период истории теории вероятностей (XVIII в. и начало XIX в.) связан с именами Абрахама де Муавра (Англия), Пьера Симона Лапласа (Франция), Карла Фридриха Гаусса (Германия) и Симеон Дени Пуассона (Франция). Это период, когда теория вероятностей уже находит ряд весьма актуальных применений в естествознании и технике (главным образом в теории ошибок наблюдений, развившейся в связи с потребностями геодезии и астрономии, и в теории стрельбы).

Третий период истории теории вероятностей, (вторая половина XIX в.) связан в основном с именами русских математиков П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова и А. А. Маркова (старшего). Теория вероятностей развивалась в России и раньше (в XVIII в. ряд трудов по теории вероятности был написан работавшими в России Л. Эйлером, Н. Бернулли и Д. Бернулли; во второй период развития теории вероятностей следует отметить работы М. В. Остроградского по вопросам теории вероятностей, связанным с математической статистикой, и В. Я. Буняковского по применениям теории вероятностей к страховому делу, статистике и демографии).

Наиболее распространённая в настоящее время логическая схема построения основ теории вероятностей разработана в 1933 советским математиком А. Н. Колмогоровым.

В Западной Европе во 2-й половине XIX в. получили большое развитие работы по математической статистике (в Бельгии – А. Кетле, в Англии – Ф. Гальтон) и статистической физике (в Австрии – Л. Больцман), которые наряду с основными теоретическими работами Чебышева, Ляпунова и Маркова создали основу для существенного расширения проблематики теории вероятностей в четвёртом (современном) периоде её развития. Этот период истории теории вероятностей характеризуется чрезвычайным расширением круга её применений, созданием нескольких систем безукоризненно строгого математического обоснования теории вероятностей, новых мощных методов, требующих иногда применения (помимо классического анализа) средств теории множеств, теории функций действительного переменного и функционального анализа.

В нашей стране период развития теории вероятностей тесно связан с деятельностью С.Н. Бернштейна, значительно обобщившего классические предельные теоремы Чебышева, Ляпунова и Маркова.

1.1 Случайные события

Основой всех точных исследований является наблюдение за поведением и признаками изучаемых объектов, которое может осуществляться с помощью соответствующего опыта или эксперимента.

Под ***опытом*** будем подразумевать однократное или многократное повторение некоторого действия. Осуществление такого опыта или эксперимента называется ***испытанием***. Различные результаты опыта назовем ***исходами***. Каждое испытание должно удовлетворять следующим условиям:

а) исход (результат) испытания точно неизвестен;

б) конечное множество всех исходов может быть определено до начала испытания;

в) испытание можно повторить неограниченное число раз при тех же условиях.

Игровые модели очень удобны для первоначального рассмотрения элементов теории вероятностей.

Пусть опыт состоит в многократном бросании игральной кости. Каждое отдельное бросание представляет собой испытание, а его результат (выпавшее число очков) – исход этого испытания. В этом случае исходами являются числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6. При бросании монеты могут быть два исхода: **О** – выпадение «орла» (герба) и **Р** – выпадение «решки» (цифры).

Определение события. Множество всех исходов испытания называется ***множеством (пространством) элементарных событий***, а ***событием*** – подмножество множества элементарных событий.

Определение случайного события. Событие, наступление или ненаступление которого в некотором испытании зависит от ряда случайных факторов, называется ***случайным событием***.

Пример. Испытание - студент сдает экзамен. Случайное событие - он получил оценку 10. Испытание - бросание монеты. Случайное событие - выпадение герба или цифры.

Множество (пространство) элементарных событий обозначается буквой Ω.

Рассмотрим испытание, которое может окончиться одним из n различных исходов $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, тогда

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\}.$$

Таким образом, любое подмножество пространства элементарных событий Ω будем называть случайным событием.

Замечание. *В теории множеств аналогом пространства элементарных событий Ω является универсальное множество* ***U****, а аналогами событий – множества, которые являются подмножествами* ***U****.*

Пример. Записать множество (пространство) элементарных событий испытания, состоящего в бросании 2 монет.

Решение. Множество элементарных событий данного испытания образуют исходы: (00) – на первой монете выпал «орел» и на второй тоже; (0Р) – на первой монете выпал «орел», а на второй «решка», (Р0) – на первой монете «решка», а на второй «орел», (РР) – на первой и на второй монетах «решки». Таким образом, $\Omega = \{(OO\};(OP);(PO);(PP)\}$.

В дальнейшем случайные события будем называть просто *событиями*. События обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C и т.д. или, когда их много $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Пример. Испытание - бросание игральной кости. Случайное событие - число очков, выпавшее на верхней грани кубика. Пространство элементарных событий $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Событие A – «выпало чётное число» – состоит из трех исходов, т.е. $A=\{2,4,6\}$.

В жизни мы постоянно встречаемся со случайными событиями. При многократном наблюдении случайных явлений в них самих можно заметить определенные закономерности.

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений. Это математическая наука, которая применяется к реальным явлениям, обладающим двумя свойствами : случайностью и массовостью.

Событие, которое всегда произойдет в данном опыте, называется ***достоверным.*** Достоверное событие совпадает со всем пространством элементарных событий, поэтому обозначается символом Ω.

Пример. Пусть в ящике находится 5 красных шаров. Тогда событие A – «из ящика извлекли красный шар» – достоверным, так как в ящике были только красные шары.

Событие называется ***невозможным,*** если в данном опыте оно заведомо не может произойти ни при одном испытании, и обозначается $\varnothing$.

Пример. Пусть в ящике находятся 5 красных шаров. Тогда событие B – «из ящика извлекли синий шар» будет невозможным, так как в ящике нет шаров синего цвета.

События, которые не могут произойти одновременно в рассматриваемом опыте, называются ***несовместными***.

Пример. При выборе 9 человек из 45 для социологического опроса события A – «выбрали 9 женщин» и B – «выбрали 9 мужчин» являются несовместными событиями.

Замечание. *В терминах теории множеств события А и В являются несовместными в данном опыте, если* $A \cap B = \varnothing$.

Два события называются ***противоположными***, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$.

Замечание. *В терминах теории множеств для события А и противоположного ему событию* $\overline{A}$ *верно равенство* $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Пример. Пусть испытанием является бросок баскетболиста по корзине, событие A – «баскетболист попал». Тогда $\overline{A}$ - «баскетболист не попал».

Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

1.2 Операции над событиями

Суммой двух событий A и B называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A, B и обозначаемое $A+B$ или $A \cup B$.

Аналогично ***суммой конечного числа событий*** A_1, A_2, $\ldots A_n$ называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i $i=1,2,\ldots,n$, и обозначаемое $A_1+A_2+\ldots+A_n$.

Пример. Пусть событие A – «светит солнце», а событие B – «дует ветер», тогда событие $A+B$ состоит из следующих явлений погоды: или светит солнце, но нет ветра; или дует ветер, но не светит солнце; или и светит солнце и дует ветер.

Рассмотрим *свойства операции суммы событий*:

1) $A+B=B+A$;

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

3) $A+\overline{A}=\Omega$;

4) $A+\Omega=\Omega$;

5) $A+\overline{\Omega}=A$;

6) $\overline{\overline{A}}=A$;

7) $A+A=A$.

Произведением двух событий A и B называется событие, состоящее в одновременном наступлении двух событий A и B и обозначается AB или $A\cap B$.

Аналогично произведением конечного числа событий A_1, A_2, $\ldots A_n$ называется событие, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события, и обозначается $A_1A_2\ldots A_n$.

Пример. Пусть событие A – «в аудиторию вошел студент», событие B – «в аудиторию вошел человек в очках». Тогда событие AB – «в аудиторию вошел студент в очках».

Рассмотрим *свойства операции произведения событий*:

1) $AB=BA$;

2) $A(BC)=(AB)C$;

3) для несовместных событий A и B имеет место равенство $AB=\varnothing$;

4) $A(B+C)=AB+AC$;

5) $A+BC=(A+B)(A+C)$;

6) $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$;

7) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$;

8) $AA=A$;

9) $A\Omega=A$.

Разностью событий A и B называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B, и обозначается $A\backslash B$.

Пример. Пусть подбрасывается игральная кость. Событие A – «выпадет чётное число очков», то есть $A=\{2,4,6\}$, событие B – «выпадет число очков, меньшее трёх», то есть $B=\{1,2\}$, тогда событие $A\backslash B$ – «выпадет чётное число очков, не меньшее трёх», т.е. $A\backslash B=\{4,6\}$.

Как показывают приведённые примеры, операции над событиями подобны операциям над множествами.

Элементарные события, входящие в подмножество A множества Ω, называют событиями, ***благоприятствующими наступлению события A.***

Пример. Пусть подбрасывается игральная кость. Событие A – «выпадет нечётное число очков». Этому событию благоприятствуют элементарные события из подмножества $\{1,3,5\}$ множества $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Говорят, что события A_1, A_2, $\ldots A_n$ образуют ***полную группу событий***, если они попарно несовместны и их сумма является достоверным событием:

1) $A_iA_j=\varnothing,\ \forall i,j=1,2,\ldots n;\ i\neq j$;

2) $A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega$.

Заметим, что события A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий.

Пример. Примеры полных групп событий: выпадение герба и выпадение цифры при одном бросании монеты; попадание в цель и промах при одном выстреле; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти, шести очков при одном бросании игральной кости.

1.3 Классическое определение вероятности

Каждому случайному событию A ставится в соответствие характеризующее возможность его появления в данном опыте число $P(A)$ (от первой буквы французского слова *probabilite* – вероятность), которое и называется ***вероятностью события** A*.

Вероятность – числовая характеристика степени возможности наступления какого-либо определенного случайного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз испытаниях.

Для определения классической вероятности нам потребуется понятие равновозможных исходов элементарных событий. Понятие равновозможных событий в математике не определяется, оно считается интуитивно ясным. Элементарные события, шансы появления которых одинаковы в данном испытании, будем называть ***равновозможными.***

Обычно понятие классической вероятности иллюстрируется на азартных играх потому, что здесь равновозможность прямо задана внешней или геометрической симметрией объекта – монеты, игральной кости, колоды карт и т.д.

Если монета ровная, неизогнутая, то можно ожидать, что при ее многократном бросании орел и решка будут выпадать одинаково часто, т. е. примерно в половине случаев будет выпадать орел, а в половине случаев – решка. Поэтому в условиях этого опыта, принято считать, что для такой монеты вероятность выпадения орла или решки равна $\frac{1}{2}$.

При многократном бросании идеально правильной игральной кости на долю каждого из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 будет приходиться примерно шестая часть общего числа испытаний, т. е. бросаний кости. Поэтому считают, что вероятность выпадения каждой грани, соответствующей числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, равна $\frac{1}{6}$. Какова в таком случае вероятность события A – «выпадение нечетного числа очков»? Поскольку имеется шесть одинаково возможных исходов, причем три из них (выпадение чисел 1, 3, 5) «благоприятствуют» событию A, то вероятность $P(A)$ можно считать равной $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Пусть пространство Ω состоит из конечного числа n равновозможных элементарных событий: $\Omega=\{\omega_1, \omega_2,\dots \omega_n\}$.

Определение. Под ***вероятностью*** $P(A)$ события A понимается отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу всех равновозможных исходов.

Если n – общее число всех равновозможных исходов испытания, а m – число исходов благоприятствующих наступлению события A, то по определению

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Это определение вероятности называется *классическим.*

Из определения вероятности события следуют её *простейшие свойства*.

1) Вероятность достоверного события Ω равна 1, так как все элементарные события являются благоприятствующими Ω, т. е. $m = n$:

$$P(\Omega)=1.$$

2) Вероятность невозможного события Ø равна 0, так как для невозможного события нет ни одного элементарного события, ему благоприятствующего, т. е. $m = 0$:

$$P(\varnothing)=0.$$

3) Вероятность любого события удовлетворяет неравенствам

$$0 \le P(A) \le 1,$$

так как $0 \le m \le n$.

При использовании формулы классической вероятности в решении конкретных задач числовые значения m и n, входящих в эту формулу, не всегда очевидны. Их нахождение требует применения основных правил и формул комбинаторики.

В теории вероятностей классическим является эксперимент с урной, из которой надо не глядя извлекать одинаковые шары разных окрасок. Вероятность при этом вводится просто: если в урне находится 30 шаров, 10 из которых белые, то вероятность извлечь белый шар равна $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

Пример. В урне находится 10 одинаковых по размеру шаров, из которых 4 красных и 6 синих. Наудачу извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется синим?

Решение. Обозначим через A событие «извлеченный шар синий». Имеем 10 равновозможных исходов, из которых 6 благоприятствуют событию A. Следовательно, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{10}=0,6.$

Пример. Найдите вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет четное число очков.

Решение. Для данного примера имеем: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{2,4,6\}$. Поэтому $m=3$, $n=6$ и $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$

Пример. Подбрасываются 2 симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах обеих монет оказались «решки»?

Решение. Обозначим через A – «на верхних сторонах обеих монет оказались “решки”». В этом испытании 4 равновозможных элементарных исхода: (О;О);

(О;Р); (Р;О); (Р;Р). Событию A благоприятствует 1 элементарный исход (Р;Р). Следовательно, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}=0,25.$

Рассмотрим, например, задачу о выборке, имеющую практические применения в разных областях знаний.

Задача о выборке. В урне всего n шаров, из них m белых и $(n-m)$ черных шаров. Из урны наудачу вынимается k шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых k шаров окажется l белых?

Исход этого испытания состоит в появлении любых k шаров из общего числа n шаров. В данном примере событие A – «среди вынутых k шаров окажется l белых». Поскольку нас не интересует порядок появления этих шаров, то число всех исходов равно числу сочетаний C_n^k. Заметим, что мы извлекаем не только l белых шаров, но и оставшиеся $k–l$ черных. Очевидно, что $0 \le l \le m$ и $0 \le k–l \le n–m$, в противном случае вероятность появления интересующего нас события равна 0. Извлечь l белых шаров из имеющихся в урне m белых шаров можно C_m^l способами. Соответственно, извлечь $k–l$ черных шаров из $n-m$ черных шаров можно C_{n-m}^{k-l} способами. По комбинаторному принципу умножения число благоприятных исходов для события A равно произведению $C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}$. Следовательно, искомая вероятность в задаче о выборке по формуле классической вероятности

$$P(A)=\frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k}.$$

Пример. В урне 8 шаров (5 белых и 3 черных). Какова вероятность того, что из четырех наугад выбранных шаров ровно один будет черный?

Решение. Так как число всех исходов определяется числом сочетаний из 8 по 4, то $n=C_8^4=\frac{8!}{4!\cdot 4!}=\frac{1\cdot 2\cdot ...\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70$ (так как мы выбираем 4 шара из 8 по одному, не возвращая их обратно). При благоприятном исходе один шар черный, а остальные три – белые (событие A). Черный шар можно выбрать $C_3^1=\frac{3!}{1!\cdot 2!}=3$ способами, а три белых шара, из оставшихся выбираемых четырёх, можно выбрать $C_5^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$ способами, так как белых шаров в урне 5. Таким образом, число благоприятных исходов m = 3·10=30. Значит, искомая вероятность $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{30}{70}\approx 0,429.$

Примеры решения задач

1. Опыт состоит в извлечении шара из урны, в которой находятся шары трех цветов (черные, белые и красные). Рассмотрим события A – «извлечен шар белого цвета»; B – «извлечен шар красного цвета»; C – «извлечен шар черного цвета». Что представляют собой события: $A+B$, $\overline{A+C}$, AB, $AC+B$?

Решение. Событие $A+B$ – это событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B. Следовательно, $A+B$ – «извлечен шар белого или красного цвета». Так как событие $A+C$ – «извлечен шар белого или черного цвета», то событие $\overline{A+C}$ – это событие, противоположное событию $A+C$, т.е. $\overline{A+C}$ – «извлечен шар не белого и не черного цвета», а значит он «красного цвета». Событие AB – невозможное событие, поскольку шар одновременно не может быть белого и красного цвета. Событие $AC+B$ – это сумма невозможного события AC и события B, равная событию B, т.е. $AC+B$ – «извлечен шар красного цвета».

2. Некоторые клиенты банка приходят в банк брать проценты с вклада. Сейчас в банке ожидают своей очереди обслуживания 4 человека. Что собой представляют события – брать проценты будут: а) четыре человека; б) три человека; в) два человека; г) один человек; д) хотя бы два человека; е) хотя бы один человек?

Решение. Обозначим события:

A_1 – «первый клиент пришел брать проценты»;

A_2 – «второй клиент пришел брать проценты»;

A_3 – «третий клиент пришел брать проценты»;

A_4 – «четвертый клиент пришел брать проценты».

Тогда противоположными для каждого из них будут события:

$\overline{A_1}$ – «первый клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_2}$ – «второй клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_3}$ – «третий клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_4}$ – «четвертый клиент не будет брать проценты».

Обозначим также события:

B – «пришли брать проценты с вклада четыре человека», тогда $B = A_1A_2A_3A_4$;

C – «пришли брать проценты с вклада три человека», тогда $C = A_1A_2A_3\overline{A_4} + A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + \overline{A_1}A_2A_3A_4$;

D – «пришли брать проценты с вклада два человека», тогда $D = A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} + A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4$;

E – «пришел брать проценты с вклада один человек» $E = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4$.

F– «хотя бы два человека пришли брать проценты с вклада». Событие F означает также, что пришли брать процент с вклада либо два, либо три, либо все четыре человека, т.е. $F = D+C+B$.

H– «хотя бы один человек пришел брать проценты с вклада». Событие H означает также, что пришли брать процент с вклада либо один, либо два, либо три, либо все четыре человека, т.е. $H = B+C+D+E$ или $H = F+E$.

3. На трех одинаковых карточках написаны буквы И, М, Р. Карточки тщательно перемешивают, наудачу извлекают три карточки и выкладывают их в порядке появления. Найдите вероятность того, что составится слово МИР.

Решение. Обозначим через A событие, которое состоит в том, что в результате извлечения карточек получится слово МИР. У данного опыта шесть равновозможных исходов: «получено слово ИМР», «получено слово ИРМ», «получено слово МИР», «получено слово МРИ», «получено слово РМИ», «получено слово РИМ». Из них только один исход благоприятствует событию A. Следовательно, число n=6, число m=1. Вычисляем $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}$.

4. Какова вероятность появления слова ДВА, если наугад выбираются три карточки из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д и располагаются в ряд в порядке появления?

Решение. Число всех исходов испытания состоит в выборе трёх букв из имеющихся пяти, при этом важен порядок появления букв, поэтому по формуле для числа размещений их всего $A_5^3=\frac{5!}{2!}=3\cdot4\cdot5=60$. Благоприятный исход для появления слова ДВА всего один исход. Следовательно, искомая вероятность равна $P(A)=\frac{1}{A_5^3}=\frac{1}{60}\approx0,02$.

5. Для участия в лотерее на карточке, содержащей 49 чисел, нужно отметить 6 чисел. Затем эти числа сверяются с 6 числами, отобранными случайным образом. В зависимости от числа совпавших номеров выплачивается выигрыш. Какова вероятность угадать в лотерее 6 чисел из 49?

Решение. Число всех элементарных исходов − это число всех сочетаний из 49 чисел по 6. Столько существует различных вариантов заполнения карточки, и каждый из них имеет одинаковый шанс стать выигрышным. Благоприятствует выигрышу только одно событие: «номер на карточке совпал с отобранным номером». Следовательно, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{C_{49}^6}\approx\frac{1}{14\,000\,000}$.

6. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Какова вероятность того, что среди 5 взятых наудачу деталей стандартных будет 4?

Решение. A – событие, состоящее в том, что «из 5 взятых наудачу деталей стандартных будет 4». Чтобы определить $P(A)$, надо воспользоваться формулой $P(A)=\frac{m}{n}$.

Опыт состоит в извлечении 5 деталей из 10 имеющихся, значит общее число n возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно выбрать 5 элементов из 10, т.е. $n=C_{10}^5$.

Определим число m исходов, благоприятствующих событию A. 4 из 8 стандартных деталей можно извлечь $m_1=C_8^4$ способами. Оставшиеся детали выборки должны быть нестандартными, их будет 5–4=1, тогда 1 нестандартная деталь из имеющихся 10–8=2 может быть извлечена $m_2 = C_2^1$ способами. Тогда по комбинаторному принципу умножения число m благоприятствующих исходов равно: $m = m_1 \cdot m_2 = C_8^4 \cdot C_2^1$.

Искомая вероятность равна отношению числа m исходов, благоприятствующих данному событию, к числу n всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n} = \frac{C_8^4 \cdot C_2^1}{C_{10}^5} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{5}{9} \approx 0,56.$$

7. На полке стоит 10 книг, из них 6 книг по высшей математике и 4 книги по социологии. Какова вероятность взять книгу по высшей математике, если наудачу берется только 1 книга?

Решение. В этой задаче n = 10 – это число всех равновозможных исходов испытания, а именно количество книг, m = 6 – это число исходов, благоприятствующих событию A – «выбрана книга по высшей математике». Поэтому по формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

8. Брошены 2 игральные кости. Найдите вероятность следующих событий: а) сумма выпавших очков равна 7; б) сумма выпавших очков равна 8, а разность – 4.

Решение. Для случая а) n = 36, так как число равновозможных исходов испытания состоит из числа различных комбинаций очков на первой и второй игральных костях. Для первой кости возможны 6 вариантов от 1 до 6, для второй аналогично 6 вариантов, следовательно, для первой и второй костей, согласно комбинаторному принципу умножения будет 36 исходов. Число благоприятных исходов m, т. е. сумма выпавших очков равна 7, состоит из следующих вариантов: (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3), т. е. m = 6, и поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Для случая б) как и для случае а), n = 36. Число благоприятных исходов m, т. е. сумма выпавших очков равна 8, а разность 4, состоит из следующих двух вариантов: (2, 6), (6, 2), т. е. m = 2, и поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

9. Из колоды, состоящей из 36 карт, наудачу вытаскивается 6 карт. Какова вероятность того, что среди вытянутых карт окажется 1 король и 2 дамы?

Решение. Для решения этой задачи можно применить *общую схему задачи о выборке*. Событие A – «среди вытянутых 6 карт окажется 1 король и 2 дамы». Число всех исходов равно числу сочетаний из 36 по 6, то есть C_{36}^6. Вытянуть 1 короля из 4 королей, имеющихся в колоде, можно C_4^1 способами, а 2 дам из 4 дам, соответственно, C_4^2 способами. Кроме того, вытягиваются еще 3 карты из 36 – 4 – 4 = 28 карт, не содержащих ни королей, ни дам, что можно сделать C_{28}^3 способами. Таким образом, согласно комбинаторному принципу умножения, число благоприятных исходов для события A равно произведению $C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{28}^3$. Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{28}^3}{C_{36}^6} = \left(\frac{4!}{1!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{3!}\right) / \left(\frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{6!}\right) \approx 0,04.$$

10. Из урны с шарами, на которых написаны буквы, составляющие слово СОЦИОЛОГИЯ, выбирают наугад последовательно 4 шара и выкладывают один за другим в порядке их появления. Какова вероятность того, что при этом получится слово СОЛО?

Решение. Число всех равновозможных исходов этого испытания – это число всех 4-х буквенных «слов», составленных из 9 «растождествленных» букв Ф$_1$, Ф$_2$, И$_1$, И$_2$ Л$_1$, О$_1$, О$_2$, С$_1$, Я$_1$, число которых равно числу размещений $A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$. Число благоприятных исходов составления слова СОЛО равно числу $A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_2^1 = 2$, где A_1^1 = 1 – это число размещений для букв С и Л, и A_2^1 = 2 – это число размещений для 2 из 2 букв О. Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_2^1}{A_9^4} = \frac{2}{3024} = \frac{1}{1512}.$$

Это вариант задачи об «упорядоченной» выборке.

Задачи для самостоятельного решения

1. Подбрасываются 2 игральных кубика, подсчитываются суммы выпавших очков. Запишите полную группу событий в этом опыте.

2. Являются ли несовместными следующие события: а) опыт – подбрасывание симметричной монеты, события: A – «появление герба», B – «появление цифры»; б) опыт – два выстрела по мишени, события: A – «хотя бы 1 попадание», B – «хотя бы 1 промах».

3. Образуют ли полную группу событий следующие события: а) опыт – подбрасывание симметричной монеты, события: A – «появление герба», B – «появление цифры»; б) опыт – подбрасывание 2 симметричных монет, события: A – «появление 2 гербов», B – «появление 2 цифр»?

4. Пусть A, B и C – случайные события. Что означают события: $\overline{A}BC$; $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$?

5. Пусть A, B и C – случайные события. Покажите, что:

а) $A + AB + BC + \overline{A}C = A + C$; б) $AB + \overline{A}B + A\overline{B} = A + B$.

6. Пусть A, B и C – случайные события. Запишите выражения для следующих событий: а) произошло только событие A; б) произошли события A и B, но не произошло событие C; в) произошли все 3 события; г) произошло по крайней мере 1 из этих событий; д) произошли по крайней мере 2 события; е) произошло 1 и только 1 событие; ж) произошли два и только два события; з) ни 1 событие не произошло; и) произошло не более двух событий.

7. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

8. Подбрасываются 2 игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее: получить в сумме 7 или 8 очков?

9. Подбрасываются 3 симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах монет выпало 2 герба?

10. В урне имеется 7 черных и несколько белых шаров. Какова вероятность вытащить белый шар, если вероятность вытащить черный шар равна 1/6? Сколько белых шаров в урне?

11. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу 4 карты. Найдите вероятность следующих событий:

A – «в полученной выборке все карты бубновой масти»;

B – «среди выбранных 4 карт окажутся 2 туза»;

C – «среди выбранных 4 карт окажется бубновый туз».

12. В ящике находится 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу извлекают 6 шаров. Какова вероятность того, что извлечены 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?

13. Из букв разрезной азбуки составлено слово «РЕМОНТ». Карточки с отрезными буквами тщательно перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова «МОРЕ»?

14. Из 30 экзаменационных билетов по дисциплине «Социология» студент может ответить на 24 билета. Какова вероятность его успешного ответа на экзамене при однократном извлечении билета?

15. Из карточек, из которых составлено слово ДИСПЛЕЙ, случайным образом выбраны 3 карточки и выложены в ряд в порядке их извлечения. Какова вероятность, что они образовали слово ЛЕС?

16. Студент из 30 вопросов к экзамену по дисциплине «Высшая математика» хорошо усвоил 24 вопроса. Какова вероятность того, что студент знает оба из доставшихся ему вопросов при ответе на экзамене?

17. На 9 вакантных мест по определенной специальности претендуют 15 безработных, состоящих на учете в службе занятости, из них 7 женщин, остальные мужчины. Какова вероятность того, что из 9 случайно отобранных безработных окажется 5 женщин?

18. В старинной игре в кости необходимо было для выигрыша получить при бросании 3 игральных костей сумму очков, превосходящую 10. Найдите вероятности: а) при бросании 3 игральных костей выбросить сумму очков равную 11; б) при бросании 3 игральных костей выбросить сумму очков равную 12.

19. В урне 15 шаров, из них 5 красных, 8 зеленых и 2 синих. Из урны наудачу извлекают шар. Какова вероятность того, что извлечённый шар будет зеленым?

20. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе все цифры будут одинаковые?

21. Все натуральные числа от 1 до 20 записаны на одинаковых карточках. Наугад вытаскивают одну карточку. Какова вероятность того, что: а) число на этой карточке будет кратно 5; б) число на этой карточке будет четным?

22. Участник лотереи «Спортлото» из 36 видов спорта должен назвать 5 видов спорта. Какова вероятность того, что будет угадано 3 вида спорта?

23. Из колоды в 52 карты наугад извлекаются 4 карты. Найдите вероятность того, что среди извлечённых карт окажется 2 туза.

24. На 6 одинаковых по форме и размерам карточках написаны буквы А, Л, А, Т, Т, Н. Какова вероятность того, что при случайном расположении карточек в ряд получится слово «ТАЛАНТ»?

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется опытом, испытанием?

2. Что называют событием?

3. Какое событие называют достоверным, невозможным, случайным в данном опыте?

4. Какие события называются несовместными в данном опыте?

5. Какие события считают равновозможными?

6. Какие события образуют полную группу событий?

7. Какие исходы благоприятны для данного события?

8. Что называют суммой двух событий?

9. Что называют произведением двух событий?

10. Что называют разностью двух событий?

11. Что называют вероятностью события?

12. Чему равна вероятность достоверного события?

13. Чему равна вероятность невозможного события?

2. Основные теоремы теории вероятностей

2.1 Теоремы сложения вероятностей

Теорема сложения вероятностей двух событий. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Доказательство. Используем классическое определение вероятности. Пусть $|\Omega|=n$ – общее число элементарных событий; m_1 – число элементарных событий, благоприятствующих событию A; m_2 – число элементарных событий, благоприятствующих событию B; l – число элементарных событий, благоприятствующих событию AB. Тогда

$$P(A)=\frac{m_1}{n},\ P(B)=\frac{m_2}{n},\ P(AB)=\frac{l}{n},$$

Событию $A+B$ будут благоприятствовать $m_1+m_2-\ l$ элементарных событий. Действительно, складывая числа m_1 и m_2 элементарных событий, благоприятствующих событиям A и B соответственно, мы дважды считаем элементарные события, благоприятствующие событию AB.

Поэтому при подсчете числа элементарных событий, благоприятствующих событию $A+B,$ значение l необходимо исключить. Таким образом,

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2-l}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{l}{n}=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Теорема доказана.

Пример. Подбрасывается игральный кубик. Найдите вероятность того, что на верхней грани выпадет четное или кратное трем число.

Решение. Введем обозначения событий: A – «выпало четное число»; B – «выпало число, кратное трем». Тогда AB – событие, состоящее в том, что выпало четное число, кратное трем.

$P(A)=\dfrac{3}{6}$ (всего исходов в этом испытании 6, исходов благоприятствующих событию A, 3: выпало либо 2, либо 4, либо 6 очков).

$P(B)=\dfrac{2}{6}$ (исходов благоприятствующих событию B, 2: может выпасть либо 3, либо 6 очков).

$P(AB)=\dfrac{1}{6}$ (имеем 1 благоприятствующий событию AB исход: так как четное число, кратное трем, то это 6).

По теореме сложения вероятностей двух событий $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ имеем

$$P(A+B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

Если события A и B являются *несовместными*, то $AB=\varnothing$ и тогда $P(AB)=0$ и имеет место следующая теорема.

Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Пример. Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии $P(A)=0{,}4$, а того, что он произведен в Турции, – $P(B)=0{,}3$. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран: или в Италии, или в Турции?

Решение. События A – «товар произведен в Италии» и B – «товар произведен в Турции» несовместны, так как появление одного исключает другое. По теореме сложения вероятностей двух несовместных событий имеем

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}4+0{,}3=0{,}7.$$

Пример. При бросании двух игральных костей событие A – «выпало 5 очков» и событие B – «выпало 10 очков» несовместны. Событие $A+B$ – «выпало число очков, кратное 5» можно вычислить по теореме сложения двух несовместных событий.

Решение. Всего исходов в этом испытании по комбинаторному правилу умножения равно $6 \cdot 6 = 36$. Благоприятных исходов для события A всего четыре – это выпадение в двух бросаниях очков (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), а для события B три благоприятных исхода – это (4, 6), (6, 4), (5, 5). Поэтому

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{36}+\frac{3}{36}=\frac{7}{36}.$$

Теорема сложения вероятностей *n* несовместных событий. Вероятность суммы n попарно несовместных событий (т.е. никакие два из них не могут произойти одновременно) $A_1, A_2,\ldots,A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Следствие. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2,\ldots,A_n$ образующих полную группу, равна единице.

Действительно, по теореме сложения вероятностей n несовместных событий имеем

$$P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\ldots+P(A_n)=P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(\Omega)=1..$$

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Действительно, события A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий, откуда в силу предыдущего следствия и вытекает равенство $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Замечание: *Вероятность противоположного события равна разности между единицей и вероятностью события A:*

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Пример. Вероятность бесперебойной работы компьютера равна 0,9. Какова вероятность того, что при работе компьютер даст сбой?

Решение. Событие A – «компьютер работает бесперебойно», тогда противоположное ему событие $\overline{A}$ – «при работе компьютер даст сбой». По формуле $P(\overline{A})=1-P(A)$, где $P(A)$ = 0,9. Тогда $P(\overline{A})$= 1 – 0,9 = 0,1.

2.2 Теоремы умножения вероятностей

В ряде случаев приходится рассматривать вероятность некоторого события A, которая зависит от того, произошло или не произошло другое случайное событие B.

Прежде чем давать точное определение условной вероятности, рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть в корзине находится 8 белых и 4 черных шара, вынимаются наудачу один за другим 2 шара. B – «первый вынутый шар белый», A – «второй вынутый шар белый».

Решение. Очевидно, что $P(B)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$. Вероятность события A в этом испытании зависит от того, произошло событие B или противоположное событие $\overline{B}$. Если событие B произошло, то среди оставшихся 11 шаров только 7 белых и поэтому вероятность события A будет равна $P(A)=\frac{7}{11}$. Если событие B не произошло, а произошло противоположное событие $\overline{B}$, т. е. первый шар оказался черный, то среди оставшихся 11 шаров будет 8 белых и поэтому вероятность события A, в этом случае, равна $P(A)=\frac{8}{11}$.

Таким образом, вероятность события A зависит от того, произошло или не произошло событие B, это условная вероятность.

Определение условной вероятности. Пусть вероятность события B – положительная величина, т. е. $P(B) > 0$. Вероятность события A при условии, что произошло событие B, называется **условной вероятностью события** $\boldsymbol{A}$ и обозначается $P(A|B)$.

Пусть $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$, событию A благоприятствуют m элементарных событий, событию B – k элементарных событий, а событию AB – l элементарных событий $(l\le m, l\le k, m\ne 0, k\ne 0)$. Если событие B произошло, то в этой ситуации возможны лишь те k элементарных событий, которые благоприятствовали событию B, причем l из них, очевидно, благоприятствуют событию A. Таким образом,

$$P(A|B)=\frac{l}{k}=\frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично,

$$P(B|A)=\frac{l}{m}=\frac{\frac{l}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Дадим теперь общее определение условной вероятности события, применимое не только для классической вероятности.

Пусть вероятность события B – положительная величина, т. е. $P(B) > 0$. Условной вероятностью события A, при условии, что произошло событие B, называют число

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично, если $P(A)>0$, то условной вероятностью события B при условии, что произошло событие A, называют число

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Теорема умножения вероятностей. Пусть $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, тогда вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло

$$P(AB)=P(A)P(B|A);$$
$$P(AB)=P(B)P(A|B).$$

Пример. В читальном зале имеется 6 учебников по социологии, из которых 3 учебника в переплёте. Библиотекарь берёт наудачу последовательно 2 учебника. Найдите вероятность того, что оба взятых библиотекарем учебника окажутся в переплёте.

Решение. Введём обозначение событий: A – «первый учебник в переплёте», B – «второй учебник в переплёте» Так как события зависимые, то по теореме умножения вероятностей вероятность того, что оба учебника в переплёте,

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}=0,2.$$

Теорема умножения вероятностей *n* событий. *Пусть* $P(A_1A_2\ldots A_{n-1}) > 0$, тогда справедлива формула:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}),$$

т.е. вероятность произведения n событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие события имели место.

Пример. Студент–заочник знает ответы на 10 тестовых вопросов из 15 вопросов. Пусть они для него будут «счастливые». Предположим, что 4 вопроса задаются лектором последовательно один за другим. Найдите вероятность того, что 4 заданных подряд вопроса – «счастливые».

Решение. Введем обозначения событий: A_1 – «первый вопрос счастливый», A_2 – «второй вопрос счастливый», A_3 – «третий вопрос счастливый», A_4 – «четвертый вопрос счастливый». По теореме умножения вероятностей n событий искомая вероятность

$$P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)=\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}=\frac{2}{13}\approx 0{,}154.$$

Если $P(B|A)=P(B)$, то событие B называется ***независимым от события*** A, то есть вероятность события B не зависит от того, произошло или нет событие A.

Независимость является свойством взаимным, т.е. если справедливо $P(B|A)=P(B)$, то справедливо и $P(A|B)=P(A)$, поэтому можно говорить просто о *независимых событиях* A и B.

Замечание: *Если события A и B независимы, то независимы также будут события A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.*

Теорема умножения вероятностей двух независимых событий. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Пример. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. После первого вынимания шар возвращается в урну, и шары в урне перемешиваются. Найдите вероятность того, что оба шара белые.

Решение. В данном случае события A – «первый шар белый» и B – «второй шар белый» независимы, а тогда искомая вероятность

$$P(AB)=P(A)\,P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}=0{,}16.$$

События $A_1,\ A_2,\dots,A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, если вероятность наступления любого из них не зависит от того наступила или нет любая комбинация остальных.

Другими словами события $A_1,\ A_2,\dots,A_n$ называются ***независимыми в совокупности*** или ***независимыми***, если для любого подмножества индексов $\{i_1,i_2,\dots,i_n\}\subseteq\{1,2,\dots,n\}$ выполняется равенство

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_n})=P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdot\dots P(A_{i_n}).$$

Замечание: *Если независимы события A_1, $A_2,\ldots,A_n$, то независимы будут также события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$.*

Теорема умножения вероятностей *n* независимых событий. Если события $A_1,A_2,\ldots,A_n$ независимы в совокупности, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots P(A_n).$$

Замечание: *Вероятность наступления события A, состоящего в появлении хотя бы одного из событий A_1, $A_2,\ldots,A_n$, независимых в совокупности, находится по формуле*:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\ldots P(\overline{A}_n),$$

где $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Пример. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом справочнике, равна 0,8, во втором – 0,7, в третьем – 0,6. Найдите вероятность того, что формула содержится хотя бы в одном справочнике.

Решение. Рассмотрим событие A – «формула содержится хотя бы в одном справочнике». Введем независимые события: A_1 – «формула есть в первом справочнике», A_2 – «формула есть во втором справочнике», A_3 – «формула есть в третьем справочнике».

По условию $P(A_1)=0{,}8$; $P(A_2)=0{,}7$; $P(A_3)=0{,}6$, тогда $P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=0{,}2$; $P(\overline{A}_2)=1-P(A_2)=0{,}3$; $P(\overline{A}_3)=1-P(A_3)=0{,}4$.

Применим формулу $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\ldots P(\overline{A}_n)$ и получим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}976.$$

Примеры решения задач

1. В урне 15 голубых, 10 зеленых и 25 белых шаров. Найдите вероятность того, что из урны наугад будет извлечен цветной шар.

Решение. Извлечение цветного шара означает появление либо голубого, либо зеленого шара. Пусть событие A означает «появление голубого шара», B – «появление зеленого шара». Тогда

$$P(A) = \frac{15}{15+10+25} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10},\ \ P(B) = \frac{10}{15+10+25} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}.$$

Так как события A и B несовместны, то по теореме сложения вероятностей двух несовместных событий имеем

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2}.$$

2. Бросают две игральные кости. Какова вероятность выпадения хотя бы одной шестерки?

Решение. Пусть событие A – «выпадение 6 на первой кости», событие B – «выпадение 6 на второй кости». Очевидно, что $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(AB)=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$, поэтому по теореме сложения вероятностей двух событий имеем

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

3. Студент первого курса факультета философии и социальных наук выучил 10 вопросов из 30 по курсу «Высшей математики». Каждый билет состоит из 3 вопросов, распределенных случайным образом. Найдите вероятность того, что студент ответит хотя бы на один вопрос из вытянутого наугад билета.

Решение. Рассмотрим событие A – «студент ответит хотя бы на один вопрос из билета». Тогда противоположное ему событие $\bar{A}$ – «студент не ответит ни на один вопрос из билета», и выполняется равенство $P(A)+P(\bar{A})=1$. Так как порядок вопросов в билетах несущественен, то общее количество исходов такого испытания равно количеству способов выбора 3 вопросов из всех 30 вопросов, т. е. $n=C_{10}^{3}$. Поскольку студент выучил 10 вопросов по курсу «Высшей математики», то $30-10=20$ вопросов остались невыученными. Значит, количество благоприятствующих исходов для события $\bar{A}$ равно числу способов выбора 3 вопросов из 20 вопросов, не выученных студентом, т. е. $m=C_{20}^{3}$ Поэтому по классическому определению вероятности имеем

$$P(\bar{A})=\frac{m}{n}=\frac{C_{20}^{3}}{C_{30}^{3}}=\frac{20!}{3!\cdot 17!}\cdot\frac{3!\cdot 27!}{30!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{30\cdot 29\cdot 28}=\frac{19\cdot 3}{29\cdot 7}=\frac{57}{203}.$$

Следовательно, вероятность того, что студент ответит хотя бы на один вопрос из вытянутого наугад билета, равна $P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{57}{203}=\frac{146}{203}$.

4. 30 экзаменационных билетов по курсу «Высшей математики» пронумерованы числами от 1 до 30. Билеты тщательно перемешаны. Какова вероятность вытянуть наудачу студенту–социологу билет с номером, кратным 2 или 3?

Решение. Обозначим события: A – «вытянут билет с четным номером», событие B – «вытянут билет с номером, кратным 3», событие AB – «вытянут билет с четным номером, кратным 3». Найдем вероятность искомого события $A+B$. Поскольку события A и B – это совместные события, то вероятность события $A+B$ находим по теореме сложения вероятностей двух событий $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Событию A благоприятствуют 15 исходов, событию B – всего 10 исходов, а событию AB – только 5 исходов. Поэтому искомая вероятность

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{15}{30}+\frac{10}{30}-\frac{5}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}\approx 0{,}667.$$

5. Из урны, в которой 10 черных и 5 белых шаров, вынимают 2 шара. Чему равна вероятность того, что; а) оба шара черные; б) оба шара белые; в) шары разного цвета?

Решение. Пусть событие A_1 – «первый шар черный», A_2 – «второй шар черный», B_1 – «первый шар белый», B_2 – «второй шар белый». Тогда

$$P(A_1)=\frac{10}{10+5}=\frac{2}{3},\ P(B_1)=\frac{5}{10+5}=\frac{1}{3}.$$

Найдем условные вероятности:

$P(A_2|A_1)=\dfrac{10-1}{15-1}=\dfrac{9}{14}$ (второй шар был черным, если первый был черным);

$P(B_2|B_1)=\dfrac{5-1}{15-1}=\dfrac{4}{14}=\dfrac{2}{7}$ (второй шар был белым, если первый был белым);

$P(A_2|B_1)=\dfrac{10}{15-1}=\dfrac{10}{14}=\dfrac{5}{7}$ (второй шар был черным, если первый был белым);

$P(B_2|A_1)=\dfrac{5}{15-1}=\dfrac{5}{14}$ (второй шар был белым, если первый был черным).

Отсюда находим искомые вероятности:

а) $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{14}=\dfrac{3}{7}$;

б) $P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2|B_1)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{7}=\dfrac{2}{21}$;

в) $P(A_1B_2+B_1A_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{14}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5}{7}=\dfrac{10}{21}$.

6. Брошены последовательно 3 монеты. Определить вероятности следующих событий: A – «выпадение герба на первой монете», B – «выпадение хотя бы одной решки». Проверить, выполняется ли равенство $P(AB)=P(A)P(B)$.

Решение. Найдем вероятности этих событий. Очевидно, что $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(\overline{B})=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$. Далее воспользуемся формулой о том, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е. $P(B)=1-P(\overline{B})$. Тогда $P(B)=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$. Найдем вероятность произведения событий A и B, т.е. $P(AB)$ − вероятность события, состоящего в одновременном появлении герба на первой монете и выпадения хотя бы одной решки:

$$P(AB)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}.$$

Далее $P(A)\ P(B)=\dfrac{7}{16}\neq\dfrac{3}{8}=P(AB)$. Следовательно равенство $P(AB)=P(A)P(B)$ не выполняется.

7. Вероятность попадания каждого из трех стрелков соответственно равна: 0,8; 0,7; 0,9. Стрелки произвели один залп. Найдите вероятность: а) только одного попадания; б) ровно двух попаданий; в) хотя бы одного попадания.

Решение. Пусть A_i – «попадание в мишень при i-м выстреле», $\overline{A_i}$ – «непопадание в мишень при i-м выстреле» i=1,2,3.

Так как $P(A_1)$=0,8; $P(A_2)$=0,7; $P(A_3)$=0,9, то $P(\overline{A}_1)=1-0,8=0,2$; $P(\overline{A}_2)=1-0,7=0,3$; $P(\overline{A}_3)=1-0,9=0,1$.

а) обозначим событие A – «ровно одно попадание в мишень». Оно распадается на три несовместных события: может быть попадание при первом выстреле, промахи при втором и третьем; попадание при втором, промахи при первом и третьем; попадание при третьем, промахи при первом и втором. Тогда

$$A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Учитывая, что события $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3,\ \overline{A}_1A_2\overline{A}_3,\ \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ – несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), то из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$P(A)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=$$
$$=0,8\cdot0,3\cdot0,1+0,2\cdot0,7\cdot0,1+0,2\cdot0,3\cdot0,9=0,092;$$

б) обозначим событие B – «ровно два попадания в мишень». Оно распадается на три несовместных события: может быть попадание при первом и втором выстрелах, промах при третьем; попадание при первом и третьем, промах при втором; попадание при втором и третьем, промах при первом. Тогда

$$B=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3.$$

Учитывая, что $A_1A_2\overline{A}_3,\ A_1\overline{A}_2A_3,\ \overline{A}_1A_2A_3$ – несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$P(B)=P(A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)=$$
$$=0,8\cdot0,7\cdot0,1+0,8\cdot0,3\cdot0,9+0,2\cdot0,7\cdot0,9=0,398;$$

в) Обозначим событие C – «ровно три попадания в мишень»; событие D – «хотя бы одно попадание в мишень», тогда D=A+B+C.

Найдем вероятность события $C=A_1A_2A_3$:

$$P(C)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0,8\cdot0,7\cdot0,9=0,504.$$

Получаем

$$P(D)=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0,092+0,398+0,504=0,994.$$

Так как попадания каждого стрелка – независимые в совокупности события, то вероятность события D можем найти:

$$P(D)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=1-0,2\cdot0,3\cdot0,1=0,994.$$

8. В течение года две фирмы имеют возможность, независимо друг от друга, обанкротиться с вероятностями 0,06 и 0,09. Найдите вероятность того, что:

а) обе фирмы будут работать успешно;

б) обанкротится только одна фирма;

в) хотя бы одна фирма будет успешно функционировать.

Решение. Пусть событие A_1 – «в течение года первая фирма обанкротится», A_2 – «в течение года вторая фирма обанкротится». Тогда событие $\overline{A_1}$, как противоположное событию A_1, состоит в следующем: «в течение года первая фирма не обанкротится» или «в течение года первая фирма будет работать успешно», $\overline{A_2}$ – «в течение года вторая фирма не обанкротится». В задаче дано: $P(A_1)=0{,}06$, $P(A_2)=0{,}09$. Тогда $P(\overline{A_1})=1-0{,}06=0{,}94$, $P(\overline{A_2})=1-0{,}09=0{,}91$.

а) рассмотрим событие A – «обе фирмы будут работать успешно», это возможно, когда и первая фирма будет работать успешно, и вторая, т.е. при одновременном появлении событий $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$, т.е. $A = \overline{A_1}\cdot\overline{A_2}$. Надо найти $P(A) = P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})$. Так как события $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ независимые, то по формуле

$P(A) = P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}) = P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2}) = 0{,}94\cdot 0{,}91 = 0{,}8554$;

б) рассмотрим событие B – «обанкротится только одна фирма». Это возможно в одном из двух случаев: событие B_1 – «первая фирма обанкротится (событие A_1), а вторая при этом будет работать успешно ($\overline{A_2}$)», т.е. $B_1 = A_1$ и $\overline{A_2} = A_1\cdot\overline{A_2}$;

B_2 – «вторая фирма обанкротится (событие A_2), а первая при этом будет работать успешно ($\overline{A_1}$)», т.е. $B_2 = A_2$ и $\overline{A_1} = A_2\cdot\overline{A_1}$.

Тогда $B = B_1 + B_2$. Так как события B_1 и B_1 несовместны, то по формуле:

$P(B) = P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = P(A_1\cdot\overline{A_2}) + P(A_2\cdot\overline{A_1}) =$

$= P(A_1)\cdot P(\overline{A_2}) + P(A_2)\cdot \mathrm{P}(\overline{A_1}) = 0{,}06\cdot 0{,}91 + 0{,}09\cdot 0{,}94 = 0{,}1392.$

в) пусть событие C – «хотя бы одна фирма будет успешно функционировать». Вероятность $P(C)$ можно найти двумя способами.

1-й способ: $P(C) = P(B) + P(A) = P(A_1\cdot\overline{A_2}) + P(A_2\cdot\overline{A_1}) + P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}) =$

$= 0{,}06\cdot 0{,}91 + 0{,}09\cdot 0{,}94 + 0{,}94\cdot 0{,}91 = 0{,}9946.$

2-й способ: $\overline{C}$ – событие, противоположное C, – «ни одна фирма не будет работать успешно», т.е. «обе фирмы обанкротятся», или $\overline{A_1} = A_1$ и $A_2 = A_1\cdot A_2$. По формуле

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-0{,}06\cdot 0{,}09=0{,}9946.$$

9. Вероятность своевременного получения груза $P_1 = 0{,}95$, а вероятность того, что упаковка груза не будет повреждена $P_2 = 0{,}9$. Какова вероятность того, что груз будет получен своевременно в неповрежденной упаковке?

Решение. Обозначим события: A – груз получен своевременно, B – упаковка груза не будет повреждена. Имеем: $P(A) = P_1 = 0{,}95$; $P(B) = P_2 = 0{,}9$. События A и B будут независимыми, т.к. вероятность одного не меняется от того, произошло другое или нет. Тогда по теореме умножения вероятностей двух независимых событий имеем

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$= Р1·Р2 = 0,95·0,9 = 0,855.

10. Фирма по производству мебели претендует на 2 заказа от двух крупных мебельных магазинов А и В. Эксперты фирмы считают, что вероятность получения заказа от магазина А равна 0,5. Эксперты также полагают, что , если фирма получит заказ от магазина А, то вероятность того, что магазин В сделает заказ у них, равна 0,75. Какова вероятность, что фирма получит заказ от обоих магазинов?

Решение. Обозначим события: C – «получение заказа от магазина А», D – «получение заказа от магазина В». Из условия задачи очевидно, что события C и D зависимы, так как событие D зависит от того, произойдет или не произойдет событие C. Тогда имеем: $P(C) = 0{,}5$; $P(D|C) = 0{,}75$.

Надо найти вероятность совместного наступления двух зависимых событий C и D, т.е. $P(CD)$. По теореме умножения двух зависимых событий имеем

$P(CD) = P(C) \cdot \mathrm{P}(D|C) = 0{,}5 \cdot 0{,}75 = 0{,}375$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В фирме 550 работников, 380 из них имеют высшее образование, а 412 – среднее специальное образование, у 357 – высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет или среднее специальное образование, или высшее образование, или и то и другое?

2. Из 20 изделий первого сорта и 10 второго сорта, имеющихся на складе, наугад взято 2 изделия. Найдите вероятность того, что оба эти изделия: а) первого сорта; б) второго сорта.

3. На стеллажах библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь наудачу берет 3 учебника. Найдите вероятность того, что все они будут в переплете.

4. В урне 6 белых, 4 черных и 2 красных шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найдите вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором – черный шар и при третьем – красный шар.

5. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по каждому из 3 центральных телеканалов, равна 0,05. Предполагается, что эти события независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу: а) по всем 3 каналам; б) по 1 каналу?

6. Студент знает 20 из 25 вопросов программы дисциплины «Высшая математика». Найдите вероятность того, что студент знает предложенные экзаменатором 3 вопроса.

7. Модельер, разрабатывающий новую коллекцию одежды к весеннему сезону, создает модели в зеленой, черной и красной цветовой гамме. Вероятность того, что зеленый цвет будет в моде весной модельер оценивает в 0,3, что черный

– в 0,2, а красный – в 0,15. Предполагая, что цвета выбираются независимо друг от друга, найти вероятность того, что цветовое решение коллекции будет удачным: а) по двум цветам; б) хотя бы по одному из выбранных цветов.

8. В совхозную ремонтную мастерскую поступило 15 тракторов. Известно, что 6 из них нуждаются в замене двигателя, а остальные – в замене отдельных узлов. Случайным образом отбирается 2 трактора. Найдите вероятность того, что замена двигателя необходима а) в двух тракторах; б) в одном тракторе; в) хотя бы в одном тракторе.

9. Покупатель может приобрести акции 2 компаний *A* и *B*. Надежность компании *A* оценивается экспертами на уровне 90%, а *B* – 80%. Чему равна вероятность того, что обе компании в течении года не станут банкротами?

10. В студенческой группе из 20 человек 5 отличников. Наудачу по списку выбирают 2 человек. Чему равна вероятность того, что:

a) оба студента отличники;

b) оба студента не отличники?

11. В городе имеется 3 коммерческих банка. Вероятности того, что банки обанкротятся в течение года соответственно равны 0,1; 0,2; 0,05. Найдите вероятности того, что в течение года обанкротятся:

a) ровно два банка;

b) ровно один банк;

c) все три банка;

d) ни одного банка;

e) хотя бы один банк.

12. Подбрасывают игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет нечетное число очков?

13. Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным или 2, или 5, или и тому и другому одновременно.

14. На 30 одинаковых карточках написаны натуральные числа от 1 до 30. Какова вероятность достать карточку с числом, кратным 2 или кратным 3?

15. Вероятность грозы в любой день августа составляет 0,3, вероятность града – 0,2, а вероятность града во время грозы – 0,1. Найдите вероятность того, что в наугад выбранный день будет хотя бы одно из явлений – град или гроза.

16. В коробке лежат 10 яблок и 8 груш. Из коробки последовательно без возвращения извлекают 4 фрукта. Найдите вероятность того, что все 4 – груши.

17. Подбрасывают 2 симметричные монеты. Какова вероятность того, что выпадут 2 решки?

18. В отделе работают 10 человек, среди них 7 мужчин. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Какова вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами?

19. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,5. Найдите вероятность того, что: а) только один стрелок попадёт в мишень; б) хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

20. Стрелок попадает в цель с одной и той же вероятностью при каждом выстреле. Какова эта вероятность, если вероятность хотя бы одного попадания при трех выстрелах равна 0,973.

Вопросы для самоконтроля

1. Чему равна вероятность суммы двух событий?
2. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
3. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей n несовместных событий?
5. Чему равна вероятность произведения двух событий?
6. Сформулируйте теорему умножения вероятностей n событий.
7. Что такое условная вероятность?
8. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?
9. Сформулируйте теорему умножения вероятностей n независимых событий.
10. Как найти вероятность появления хотя бы одного из n независимых событий, имеющих одинаковые вероятности?

2.3 Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть A – произвольное событие, события H_1, H_2, …, H_n попарно несовместны и $A \subset H_1 + H_2 + ... + H_n$. Вероятности событий H_i, известны, причем $P(H_i) \neq 0$ для всех $i=1,2,\ldots,n$; известны также условные вероятности $P(A|H_i)$. Требуется найти вероятность события A.

Формула полной вероятности. Пусть событие A может осуществиться вместе с одним из событий H_1, H_2, …, H_n , которые образуют полную группу событий. Пусть известны вероятности событий $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$ и условные вероятности $P(A|H_1)$, $P(A|H_2)$, …, $P(A|H_n)$. Тогда вероятность произвольного события A может быть найдена по формуле

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A \mid H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i).$$

Доказательство. Представим событие A в виде

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + ... + H_n) = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n.$$

Поскольку события H_1, H_2, …, H_n попарно несовместны, то события AH_1, AH_2, …, AH_n также попарно несовместны. Пользуясь равенством

$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$

и теоремой умножения вероятностей, получим

$$P(A)=P(AH_1+AH_2+\ldots+AH_n)=P(AH_1)+P(AH_2)+\ldots+P(AH_n)=$$
$$=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A|H_n)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A|H_i).$$

Теорема доказана.

События H_1, H_2, …, H_n иногда называют ***гипотезами***. Заметим, что должно выполняться условие $\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=P(H_1)+P(H_2)+\ldots+P(H_n)=1.$

Пример. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог соответственно равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Какова вероятность того, что этот грибник вышел из леса через час, если он с одинаковой вероятностью выбирает дороги?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «грибник вышел из леса через час», а через H_i, i=1,2,3,4,5 – событие, состоящее в том, что «грибник пошел по i-ой дороге». Из условия задачи следует, что $P(A|H_1)=0{,}4$; $P(A|H_2)=0{,}8$; $P(A|H_3)=0{,}3$; $P(A|H_4)=0{,}2$; $P(A|H_5)=0{,}1$.

Далее, $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=P(H_4)=P(H_5)=\frac{1}{5}.$

По формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)+P(H_4)P(A|H_4)+P(H_5)P(A|H_5)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 0,4+\frac{1}{5}\cdot 0,8+\frac{1}{5}\cdot 0,3+\frac{1}{5}\cdot 0,2+\frac{1}{5}\cdot 0,1=0,36.$$

Пример. Пусть в коробке есть 3 новых и 3 уже использованных теннисных мяча. Для первой игры берут из коробки любые 2 мяча и после игры возвращают их в коробку. Какова вероятность наудачу вынуть из коробки два новых мяча для второй игры?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «извлечены два новых мяча для второй игры». Ситуация перед второй игрой описывается следующими взаимоисключающими возможностями:

H_1 – «в коробке 1 новый мяч», если первую игру играли 2 новыми мячами;

H_2 – «в коробке 2 новых мяча», если играли 1 новым и1 старым мячами;

H_3 – «в коробке 3 новых мяча», если в первый раз играли 2 старыми мячами.

События H_1, H_2, H_3 – составляют полную группу событий, так как они несовместны и в сумме составляют все возможные исходы. Находим вероятности этих событий:

$$P(H_1)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5},\ P(H_2)=\frac{3\cdot 3}{C_6^2}=\frac{3}{5},\ P(H_3)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}.$$

Вычисляем условные вероятности:

$$P(A\,|\,H_1)=0,\;\; P(A\,|\,H_2)=\frac{1}{C_6^2}=\frac{1}{15},\;\; P(A\,|\,H_3)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{25}.$$

Формула Байеса. Пусть события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу и их вероятности $P(H_i)$ i=1,2, …,n, известны до проведения опыта (так называемые *априорные вероятности*). Производится опыт, в результате которого происходит событие A. Каковы будут вероятности событий H_i после опыта, т. е. после того, как событие A уже наступило?

Искомые вероятности $P(H_i\,|\,A)$ носят название *апостериорных* и находятся путем использования теоремы умножения вероятностей и формулы полной вероятности.

Имеем

$$P(AH_i)=P(A)\cdot P(H_i\,|\,A)=P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)$$

(здесь предполагается, что $P(A)>0$ и $P(H_i)>0$ для всех i=1,2, …,n), откуда

$$P(H_i\,|\,A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{P(A)}.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $P(A)$ из формулы полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i),$$

получим

$$P(H_i\,|\,A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)},\;\; i=1,2,...,n.$$

Эту формулу называют **формулой Байеса**. Она отвечает на вопрос каковы будут вероятности событий H_i после опыта, т. е. после того как событие A уже наступило?

Пример. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог соответственно равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Грибник вышел из леса через час. Какова вероятность того, что грибник вышел по первой дороге?

Решение. Искомую вероятность найдём по формуле Байеса

$$P(H_i\,|\,A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)},\;\; i=1,2,...,n.$$

$$P(H_1 \mid A) =$$

$$= \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)+P(H_3)\cdot P(A|H_3)+P(H_4)\cdot P(A|H_4)+P(H_5)\cdot P(A|H_5)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}\cdot 0,4}{0,36} \approx 0,222.$$

Пример. Социолог проводил исследование психологического климата в разных отделах фирмы. При этом было установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследования показали, что 68 % женщин позитивно реагируют на эти ситуации, в то время как 37 % мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность, что ее заполнял мужчина?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «случайно извлеченная анкета будет содержать негативную реакцию», а через H_1, – событие, состоящее в том, что «анкету заполнял мужчина», через H_2, – событие, состоящее в том, что «анкету заполняла женщина». Из условия задачи следует, что $P(A|H_1)$=0,37; $P(A|H_2)$=1–0,68=0,32.

Далее, $P(H_1) = \frac{5}{15+5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, $P(H_2) = \frac{15}{15+5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

По формуле полной вероятности вероятность того, что случайно извлеченная анкета будет содержать негативную реакцию,

$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=$ $0,37\cdot\frac{1}{4}+0,32\cdot\frac{3}{4} = 0,093+0,24 = 0,333.$

Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Вероятность того, что ее заполнял мужчина, найдём по формуле Байеса

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)} = 0,278.$$

Примеры решения задач

1. На фабрике на машинах a, b, c производят соответственно 25, 35 и 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5%, 4% и 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранное изделие фабрики дефектно?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранное изделие дефектно, а H_1, H_2, H_3 – изделие произведено на машинах a, b, c соответственно. Очевидно, события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу событий.

По условию $P(H_1)$=0,25; $P(H_2)$=0,35; $P(H_3)$=0,40. Аналогично, $P(A|H_1)$=0,05; $P(A|H_2)$=0,04; $P(A|H_3)$=0,02 являются условными вероятностями события A при выполнении гипотез H_1, H_2, H_3 соответственно.

Применив формулу полной вероятности, найдем

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=$$
$$=0,25\cdot 0,05+0,35\cdot 0,04+0,40\cdot 0,02=0,0345.$$

2. Пусть выполнены условия задачи **1** и пусть известно, что случайно выбранное изделие оказалось дефектным. Какова вероятность того, что оно было сделано на машинах a, b, c соответственно?

Решение. Пусть A, H_1, H_2, H_3 означают то же, что и в задаче **1**. Тогда задача состоит в нахождении условных вероятностей гипотез H_1, H_2, H_3 при условии, что событие A уже произошло. По условию $P(H_1)=0,25$; $P(H_2)=0,35$; $P(H_3)=0,40$. Аналогично, $P(A|H_1)=0,05$; $P(A|H_2)=0,04$; $P(A|H_3)=0,02$.

В задаче **1** найдено

$$P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=0,0345.$$

Применяя формулу Байеса, имеем

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)}{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)+P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)+P(H_3)\cdot P(A\,|\,H_3)}=\frac{0,25\cdot 0,05}{0,0345}=\frac{25}{69}.$$

Аналогично получаем $P(H_2\,|\,A)=\dfrac{28}{69}$, $P(H_3\,|\,A)=\dfrac{16}{69}$.

3. Партия транзисторов, среди которых 10% дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект (если он есть) и существует вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Какова вероятность того, что случайно выбранный из партии транзистор будет признан дефектным?

Решение. Из условия задачи очевидно, что с рассматриваемым событием A – «случайно выбранный транзистор оказался дефектным» связаны две гипотезы:

H_1 – «поступивший на проверку транзистор исправный»,

H_2 – «поступивший на проверку транзистор неисправный».

Вероятности этих гипотез легко вычисляются по классической формуле определения вероятности: $P(H_1)=0,9$; $P(H_2)=0,1$. Условные вероятности определены в условии задачи: $P(A|H_2)=0,95$; $P(A|H_1)=0,03$. Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P(A)=0,1\cdot 0,95+0,9\cdot 0,03=0,122.$$

4. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, для второго 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найдите вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

Решение. До опыта возможны следующие гипотезы: H_1 – «ни первый, ни второй стрелок не попадут»; H_2 – «оба стрелка попадут»; H_3 – «первый стрелок попадет, а второй не попадет»; H_4 – «первый стрелок не попадет, а второй попадет». Вероятности этих гипотез: $P(H_1)=0,2\cdot 0,6=0,12$, $P(H_2)=0,8\cdot 0,4=0,32$, $P(H_3)=0,8\cdot 0,6=0,48$, $P(H_4)=0,2\cdot 0,4=0,08$. Пусть A – событие, состоящее в том, что будет одна пробоина. Условные вероятности наблюдавшегося события A при этих гипотезах равны:

$$P(A|H_1)=P(A|H_2)=0;\ P(A|H_3)=1;\ P(A|H_4)=1.$$

После опыта вероятность гипотезы H_3 такова:

$$P(H_3\mid A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A\mid H_1)}{P(H_1)\cdot P(A\mid H_1)+P(H_2)\cdot P(A\mid H_2)+P(H_3)\cdot P(A\mid H_3)+P(H_4)\cdot P(A\mid H_4)}=\frac{0,48}{0,56}\approx 0,85$$

5. Медицинский тест даёт положительный результат, если пациент болен исследуемой болезнью, с вероятностью 0,99. Если пациент не болен, то с вероятностью 0,95 тест даст отрицательный результат. Данной болезнью страдает 0,1% населения. Какова вероятность того, что пациент с положительным результатом теста на самом деле не болен?

Решение. Обозначим событие A – «тест даст положительный результат». В качестве гипотез возьмём H_1 – «пациент болен», H_2– «пациент здоров». По условию задачи $P(H_1)$=0,001, $P(H_2)$=0,999. Условные вероятности

$$P(A|H_1)=0,99,\ P(A|H_2)=1–0,95=0,005.$$

Тогда по формуле полной вероятности найдём вероятность того, что пациент с положительным результатом теста:

$$P(A)=P(H_1)P(A\mid H_1)+P(H_2)P(A\mid H_2)=0,001\cdot 0,99+0,999\cdot 0,05=0,05094.$$

Далее по формуле Байеса найдём вероятность того, что пациент с положительным результатом теста на самом деле не болен:

$$P(H_2\mid A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A\mid H_2)}{P(H_1)\cdot P(A\mid H_1)+P(H_2)\cdot P(A\mid H_2)}=\frac{0,999\cdot 0,05}{0,05094}\approx 0,981.$$

Как видно, вероятность получить ложноположительный результат в данном случае очень велика. Это связано с тем, что исследуемая болезнь крайне редкая. Выходом в данной ситуации является проведение повторного теста.

Если болезнь не очень редкая и $P(H_1)$=0,7, $P(H_2)$=0,3, то

$$P(H_2\mid A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A\mid H_2)}{P(H_1)\cdot P(A\mid H_1)+P(H_2)\cdot P(A\mid H_2)}=\frac{0,3\cdot 0,05}{0,7\cdot 0,99+0,3\cdot 0,05}\approx 0,021.$$

6. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах, причем деталей первого завода 80 %, а второго – 20 % от общего количества. Вероятность брака на первом заводе равна 0,05, на втором заводе – 0,01. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена первым заводом?

Решение. Пусть гипотеза H_1 – «взятая деталь изготовлена первым заводом», гипотеза H_2 – «взятая деталь изготовлена вторым заводом», событие A – «взятая деталь оказалась бракованной». Тогда, согласно условию задачи, $P(H_1)$=0,8; $P(H_2)$=0,2; $P(A|H_1)$=0,05; $P(A|H_2)$=0,01.

Вероятность того, что деталь бракованная:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2) = 0,8\cdot 0,05+0,2\cdot 0,01=0,042.$$

Вероятность того, что бракованная деталь изготовлена первым заводом:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2)} = 0{,}952.$$

7. Студент пришел сдавать зачет, зная не все вопросы программы. Что для него выгоднее: идти отвечать первым или вторым?

Решение. Пусть событие A – «студент знает k из n вопросов программы». Если он идет отвечать первым, то вероятность ответить на предложенный ему вопрос равна $\frac{k}{n}$. Если он идет вторым, его успех зависит от того, какой вопрос был выбран перед ним. Рассмотрим две гипотезы: H_1 – «был выбран “хороший” для студента вопрос» (таких вопросов k); H_2 – «был выбран “плохой” для студента вопрос» (таких вопросов $n-k$). Тогда $P(H_1)=\frac{k}{n}$, $P(H_2)=\frac{n-k}{n}$. Вероятность ответить на предложенный студенту вопрос, если накануне был извлечен «хороший» для него вопрос, равна $P(A|H_1)=\frac{k-1}{n-1}$, так как «хороших» вопросов стало $k-1$ и число всех вопросов уменьшилось на 1.

Рассуждая аналогично, получаем $P(A|H_2)=\frac{k}{n-1}$.

По формуле полной вероятности находим

$$P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) =$$
$$= \frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1} + \frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n-1} = \frac{k(k-1+n-k)}{n(n-1)} = \frac{k(n-1)}{n(n-1)} = \frac{k}{n}.$$

Сравнивая найденную вероятность с вычисленной ранее, видим, что успех студента не зависит от того, пойдет он отвечать первым или вторым.

8. На город примерно 165 дней в году дует ветер с севера и 200 дней в году – с запада (считается, что год не високосный и с других направлений ветер дуть не может). Промышленные предприятия, расположенные на севере, производят выброс вредных веществ каждый третий день, а расположенные на западе – в последний день каждой недели. Определите, как часто город подвергается воздействию вредных выбросов. Иными словами, какова вероятность того, что в наугад выбранный день город будет накрыт промышленным смогом?

Решение. Пусть событие H_1 – «ветер дует с севера», событие H_2 – «ветер дует с запада», событие A – «город подвергается воздействию вредных выбросов». Тогда, согласно условию задачи,

$$P(H_1)=\frac{165}{365}=\frac{33}{73},\ P(H_2)=\frac{200}{365}=\frac{40}{73},\ P(A|H_1)=\frac{1}{3},\ P(A|H_2)=\frac{1}{7}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=\frac{33}{73}\cdot\frac{1}{3}+\frac{40}{73}\cdot\frac{1}{7}\approx 0{,}23.$$

Таким образом, около трех месяцев в году город накрыт промышленным смогом.

9. Эксперты считают, что вероятность роста стоимости акций компании в следующем году составит 0,75, если будет подъем в экономике, и 0,3, если будет спад в экономике. При этом считают, что вероятность экономического подъема равна 0,6. Найдите вероятность того, что в следующем году акции поднимутся в цене.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «в следующем году акции поднимутся в цене». Событие A может произойти с одной из следующих гипотез: H_1 – «будет подъем в экономике», H_2 – «будет спад в экономике».

Так как $P(H_1) = 0,6$, то $P(H_2) = 1 – P(H_1) = 1 – 0,6 = 0,4$ (сумма вероятностей всех гипотез должна равняться 1). В задаче даны следующие условные вероятности: $P(A|H_1)=0,7$ и $P(A|H_2)=0,3.$

По формуле полной вероятности при $n = 2$ получаем

$$P(A)=P(H_1)P\left(A|H_1\right)+P(H_2)P\left(A|H_2\right)=0,6\cdot 0,75+0,4\cdot 0,3=0,57\,.$$

10 Запросы на кредиты банка распределены следующим образом: 10 % – государственные органы, 30 % – другие банки, 60 % – физические лица. Вероятности невозврата кредита соответственно равны 0,01, 0,05 и 0,2. Найдите вероятность невозврата кредита. Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но факс плохо пропечатал данные клиента. Найдите вероятность того, что это был другой банк.

Решение. Обозначим событие A – «произойдет невозврат кредита». В качестве гипотез возьмем H_1– «кредит взят государственными органами», H_2 – «кредит предоставлен другому банку», H_3 – «кредит взят физическим лицом». Тогда, согласно условию задачи,

$$P(H_1)=\frac{10}{100}=0,1,\;\; P(H_2)=\frac{30}{100}=0,3,\;\; P(H_3)=\frac{60}{100}=0,6.$$

Проверяем условие $\sum_{i=1}^{3}P(H_i)=1.$

Имеем $\sum_{i=1}^{3}P(H_i)=0,1+0,3+0,6=1.$

По формуле полной вероятности при $n = 3$ получаем

$$P\left(A\right)=\sum_{i=1}^{3}P\left(H_i\right)\cdot P\left(A|H_i\right)=0,1\cdot 0,01+0,3\cdot 0,05+0,6\cdot 0,2=0,136.$$

Чтобы найти вторую вероятность, надо найти $P(H_2|A)$. Для этого воспользуемся формулами Байеса:

$$P(H_2|A)=\frac{P\left(H_2\right)\cdot P\left(A_2|H_2\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0,3\cdot 0,05}{0,136}=\frac{15}{136}\approx 0,1103\cdot$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Имеются 3 одинаковые на вид урны. В первой урне 2 белых и 1 черный шар, во второй – 3 белых и 1 черный шар, в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее шар. Найдите вероятность того, что этот шар белый.

2. Агент по недвижимости пытается продать участок земли под застройку. Он полагает, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев с вероятностью 0,9, если экономическая ситуация в регионе не будет ухудшаться. Если же экономическая ситуация будет ухудшаться, то вероятность продажи участка составит 0,5. Экономист, консультирующий агента, полагает, что с вероятностью, равной 0,7 экономическая ситуация в регионе в течение следующих 6 месяцев будет ухудшаться. Чему равна вероятность того, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев?

3. Судоходная компания организует средиземноморские круизы в течение летнего времени и проводит несколько круизов в сезон. Эксперт по туризму, нанятый компанией, предсказывает, что вероятность того, что корабль будет полон в течение сезона, будет равна 0,92, если доллар не подорожает по отношению к рублю, и с вероятностью – 0,75, если доллар подорожает. По оценкам экономистов, вероятность того, что в течение сезона доллар подорожает по отношению к рублю, равна 0,23. Чему равна вероятность того, что билеты на все круизы будут проданы?

4. В корпорации обсуждается маркетинг нового продукта, выпускаемого на рынок. Исполнительный директор корпорации желал бы, чтобы новый товар превосходил по своим характеристикам соответствующие товары конкурирующих фирм. Основываясь на предварительных оценках экспертов, он определяет вероятность того, что новый товар более высокого качества по сравнению с аналогичными в 0,5 такого же качества – в 0,3, хуже по качеству – в 0,2. Опрос рынка показал, что новый товар конкурентоспособен. Из предыдущего опыта проведения опросов следует, что если товар действительно конкурентоспособный, то предсказание такого же вывода имеет вероятность, равную 0,7. Если товар такой же, как и аналогичные, то вероятность того, что опрос укажет на его превосходство, равна 0,4. И если товар более низкого качества, то вероятность того, что опрос укажет на его конкурентоспособность, равна 0,2. С учетом результата опроса оцените вероятность того, что товар действительно более высокого качества и, следовательно, обладает более высокой конкурентоспособностью, чем аналогичные.

5. Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в 0,8. Консультационная фирма, занимающаяся прогнозом рыночной ситуации, подтвердила предположение о росте спроса. Положительные прогнозы консультационной фирмы сбываются с вероятностью 0,95, а отрицательные – с вероятностью 0,99. Какова вероятность того, что рост спроса действительно произойдет?

6. Среди студентов университета – 30% первокурсники, 35% студентов учатся на 2-м курсе, на 3-м и 4-м курсе их 20% и 15% соответственно. По данным деканата известно, что на первом курсе 20% студентов сдали сессию только на отличные оценки, на 2-м курсе – 30%, на 3-м курсе – 35%, на 4-м курсе – 40% отличников. Наудачу вызванный студент оказался отличником. Чему равна вероятность того, что он (или она) – третьекурсник?

7. Из числа авиалиний некоторого аэропорта 60% – местные авиалинии, 30% – авиалинии по СНГ и 10% – международные авиалинии. Среди пассажиров местных авиалиний 50% путешествуют по делам, связанным с бизнесом, на линиях СНГ таких пассажиров 60%, на международных – 90%. Из прибывших в аэропорт пассажиров случайно выбирается один пассажир. Чему равна вероятность того, что он: а) бизнесмен; б) прибыл из стран СНГ по делам бизнеса; в) прилетел местным рейсом по делам бизнеса; г) прибывший международным рейсом бизнесмен?

8. Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста равна 0,04, а в период экономического кризиса равна 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?

9. Перед тем, как начать маркетинг нового товара по всей стране, компании-производители часто проверяют спрос на него по отзывам случайно выбранных потенциальных покупателей. Методы проведения выборочных процедур уже проверены и имеют определенную степень надежности. Для определенного товара известно, что вероятность его возможного успеха на рынке составит 0,75, если товар действительно удачный, и 0,15, если он неудачен. Из прошлого опыта известно, что новый товар может иметь успех на рынке с вероятностью 0,6. Если новый товар прошел выборочную проверку, и ее результаты указали на возможный его успех, то чему равна вероятность того, что это действительно так?

10. Известно, что в некоторой социальной группе 30% молодых людей, 45% людей среднего возраста и 25% пожилых. Известно, что из числа молодых некоторый товар покупают 30%; процент для людей среднего 15% и пожилого возраста 10%. Из этой группы в ходе анкетного опроса случайным образом выбирается человек. Найдите вероятность того, что этот человек покупает данный товар. Найдите вероятность того, что человек, забывший указать свой возраст, но указавший, что он не покупает данный товар, является человеком среднего возраста.

11. Число государственных банков, имеющихся в городе, относится к числу коммерческих банков как 3:2. Вероятность того, что клиент обратится в коммерческий банк равна 0,2; а того, что он обратится в государственный банк равна 0,1. Клиент обращается в банк. Найдите вероятность того, что это государственный банк.

12. По статистике турист, прибывший накануне на автобусе, поезде или самолете, заказывает утренний экскурсионный тур с вероятностями 0,2, 0,4 и 0,7 соответственно. Найдите вероятность того, что прибывший в отель турист закажет тур, если автобусом приезжают 55%, поездом – 30%, а самолетом – 15% постояльцев.

13. На горнолыжном курорте фуникулер оборудован тремя независимыми предохранительными системами с надежностью срабатывания 0,95, 0,93 и 0,9 соответственно. Известно, что в результате перепада напряжения в сети, сработала одна из них. Найдите вероятность того, что не сработала третья система.

14. Предположим, что в группе людей, различающихся по уровню образования, имеется следующее распределение по отношению к некоторому политику:

Группа людей	Уровень образования		
	Низкий (без образования, начальное и среднее образование)	Средний (среднее общее и среднее специальное образование)	Высокий (незаконченное высшее и высшее образование)
Сторонники	4000		
Противники			
Безразличные			
Затрудняющиеся определить свою позицию			

Остальные клетки таблицы заполните по своему усмотрению.

Производится случайный эксперимент, заключающийся в выборе одного человека из этой группы (например, в ходе случайного опроса). Введем случайные события: A_1 – «человек оказался сторонником политика», A_2 – «человек оказался противником политика», A_3 – «человек оказался безразличен к политику», A_4 – «человек оказался затрудняющимся определить свое отношение к политику»; B_1 – «у человека низкий уровень образования», B_2 – «у человека средний уровень образования», B_3 – «у человека высокий уровень образования». Выразить через вероятность произведения событий и найти вероятность того, что человек окажется высокообразованным сторонником политика. Выразить через условную вероятность и найти вероятность того, что человек с высоким уровнем образования окажется сторонником политика. Выразить через условную вероятность и найти вероятность того, что у сторонника политика окажется высокий уровень образования.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие события образуют полную группу событий?
2. Какие события называются гипотезами?
3. При каких условиях применяется формула полной вероятности? Запишите формулу полной вероятности.
4. Как вычисляются вероятности гипотез, если известно, что событие произошло?
5. Запишите формулу Байеса.
6. Как проверить правильность вычисления апостериорных гипотез?
7. Как проверить правильность задания априорных гипотез?

2.4 Повторение испытаний. Схема Бернулли

Пусть независимо друг от друга проводятся n испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода: либо происходит событие A («успех»), либо противоположное ему событие $\overline{A}$ («неудача»). Будем считать, что испытания проводятся в одинаковых условиях и вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же. Обозначим эту вероятность через p, а вероятность появления противоположного события $\overline{A}$ через q ($q=1-p$). Данная схема носит название ***схемы Бернулли***.

Поставим вопрос о вероятности того, что в данной серии из n испытаний событие A наступило ровно m раз $(0 \le m \le n)$. Искомую вероятность обозначим через $P_n(m)$.

Теорема. Вероятность $P_n(m)$ наступления события A ровно m раз в последовательности из n испытаний схемы Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Доказательство. Событие A в проведенных n испытаниях может наступить m раз в разных вариантах, например в варианте

$$\underbrace{A...A}_{m}\underbrace{\overline{A}...\overline{A}}_{n-m},$$

где событие A занимает m первых мест (произошло в первых m испытаниях), а событие $\overline{A}$ занимает последующие n-m мест (произошло в последующих n-m испытаниях). Всего таких вариантов существует C_n^m, причем все составленные таким образом сложные события являются несовместными. Поскольку все события в каждом из вариантов независимы, то по теореме умножения вероятностей независимых событий вероятность каждого варианта равна $p^m q^{n-m}$. Так как все варианты-события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных событий, т. е. $C_n^m p^m q^{n-m}$, что и доказывает теорему.

Вероятности $P_n(m)$ называются ***биномиальными вероятностями***, а формула $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ – ***формулой Бернулли***.

Рассмотрим частные случаи: $P_n(0) = q^n$, $P_n(1) = npq^{n-1}, ..., P_n(n) = p^n$.

Вероятности того, что в n испытаниях событие наступит

- менее m раз, находят по формуле: $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m-1)$;
- более m раз, находят по формуле: $P_n(m+1) + P_n(m+2) + ... + P_n(n)$;
- не менее m раз, находят по формуле: $P_n(m) + P_n(m+1) + ... + P_n(n)$;
- не более m раз, находят по формуле: $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m)$.

Пример. В магазин вошли 9 покупателей. Вероятность сделать покупку для каждого вошедшего одна и та же и равна 0,2. Найдите вероятность того, что 2 покупателя совершат покупку.

Решение. Из условия n=9; m=2; p=0,2; q=1–0,2=0,8. По формуле Бернулли искомая вероятность $P_9(2) = C_9^2 p^2 q^7 = 36 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^7 \approx 0,302$.

Пример. Найдите вероятность того, что при десятикратном бросании монеты «орел» выпадет ровно 5 раз.

Решение. В данном случае $p=q=\frac{1}{2}$, n=10, m=5. Отсюда находим

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} \approx 0,246.$$

Пример. В результате наблюдений на некоторой реке установлено, что в течение 20 лет имело место четыре случая пересыхания реки. Найдите вероятность того, что за двадцатилетний период будет наблюдаться:

1) от трех до пяти случаев пересыхания реки (включительно);
2) не более пяти случаев пересыхания реки;
3) более пяти случаев пересыхания реки.

Решение. Вероятность того, что за 20 лет произойдет m случаев пересыхания реки $(0 \le m \le 20)$, равна $P_{20}(m) = C_{20}^m p^m q^{20-m}$, где $p = \frac{4}{20} = 0,2$, $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$. Тогда искомая вероятность составит:

1) $P_{20}(3) + P_{20}(4) + P_{20}(5) =$

$$= C_{20}^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{17} + C_{20}^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{16} + C_{20}^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^{15} \approx 0,2054 + 0,2182 + 0,1746 \approx 0,5982.$$

2) $P(m \le 5) = \sum_{m=0}^{5} P_{20}(m) =$

$$= C_{20}^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{20} + C_{20}^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{19} + C_{20}^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{18} + C_{20}^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{17} + C_{20}^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{16} + C_{20}^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^{15} \approx$$

$$\approx 0,0115 + 0,0576 + 0,1369 + 0,2054 + 0,2182 + 0,1746 = 0,8042.$$

3) $P(m > 5) = 1 - P(m \le 5) = 1 - 0,8042 = 0,1958.$

Наивероятнейшее число наступления события

Для каждого числа m наступления события мы можем подсчитать биномиальные вероятности $P_n(0)$, $P_n(1)$, …, $P_n(n)$.

Число m_0, которому при заданном n соответствует максимальная биномиальная вероятность $P_n(m_0)$, называется ***наивероятнейшим числом*** появления события A. При заданных n и p это число удовлетворяет неравенству:

$$np - q \le m_0 \le np + p, \quad \text{или} \quad (n+1)p - 1 \le m_0 \le (n+1)p.$$

Замечание. *Если число $np+p$ не является целым, то m_0 равно целой части этого числа, т.е. $m_0 = [np+p]$; если же $np+p$ – целое число, то m_0 имеет два значения: $np-q$ и $np+p$ или $(n+1)p-1$ и $(n+1)p$.*

Пример. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из лука равна $1/3$. Производится шесть выстрелов. Каково наивероятнейшее число попаданий?

Решение. В данном примере число выстрелов $n=6$. Рассмотрим событие A – «попадание в цель при одном выстреле». Для этого события известна вероятность $p=P(A)=1/3$ и, следовательно, вероятность противоположного события $q=1-p=2/3$. Для ответа на вопрос вычисляем $np-q = 6\cdot\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $\quad np+p = 6\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Следовательно $m_0 \in [\frac{4}{3};\frac{7}{3}]$. Единственное целое число, принадлежащее этому отрезку, – это $m_0 = 2$.

2.5 Асимптотические формулы для вычисления биномиальных вероятностей

Следует отметить, что при больших m и n пользоваться формулой Бернулли практически невозможно. В таких случаях пользуются локальной теоремой Лапласа или теоремой Пуассона. Эти формулы тем будут точнее, чем n больше.

Локальная теорема Лапласа

Теорема: Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p ($0 < p < 1$), а n является достаточно большим то вероятность $P_n(m)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится ровно m раз, приближенно выражается формулой

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ и $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Значения функции Гаусса $\varphi(x)$ находятся из таблицы (прил.1), пользуясь следующими *свойствами функции* $\varphi(x)$:

1) функция $\varphi(x)$ четная, т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$. Поэтому в таблице приведены значения функции лишь для положительных значений аргумента;

2) функция $\varphi(x)$ монотонно убывает, а ее предел при $x \to \infty$ равен нулю;

3) если $x > 4$, то можно считать, что $\varphi(x) \approx 0$.

Пример. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна 0,25. Какова вероятность того, что среди 80 грибов белых будет 20?

Решение. По условию $n = 80,\ m = 20$. Следовательно, $x = \dfrac{20 - 80 \cdot 0,25}{\sqrt{80 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = 0$ и $\varphi(0) = 0,3989$. Тогда искомая вероятность: $P_{80}(20) \approx \dfrac{1}{\sqrt{15}} \cdot 0,3989 \approx 0,103$.

Интегральная теорема Лапласа

Теорема: Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0 < p < 1)$, то вероятность $P_n(k_1,k_2)$ того, во всех этих испытаниях событие A появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно определяется формулой

$$P_n(k_1,k_2) = P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\ x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$

Функция $\Phi(x)$ называется **функцией Лапласа**. Её значения приведены в таблице (прил.2). При использовании этой таблицы необходимо знать свойства функции $\Phi(x)$:

1) функция $\Phi(x)$ нечетная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, и поэтому приведены ее значения только для положительного аргумента;

2) предел функции при $x \to \infty$ равен $\frac{1}{2}$, и $\Phi(0) = 0$;

3) Для всех значений $x > 5$ $(x < -5)$ можно считать, что $\Phi(x) \approx \frac{1}{2}, (\Phi(-x) \approx -\frac{1}{2})$. Поэтому в таблице (см. прил. 2) приведены значения функции только для $0 \le x \le 5$.

Пример. Вероятность реализации одной акции некоторой компании равна 0,8. Брокерская фирма предлагает 100 акций этой кампании. Какова вероятность того, что будет продано: а) не менее 70 и не более 85 акций; б) не менее 70; в) не более 69 акций?

Решение. Событие A – «акция продана», $P(A) = p$:

а) по условию n=100, p=0,8, q=0,2, $k_1 = 70,\ k_2 = 80$. Воспользуемся формулой

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1), \text{ где } x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}, \; x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

По условию

$$P_{100}(70,80) \approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

$$x_1=\frac{70-100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{70-80}{\sqrt{16}}=-\frac{10}{4}=-2,5,$$

$$x_2=\frac{85-80}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{5}{4}=1,25,$$

$$P_{400}(70,85) \approx \Phi(1,25)-\Phi(-2,5).$$

По таблице значений функции Лапласа (см. прил. 2) и учитывая нечетность этой функции, находим $\Phi(1,25)=0,3944$, $\Phi(-2,5)=-\Phi(2,5)=-0,4938$.

Тогда $P_{400}(70,85) \approx \Phi(1,25)-\Phi(-2,5)=0,3944+0,4938=0,8882;$

б) требование того, что фирма продает не менее (больше либо равно) 70 акций, означает, что будет продано либо 70, либо 71, либо 72, и т.д., либо 100 акций. Значит, в данном случае $k_1=70,$ а $k_2=100.$ Тогда

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

$$\text{где } x_1=\frac{70-100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=-\frac{10}{4}=-2,5, \; x_2=\frac{100-100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{20}{4}=5.$$

По таблице значений $\Phi(x)$ (см. прил. 2) находим

$$\Phi(-2,5)=-\Phi(2,5)=-0,4938, \quad \Phi(1,25)=0,5, \text{ тогда}$$

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(5)-\Phi(-2,5)=0,5+0,4938=0,9938;$$

в) событие *А* – «появилось не менее 70 раз» противоположно событию *В* – «появилось не более 69 раз», потому $P_{100}(0,69) \approx 1-P_{100}(70,100)=1-0,9938=0,0062.$

Значит, вероятность того, что будет продано либо 69, либо 68, либо 67, и т.д., либо ноль (ни одной) акции $P_{100}(0,69) \approx 0,0062.$

Формула Пуассона

Теорема: Если вероятность наступления события *А* в каждом из *n* независимых испытаний постоянна, но близка к нулю, а число независимых испытаний *n* достаточно велико и произведение $np=\lambda=const$, то вероятность того, что во всех этих испытаниях событие *А* появится ровно m раз, приближенно выражается формулой

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Обычно формулу используют, если $p < 0,01$, а $n > 100$ и $np \le 10$.

Пример. На базу отдыха прибыло 1000 подростков. Какова вероятность того, что среди этих отдыхающих окажется 5 детей, страдающих клаустрофобией, если в среднем 0,1 % подростков страдают данной болезнью?

Решение. Имеем n=1000, m=5, $p=\frac{0,1\%}{100\%}=0,001$.

Так как n велико, а p мало, то воспользуемся формулой Пуассона:

$$\lambda=np = 1000\cdot 0,001 = 1,\ P_{1000}(5)\approx\frac{1^5\cdot e^{-1}}{5!}=\frac{1}{120\cdot e}\approx 0,003\,086\approx 0,0031.$$

Пример. Вероятность появления фальшивой банкноты в банке равна 0,002. В течение дня банк оперирует с 500 банкнотами. Найдите вероятность того, что в течение дня в ходе обработки встретится менее трех фальшивых банкнот.

Решение. Из условия следует, что n=500, p=0,002. Так как n велико, а p мало, то воспользуемся формулой Пуассона. Имеем $\lambda=np$ = 500·0,002 = 1.

Тогда $P_{500}(m<3)=P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)=\frac{1^0\cdot e^{-1}}{0!}+\frac{1^1\cdot e^{-1}}{1!}+\frac{1^2\cdot e^{-1}}{2!}=2,5\cdot e^{-1}\approx 0,919.$

2.6 Закон больших чисел

Закон больших чисел составляет основу математической статистики и представляет собой совокупность теорем, связывающих между собой измеренные и истинные значения характеристик случайных величин. В широком смысле законом больших чисел (ЗБЧ) называют свойство устойчивости средних значений. При большом числе случайных явлений (испытаний) их средний результат перестает быть случайным и может быть предсказан с достаточной степенью точности. Далее рассмотрим ряд утверждений, дающих математическое обоснование этому явлению.

Теорема (Неравенство Маркова). Если случайная величина X имеет конечное математическое ожидание $M(X)$ и принимает лишь неотрицательные значения, то для любого числа ε>0 справедливо неравенство

$$P\left(X\geq\varepsilon\right)\leq\frac{M(X)}{\varepsilon}$$

Неравенство Маркова дает грубую оценку вероятности попадания любой неотрицательной случайной величины X в интервал $[\varepsilon,+\infty)$. Поэтому это неравенство используют лишь для приблизительных оценок вероятностей событий, связанных со случайной величиной с неизвестным распределением. Также часто используют неравенство

$$P\left(X<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{M(X)}{\varepsilon},$$

которое, как легко видеть, равносильно неравенству Маркова.

Пример. Сумма всех займов некоторого предприятия составляет 5 млн. усл. ед., а вероятность того, что случайно выбранный заем меньше 250 тыс. усл. ед., равна 0.75. Оцените число займов данного предприятия.

Решение. Пусть случайная величина X – сумма случайно выбранного займа, n – общее количество займов. Тогда $P\left(X < 250\right) = 0,75$, а $M(X)$=5000/n тыс. усл.ед. Поэтому на основании неравенства Маркова получаем $P\left(X < 250\right) = 0,75 \geq 1 - \frac{5000}{250n}$.

Откуда заключаем, что n ≤ 80.

Теорема (Неравенство Чебышева). Если случайная величина X имеет конечное математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, то для любого числа ε>0 справедливо неравенство

$$P\left(\left|X - M\left(X\right)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \text{ или } P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева, как и неравенство Маркова, используют для грубой оценки вероятностей событий, связанных со случайной величиной, у которой неизвестен закон распределения.

Основной формой закона больших чисел считается следующая теорема Чебышева.

Теорема (Чебышева). Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и существует такое число δ>0, что для любого номера $i = 1, 2, \ldots n$ верно неравенство $D(X_i) \leq \delta$. Тогда для любого числа ε>0 справедливо неравенство

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\delta}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем предельную запись закона больших чисел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Чебышева показывает, что среднее арифметическое большого числа случайных величин «почти наверняка» сколь угодно мало отличается от среднего арифметического их математических ожиданий.

Следствие 1. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием, равным a, и дисперсией, равной σ^2. Тогда для любого числа ε>0 справедливы неравенства:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \text{ и } \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Следствие 2 (Теорема Бернулли). Пусть вероятность наступления события A (успеха) в схеме Бернулли равна p, число наступлений этого события при n независимых испытаниях равно m. Тогда для любого числа ε>0 справедливо неравенство

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Здесь, $q=1-p$.

Пример. Вероятность того, что торгующий ценными бумагами дилер продает их, равна 0.6. При каком числе ценных бумаг вероятность отклонения доли проданных бумаг отклонится по абсолютной величине от 0.6 не более чем на 0.3, превысит 0.94?

Решение. Описанная в задаче ситуация удовлетворяет схеме Бернулли, причем р = 0,6, а q=4 . Тогда на основании следствия 2 (теоремы Бернулли) получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,6\right| < 0,3\right) > 1 - \frac{0,6 \cdot 0,4}{0,3^2 n} > 0,94.$$

Откуда, заключаем, что $n \geq 44\frac{4}{9}$, т. е. ценных бумаг должно быть не менее 45.

Рассмотрим предельную центральную теорему для случая одинаково распределенных случайных величин (форма Ляпунова)

Теорема. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, имеющие одно и тоже распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, то при неограниченном возрастании n закон распределения суммы $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ неограниченно приближается к нормальному.

Примеры решения задач

1. Монета бросается 5 раз. Найдите вероятность того, что герб выпадет: а) 2 раза; б) менее 2 раз; в) не менее 2 раз; г) более 2 раз.

Решение. Обозначим через A событие «при однократном бросании монеты выпал герб». Тогда противоположным событием $\bar{A}$ будет событие «выпала цифра», при этом считаем, что монета симметрична, поэтому $p = P(A) = \frac{1}{2}$ и $q = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$. Монета при неизменных условиях бросается 5 раз. Вероятность появления герба в каждом единичном испытании постоянна и равна $\frac{1}{2}$, поэтому здесь применима формула Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

а) при пяти бросках герб выпал два раза:

$$n = 5,\ m = 2,\ P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16};$$

б) событие B – «при 5 бросках монеты герб выпадает менее 2 раз» – означает, что герб или выпадает один раз, или вообще не выпадает. Поэтому $P(B) = P_5(0) + P_5(1)$.

$$P_5(1) = C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32},$$

$$P_5(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32},$$

$$P(B) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}.$$

в) событие C – «при 5 подбрасываниях монеты герб выпал не менее 2 раз» означает, что герб выпал или 2 раза, или 3 раза, или 4 раза, или 5 раз. Потому $P(C) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$. Противоположное ему событие $\overline{C}$ означает, что герб выпал менее 2 раз, а это событие B. Тогда

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - (P_5(0) + P_5(1)) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16},\ P(C) = \frac{13}{16}.$$

г) событие D – «при 5 подбрасываниях монеты герб выпал более 2 раз» – означает, что герб выпал либо 3, либо 4, либо 5 раз. Тогда $P(D) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$. Противоположным событию D будет событие $\overline{D}$ – «герб выпал не более двух раз». $P(\overline{D}) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2)$. А так как эти вероятности нам уже известны, то $P(D)$ можно найти, используя вероятность события $\overline{D}$:

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - (P_5(0) + P_5(1) + P_5(2)) = 1 - \frac{1}{32} - \frac{5}{32} - \frac{10}{32} = 1 - \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

2. Для того чтобы проверить точность своих финансовых счетов, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки бухгалтерских проводок счетов. Служащие компании при обработке входящих счетов допускают примерно 5% ошибок. Аудитор случайно отбирает 20 входящих документов. Найдите наивероятнейшее число документов, в которых будет обнаружена ошибка.

Решение. По условию $n=20,\ p=0,05,\ q=0,95.$ Найдем наивероятнейшее число m_0 из двойного неравенства:

$$np-q \le m_0 \le np+p\ .$$

Подставим данные задачи:

$$20\cdot 0,05-0,95 \le m_0 \le 20\cdot 0,05+0,05,$$

получаем $1-0,95 \le m_0 \le 1+0,05,$ или $0,05 \le m_0 \le 1,05$. Т.к. m_0 – целое число, заключенное между 0,05 и 1,05, то $m_0=1$, поэтому наивероятнейшее число ошибочных счетов, обнаруженных аудитором, будет равно 1.

3. Вероятность того, что изделие, сошедшее с конвейера, первого сорта равна 0,9. Какова вероятность того, что из 400 сошедших с конвейера деталей 356 окажутся первого сорта?

Решение. По условию $n=400,\ m=356,\ p=0,9,\ q=0,1,$ т.е. n велико, $npq=400\cdot 0,9\cdot 0,1=36>10.$ Тогда

$$P_n(m)\approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\ \ x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

$$P_{400}(356)\approx \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0,9\cdot 0,1}}\varphi(x)=\frac{1}{6}\varphi(x),$$

где $x=\dfrac{356-400\cdot 0,9}{\sqrt{400\cdot 0,9\cdot 0,1}}\approx -0,67.$

Используя значения функции Гаусса (см. прил. 1) и учитывая, что $\varphi(-x)=\varphi(x)$, находим $\varphi(-0,67)=0,3188$.

Тогда $P_{400}(356)\approx \dfrac{0,3188}{6}=0,0531.$

4. Завод отправил на базу 500 изделий, вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найдите вероятность того, что в пути будет повреждено 2 изделия.

Решение. По условию $n=500,\ p=0,002,$ а $\lambda=np=500\cdot 0,002=1<10$. Для нахождения вероятности $P_{500}(2)$ воспользуемся формулой Пуассона, так как условия ее применения выполнены. Тогда

$$P_{500}(2)\approx \frac{1^2\cdot e^{-1}}{2!}\approx \frac{0,36788}{2}\approx 0,18394.$$

5. Вероятность того, что студент не прошел медицинский осмотр, равна p=0,2. Найдите вероятность того, что среди 400 случайно выбранных студентов окажутся не прошедшими медицинский осмотр от 70 до 100 студентов.

Решение. По условию k_1=70; k_2=100; n=400; p=0,2; q=0,8. Следовательно,

$$x_1=\frac{70-400\cdot 0,02}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=-1,25,\ \ x_2=\frac{100-400\cdot 0,02}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=2,5,$$

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(2,5)-\Phi(-1,25)=\Phi(2,5)+\Phi(1,25)=0,49+0,39=0,88.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Прибор состоит из четырех узлов. Вероятность безотказной работы прибора в течение смены для каждого узла 0,8. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найдите вероятность того, что за смену откажут: а) два узла; б) не менее трех узлов; в) по крайней мере один узел.

2. Что более вероятно: выиграть у равносильного противника три партии из пяти или четыре партии из шести?

3. Сколько следует сыграть партий в шахматы с вероятностью победы в одной партии, равной 1/3, чтобы наивероятнейшее число побед было равно 5?

4. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,15. Какова вероятность того, что, по крайней мере, один из четырех билетов выиграет?

5. Вероятность сбоя в работе банкомата при каждом запросе равна 0,0019. Банкомат обслуживает 2000 клиентов за неделю. Определить вероятность того, что при этом число сбоев не превзойдет 3.

6. Вероятность дождливого дня на курортах Средиземноморья в августе равна 0,08. Найти вероятность того, что из 9 дней отдыха будет не более двух дождливых.

7. В семье пять детей. Найти вероятность того, что в этой семье не менее двух девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

8. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что среди 200 новорожденных будет 95 девочек.

9. По мишени производится шесть выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что будет: а) два попадания; б) не менее двух попаданий; в) более двух попаданий.

10. Из студентов старших курсов ФФСН доля отличников составляет 31%. Для оценки остаточных знаний была протестирована группа студентов старших курсов. Сколько студентов было отобрано в группу проверки, если наивероятнейшее число отличников в группе равно 23?

11. Страховой агент работает с 20 потенциальными клиентами. Вероятность того, что клиент заключит договор на страхование имущества постоянно для каждого клиента и равна $\frac{3}{5}$. Вычислить наивероятнейшее число клиентов, которые заключат договор с агентом.

12. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 40%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 120 изделий?

13. Страховая компания изучает вероятность дорожных происшествий для юношей, имеющих мотоциклы. Было установлено, что вероятность попасть в дорожное происшествие для юноши в течение года равна 0,35. Найдите вероятность того, что из 700 юношей, имеющих мотоцикл, в дорожное происшествие попадут: а) точно 270 юношей; б) более чем 230 и менее чем 270 юношей; в) более чем 270 юношей.

14. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью $\frac{1}{200}$. Найдите вероятность того, что среди 200 соединений произойдет: а) точно 1 неправильное соединение; б) менее 3 неправильных соединений; в) более 2 неправильных соединений.

15. Вероятность отказа каждого прибора при испытании не зависит от отказов остальных приборов и равна 0,2. Испытано 9 приборов. Какова вероятность того, что откажут: а) 2 прибора; б) 1 прибор; в) менее 3 приборов?

16. В партии из 100 изделий 10% бракованных. Контролер для проверки наугад выбирает 8 изделий. Какова вероятность того, что бракованными будут: а) все изделия; б) хотя бы 1 изделие; в) менее 2 изделий.

17. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найдите вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) ровно 75 раз.

18. Анализ работы кредитного отдела банка, выявил, что 12% фирм, бравших кредит в банке обанкротились и не вернут кредиты. Найдите наивероятнейшее число фирм, которые не вернут кредит, если в банке взяли кредит 25 фирм.

19. Устройство состоит из 500 независимо работающих элементов. Вероятность отказа любого элемента за время t равна 0,002. Найдите вероятность того, что за время t откажут: а) ровно 3 элемента; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы один.

20. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется поврежденной, равна 0,003. Найдите вероятность того, что магазин получит поврежденных бутылок: а) ровно 2; б) более 2; в) хотя бы 1.

21. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

Вопросы для самоконтроля

1. Какая схема называется схемой Бернулли?

2. Какой вид имеет формула Бернулли?

3. Что называется наивероятнейшим числом наступления события в n независимых испытаниях?

4. Чему равна вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится а) менее m раз; б) более m раз; в) не менее m раз; г) не более m раз?

5. Когда применяется локальная и интегральная теоремы Лапласа?

6. Сформулировать локальную теорему Лапласа.

7. Как определяется функция Гаусса? Каковы её свойства и графики?

8. Сформулировать интегральную теорему Лапласа.

9. Как определяется функция Лапласа. Каковы ее основные свойства?

10. В каких случаях нужно пользоваться приближенной формулой Пуассона?

3. Дискретные случайные величины

Рассматривая простейшие примеры: например, при бросании игральной кости мы случайным образом получаем одно из чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6 или при каких-либо измерениях получаются случайные ошибки и т. п. В таких случаях мы имеем дело со случайными величинами. На примере с бросанием игральной кости мы видим, что каждому исходу опыта ставится в соответствие единственное число $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – значение случайной величины. Поэтому естественно рассматривать случайную величину как функцию, заданную на множестве исходов данного опыта.

Определение случайной величины. Пусть Ω – пространство элементарных событий. Числовую функцию от элементарного события $\omega \in \Omega$ назовем ***случайной величиной***.

Таким образом, если каждому элементарному событию ω можно поставить в соответствие некоторое число, то говорят, что задана случайная величина.

Случайные величины будем обозначать *прописными латинскими буквами* X, Y, Z и т. д., а их возможные *значения* – соответствующими *строчными латинскими буквами* x, y, z и т. д. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены x_1, x_2, x_3.

Определение дискретной случайной величины. Случайная величина, принимающая значения, которые можно записать в виде конечного набора или счетной последовательности чисел, называется ***дискретной***, т. е. дискретная случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения, число которых конечное или счетное.

Примеры дискретных случайных величин:

- оценка, которую студент может получить на экзамене;
- число несчастных случаев на улицах Минска;
- число вызовов, поступивших на телефонную станцию за сутки;
- число родившихся мальчиков среди десяти новорожденных (0,1,…,10).

Определение непрерывной случайной величины. Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется ***непрерывной случайной величиной***.

Примеры непрерывных случайных величин:

- рост человека от 150 до 200 см;
- температура воздуха в случайно выбранный день;
- скорость самолета в момент выхода на заданную высоту.
- время ожидания транспорта.

Каждому значению x_n дискретной случайной величины отвечает определенная вероятность p_n, каждому промежутку $(a;b)$ из области значений непрерывной случайной величины также отвечает определенная вероятность P того, что значение x, принятое случайной величиной, попадет в этот промежуток.

Определение закона распределения случайной величины. Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется ***законом распределения случайной величины***.

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается в виде:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{n-1}	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_{n-1}	p_n	$\dots$

В верхней строке записывают возможные значения x_i случайной величины X, а в нижней – их вероятности $p_i = P(X=x_i)$. Так как события $A_i = \{X=x_i\}$, $i=1,2,\dots,n,\dots$ образуют полную группу событий, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1.$ В случае конечного числа значений случайной величины, равного n, справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически: построить точки $(x_i,\ p_i)$ в декартовой прямоугольной системе координат и соединить их отрезками прямых. Полученная фигура называется ***многоугольником распределения***.

Пример. Даны вероятности значений случайной величины X: вероятность появления значения 10 равна 0,3; вероятность появления значения 2 – 0,4; соответственно для значения 8 вероятность равна 0,1 и для значения 4 –0,2. Запишем эти значения в таблицу и построим многоугольник распределения (рис. 1).

X	2	4	8	10
P	0,4	0,2	0,1	0,3

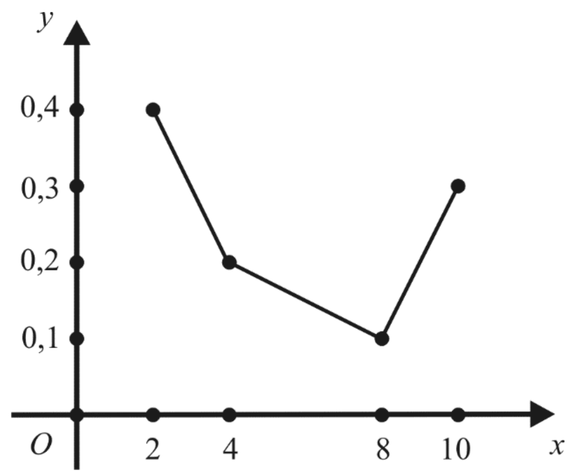


Рис. 1. – Многоугольник распределения случайной величины

Следует отметить, что закон распределения случайной величины полностью задает дискретную случайную величину. Существенно важно то, что случайную величину изучают по ее числовым характеристикам, основными из которых являются *математическое ожидание, дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение*. Далее рассмотрим эти числовые характеристики.

3.1 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Определение математического ожидания*. *Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности.

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений $x_1, x_2,\ldots x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно, то по определению

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Пример. Подбрасывается игральная кость. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины X, равной числу выпавших очков.

Решение. Закон распределения случайной величины X имеет вид.

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Следовательно, по определению математического ожидания имеем:

$$M(X)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=3{,}5.$$

Замечание. *Отметим, что постоянную величину С можно рассматривать как дискретную* случайную величину, принимающую лишь одно значение X = C с вероятностью P = 1. Поэтому M(C) = C·1 = C, т. е. **математическое ожидание постоянной величины равно самой этой величине**.

Далее рассмотрим без доказательства важнейшие свойства математического ожидания для дискретных случайных величин.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е.

$$M(CX) = C\,M(X).$$

2. Математическое ожидание суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Определение независимых случайных величин. Две случайные величины X и Y называют ***независимыми***, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Несколько случайных величин независимы, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные случайные величины.

Критерием независимости двух случайных величин X и Y служит выполнение равенства

$$P(X<x, Y<y) = P(X<x)\cdot P(Y<y)$$

для любых $x, y \in \mathrm{R}$.

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Замечание. *Свойства 2 и 3 имеют место для любого конечного числа случайных величин.*

Пример. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 2X+3Y+7$, если $M(X) = 4$, $M(Y)=1$.

Решение. Используя свойства математического ожидания, имеем

$$M(Z) = M(2X+3Y+7) = M(2X) + M(3Y) + M(7) =$$
$$= 2M(X) + 3M(Y) + 7 = 2\cdot 4 + 3\cdot 1 + 7 = 18.$$

Пример. Независимые случайные величины заданы законами распределения.

X	1	2
P	0,6	0,4

Y	4	6
P	0,2	0,8

Найдите математическое ожидание случайной величины XY.

Решение. Найдем математические ожидания каждой из данных случайных величин:

$$M(X) = 1\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}4 = 1{,}4, \quad M(Y) = 4\cdot 0{,}2 + 6\cdot 0{,}8 = 5{,}6.$$

В силу независимости случайных величин X и Y искомое математическое ожидание

$$M(XY) = M(X)M(Y) = 1{,}4\cdot 5{,}6 = 7{,}84.$$

Замечание. *Математическое ожидание случайной величины называют также ее* ***средним значением***.

Следует заметить, что математическое ожидание характеризует случайную величину не полностью. Зная математическое ожидание, нельзя сказать, какие значения принимает случайная величина и как они отклоняются от среднего значения. Чтобы знать, как рассеяны значения случайной величины вокруг ее математического ожидания, вводят такую числовую характеристику как дисперсия.

Определение отклонения случайной величины. Если X – дискретная случайная величина, $M(X)$ – ее математическое ожидание, тогда величина $X - M(X)$ называется **отклонением случайной величины** X от ее математического ожидания.

Отклонение является случайной величиной и его математическое ожидание равно нулю:

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Из полученного равенства следует, что с помощью отклонения невозможно определить среднее отклонение возможных значений случайной величины X от ее математического ожидания, т. е. степень рассеяния случайной величины X. Это объясняется взаимным погашением возможных положительных и отрицательных значений отклонения. Данного недостатка можно избежать, если рассматривать квадрат отклонения случайной величины X.

Определение дисперсии. **Дисперсией** $D(X)$ дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$\boldsymbol{D(X) = M((X - M(X))^2).}$$

Дисперсия случайной величины постоянна, т. е. является числовой характеристикой этой величины.

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений $x_1, x_2, \ldots x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно, то закон распределения случайной величины $(X - M(X))^2$ имеет вид:

$(X - M(X))^2$	$(x_1-M(X))^2$	$(x_2-M(X))^2$	…	$(x_n-M(X))^2$
P	p_1	p_2	…	p_n

Исходя из определения математического ожидания, получаем

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i.$$

Дисперсия дискретной случайной величины обладает следующими свойствами:

1. Дисперсия – величина неотрицательная, т. е. $D(X) \geq 0$.

2. Дисперсия случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Покажем это:

$$D(X)=M((X-M(X))^2)=M(X^2-2XM(X)+(M(X))^2)=$$
$$=M(X^2)-2M(X)M(X)+(M(X))^2=$$
$$=M(X^2)-2(M(X))^2+(M(X))^2=M(X^2)-(M(X))^2.$$

3. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C)=0.$$

Покажем это:

$$D(C)=M((C-M(C))^2)=M((C-C)^2)=M(0)=0.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX)=C^2D(X).$$

Покажем это:

Из определения дисперсии и свойств математического ожидания следует, что

$$D(CX)=M((CX-M(CX))^2)=M((CX-CM(X))^2)=$$
$$=M(C^2(X-M(X))^2)=C^2M((X-M(X))^2)=C^2D(X).$$

5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Покажем это:

Применяя свойство дисперсии 2 и свойства математического ожидания, имеем

$$D(X+Y)=M((X+Y)^2)-(M(X+Y))^2=$$
$$=M(X^2+2XY+Y^2)-(M(X)+M(Y))^2=$$
$$=M(X^2)+2M(XY)+M(Y^2)-((M(X))^2+2M(X)M(Y)+(M(Y))^2)=$$
$$=M(X^2)+2M(X)M(Y)+M(Y^2)-(M(X))^2-2M(X)M(Y)-(M(Y))^2=$$
$$=M(X^2)-(M(X))^2+M(Y^2)-(M(Y))^2=D(X)+D(Y).$$

Замечание. *Отметим, что свойство 5 распространяется на случай любого конечного числа случайных величин*.

Если C – постоянная, то

$$D(X+C)=D(X).$$

Покажем это:

$$D(X+C)=M(((X+C)-M(X+C))^2)=$$
$$=M((X+C-(M(X)+C))^2)=M((X-M(X))^2)=D(X).$$

Определение среднего квадратического отклонения. Квадратный корень из дисперсии случайной величины X называется ее **средним квадратическим отклонением** и обозначается $\sigma(X)$:

$$\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.}$$

Введение среднего квадратического отклонения объясняется тем, что дисперсия измеряется в квадратных единицах относительно размерности самой случайной величины. Например, если возможные значения некоторой случайной величины измеряются в метрах, то ее дисперсия – в квадратных метрах. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений той же размерности, что и сама случайная величина, используется среднее квадратическое отклонение.

Пример. Дисперсия случайной величины X равна 2. Найдите дисперсию случайной величины $Y = 5X + 3$.

Решение. Согласно свойствам дисперсии имеем

$$D(Y)=D(5X+3)=D(5X)=5^2\cdot D(X)=25\cdot 2=50.$$

Пример. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения.

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

Решение. Находим

$$M(X)=0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}2=0{,}9.$$

Запишем закон распределения квадрата отклонения случайной величины X, т. е. величины $(X - M(X))^2$:

$(X-M(X))^2$	$(0-0{,}9)^2$	$(1-0{,}9)^2$	$(2-0{,}9)^2$
P	0,3	0,5	0,2

По формуле для дисперсии дискретной случайной величины, принимающей конечное число значений, находим

$$D(X)=(0-0{,}9)^2\cdot 0{,}3+(1-0{,}9)^2\cdot 0{,}5+(2-0{,}9)^2\cdot 0{,}2=$$
$$=0{,}81\cdot 0{,}3+0{,}01\cdot 0{,}5+1{,}21\cdot 0{,}2=0{,}49.$$

Отсюда

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}49}=0{,}7.$$

Отметим, что дисперсию случайной величины X можно было найти и по формуле

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Запишем закон распределения случайной величины X^2.

X^2	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

Находим

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2 = 1,3,$$

откуда

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1,3 - 0,9^2 = 1,3 - 0,81 = 0,49.$$

Примеры решения задач

1. Подбрасываются две монеты, и подсчитывается количество выпавших «орлов» на обеих верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина *X* – число выпадения «орлов» на обеих монетах. Записать закон распределения этой случайной величины.

Решение. В данном испытании пространство элементарных событий равно $\Omega = \{(О, О), (Р, Р), (О, Р), (Р, О)\}$, где О означает, что выпал «орел», Р – выпала «решка». «Орел» может выпасть 1 раз, 2 раза или не появиться ни разу. Следовательно, случайная величина *X* может принимать только три значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вероятности этих значений равны соответственно

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad p_2 = P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad p_3 = P(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины *X* имеет вид.

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

2. Стрелок производит по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Случайная величина *X* – число попаданий по мишени. Записать закон распределения случайной величины.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли. В данном случае p=0,3; q = 0,7; n = 3, откуда получаем

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^3 = 0,343,$$

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^2 = 3 \cdot 0,3 \cdot 0,49 = 0,441,$$

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^1 = 3 \cdot 0,09 \cdot 0,7 = 0,189,$$

$$P_3(3) = C_3^3 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^0 = 0,027.$$

Закон распределения случайной величины *X* имеет вид.

X	0	1	2	3
P	0,343	0,441	0,189	0,027

3. Двое студентов играют в интересную игру: первый студент загадывает число от 1 до 6, второй студент должен угадать это число. Пусть случайная величина *X* – число попыток, сделанных вторым игроком при угадывании числа:

a) Составить закон распределения случайной величины *X;*

b) Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

Решение. а) Дискретная случайная величина X может принимать значения 1,2,3,4,5,6 (студент угадает либо с первой, либо со второй и т.д. до шестой попытки), $P(x=1)=1/6$ (с первой попытки угадано нужное число, тогда число благоприятных исходов равно 1, а число всех исходов равно 6). Если $x=2$, то число угадано со второй попытки $P(x=2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$. Если событие состоит в том, что первые две попытки были неудачными и только третья оказалась удачной, то вероятность такого события $P(x=3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$. Далее $P(x=4)=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Аналогично $P(x=5)=\frac{1}{6}$, $P(x=6)=\frac{1}{6}$.

Закон распределения числа сделанных попыток будет иметь вид.

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

б) $M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}$.

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X)=M(X^2)-(MX)^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{21}{6}\right)^2=15{,}17-12{,}25\approx 2{,}92,$$

где

$$M(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)=\frac{91}{6}.$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{2{,}92}\approx 1{,}7.$

4. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z=3X-4Y$, если $M(X)=2$, $M(Y)=3$.

Решение. Используем свойство – математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий; постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания – имеем

$$M(Z)=3M(X)-4M(Y)=3\cdot2-4\cdot3=6-12=-6.$$

5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

X	–1	0	2
P	p_1	p_2	p_3

Найдите p_1, p_2, p_3, если известны величины: математическое ожидание этой случайной величины $M(X)=0{,}1$ и математическое ожидание ее квадрата $M(X^2)=0{,}9$.

Решение. Пользуясь тем, что сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна 1, имеем $p_1+p_2+p_3=1$.

Принимая во внимание, что $M(X)=0{,}1$, получаем соотношение

$$-1p_1+0p_2+2p_3=0{,}1.$$

Составим ряд распределения для случайной величины X^2.

X^2	1	0	4

$\frac{7}{128}$

P	p_1	p_2	p_3

и запишем выражение

$$M(X^2) = 1p_1 + 0p_2 + 4p_3.$$

Используя условие задачи $M(X^2) = 0{,}9$, имеем

$$1p_1 + 4p_3 = 0{,}9,$$

откуда получается система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

$$-1p_1 + 0p_2 + 2p_3 = 0{,}1,$$

$$1p_1 + 4p_3 = 0{,}9.$$

Решив эту систему, найдем искомые вероятности:

$$p_1 = \frac{3}{5},\ p_2 = \frac{7}{30},\ p_3 = \frac{1}{6}.$$

6. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение σ(X) этой случайной величины.

Решение. Находим $M(X)$ по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i$.

$$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3.$$

Дисперсию $D(X)$ будем искать по формуле $D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2$. Напишем закон распределения случайной величины X^2.

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем $M(X^2) = 25 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 = 15{,}3$. Тогда

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9$.

7. Монету бросили 7 раз. Сколько раз в среднем появится герб?

Решение. Случайная величина X – выпадение герба. Она сможет принимать значения $X = 0,1,2,\ldots,7$. Запишем закон распределения случайной величины X.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{1}{128}$

Здесь вероятности найдены по формуле Бернулли

$$P(X = m) = P_m(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

где $n = 7,\ p = \frac{1}{2},\ q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $m = 0,1,2,\ldots,7$.

$$P(X=0)=\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128};\ P(X=1)=C_7^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{7}{128};$$

$$P(X=2)=C_7^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{21}{128};\ P(X=3)=C_7^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128};$$

$$P(X=4)=C_7^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{35}{128};\ P(X=5)=C_7^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{128};$$

$$P(X=6)=C_7^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{128};\ P(X=7)=\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}.$$

Найдем $M(X)$:

$$M(X)=0\cdot\frac{1}{128}+1\cdot\frac{7}{128}+2\cdot\frac{21}{128}+3\cdot\frac{35}{128}+4\cdot\frac{35}{128}+5\cdot\frac{21}{128}+6\cdot\frac{7}{128}+7\cdot\frac{1}{128}=$$

$$=\frac{448}{128}=3{,}5.$$

То есть герб в среднем появится 3-4 раза.

Задачи для самостоятельного решения

1. В коробке находится 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 100 рублей, а остальные – по 10 рублей. Составьте закон распределения случайной величины X – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

2. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара. Построить закон распределения случайной величины X – числа извлеченных шаров.

3. В урне 5 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлекли три шара. Построить закон распределения случайной величины X – числа извлеченных белых шаров.

4. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Найдите *M*(*X*).

а)

X	–1	5	6
P	0,2	0,4	0,4

б)

X	1,2	2,3	4,1
P	0,35	p_2	0,24

5. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, заданной законом распределения:

а)

X	4,3	5,1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

б)

X	131	140	160	180
P	0,05	0,1	0,25	0,6

6. Случайная величина X задана своим законом распределения.

X	–1	0	x_3	5
P	0,3	0,2	0,1	0,4

Найдите x_3, если известно, что $M(X) = 1{,}9$.

7. Организована беспроигрышная лотерея. Имеется 1000 выигрышей, из них 400 по 10 руб., 300 – по 20 руб., 200 – по 100 руб. и 100 – по 200 руб. Каков средний размер выигрыша для купившего один билет?

3.2 Функция распределения вероятностей случайной величины

Заметим, как говорилось ранее, дискретная случайная величина может быть задана законом распределения, представляющим собой перечень всех возможных значений этой случайной величины и их вероятностей. Однако такой способ задания не является общим: он неприменим, например, к непрерывным случайным величинам. Введение понятия функции распределения вероятностей случайной величины устраняет этот недостаток.

Введем следующие обозначения. Пусть x – действительное число, т.е. $x \in \boldsymbol{R}$. Обозначим через $F(x)$ – вероятность события A, состоящего в том, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т. е. $A = \{X < x\}$. Очевидно, что мы получили функцию $F(x)$ от переменной x.

Определение функции распределения. ***Функцией распределения*** вероятностей случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что X примет значение, меньшее x: $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения содержит в себе всю информацию, заложенную в случайной величине. Поэтому считается, что случайная величина (дискретная либо непрерывная) задана, если задана ее функция распределения.

***Свойства функции распределения любой случайной величины*:**

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Это свойство следует из того факта, что функция $F(x)$ есть вероятность.

2. Функция распределения $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

Покажем это:

Действительно, пусть $x_1 < x_2$. Событие «случайная величина X примет значение, меньшее x_2» можно представить в виде суммы двух несовместных событий: «X примет значение, меньшее x_1» и «X примет значение, удовлетворяющее неравенствам $x_1<X<x_2$». Обозначим вероятности последних двух событий через $P(X < x_1)$ и $P(x_1 \le X< x_2)$ соответственно. По теореме о вероятности суммы двух несовместных событий имеем

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2),$$

откуда

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Поскольку вероятность любого события – число неотрицательное, то $P(x_1 \le X<x_2) \ge 0$ и, следовательно, $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Вероятность попадания значений случайной величины X в полуинтервал $[a;b)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах этого интервала:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le a, \\ 1, \text{ при } x \ge b. \end{cases}$

Покажем это:

Действительно, если $x \le a,$ то событие $A=\{X < x\}$ является невозможным (случайная величина X таких значений не принимает) и, следовательно, его вероятность равна нулю. Если $x \ge b,$ то событие $A=\{X < x\}$ является достоверным и, следовательно, его вероятность равна единице.

5. Для случайной величины X

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1.$$

6. Функция распределения $F(x)$ непрерывна слева для любого $x_0 \in \boldsymbol{R}$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Свойства 5 и 6 рассмотрены без доказательства.

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{при } -1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина X принимает значения из полуинтервала $[0;1)$.

Решение. Так как на полуинтервале $[0;1)$ функция распределения задается формулой $F(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3},$ то

$$P(0 \le X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Функция распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\sum_{x_k<x} P(X=x_k),$$

где суммируются вероятности тех значений случайной величины X, которые меньше x. График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.

Пример. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей.

X	0	1	2
P	0,1	0,4	0,5

Найдите функцию распределения случайной величины X и постройте график функции распределения.

Решение. Если $x \le 0$, то событие $A = \{X < x\}$ является невозможным (случайная величина не принимает значений, строго меньших нуля) и, следовательно, $F(x) = 0$.

Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X) = 0{,}1$. Действительно, в данной ситуации случайная величина X может принять только одно значение, находящееся левее 1, – значение 0 с вероятностью 0,1.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X=0) + P(X=1) =0{,}1+0{,}4=0{,}5$. Действительно, $F(x)$ равно вероятности события $A = \{X < x\}$, которое может быть осуществлено, когда случайная величина X примет значение 0 или значение 1. Поскольку два этих события несовместны, то по теореме сложения вероятность события $A = \{X < x\}$ равна сумме вероятностей событий $A_1 = \{X =0\}$ и $A_2 = \{X =1\}$.

Если $x > 2$, то $F(x) = 1$, так как событие $A = \{X < x\}$ является достоверным.

Таким образом, получаем функцию распределения вида

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0,\\ 0{,}1 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0{,}5 & \text{при } 1<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведен на рис. 2.

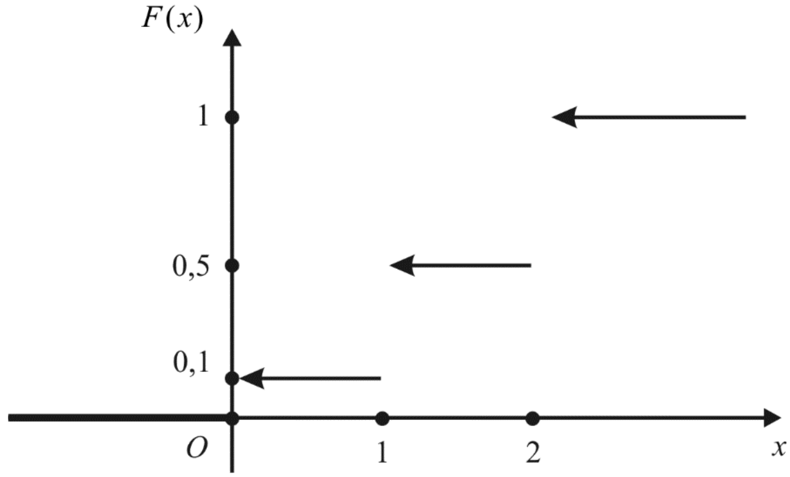


Рис. 2. – График функции распределения

Как видно из рис. 2, функция $F(x)$ является разрывной, причем точками разрыва являются значения x_k, принимаемые случайной величиной X. Величины скачков функции равны вероятностям $p_k = P(X = x_k)$.

Примеры решения задач

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения.

X	2	3	5
P	0,5	0,2	0,3

Найдите функцию распределения $F(x)$. Найдите вероятность попадания случайной величины X на полуинтервал [2;3).

Решение.

1) Если $x \le 0$, то $F(x)=0$. Действительно, значений меньше $x=2$ случайная величина не принимает. Значит, при $x \le 2$ функция $F(x) = P(X < x) = 0$.

2) Если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X < x) = P(X=2)=0{,}5$. Действительно, случайная величина X может принять только значение $x=2$ с вероятностью 0,5.

3) Если $3 < x \le 5$, то $F(x) = 0{,}7$. Действительно, X может принять значение $x=2$ с вероятностью 0,5 и значение $x=3$ с вероятностью 0,2. Следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, случайная величина X может принять с вероятностью $P(X=2)+P(X=3)=0{,}5+0{,}2=0{,}7$ (по теореме сложения вероятностей несовместных событий), т.е. $F(x) = P(X=2)+ P(X=3)=0{,}5+0{,}2 = 0{,}7$.

4) Если $x > 5$, то $F(x)=1$. Действительно,

$$F(x) = P(X=2)+P(X=3)+P(X=5)=0{,}5+0{,}2+0{,}3=1.$$

Итак, искомая функция распределения принимает вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2,\\ 0,5 \text{ при } 2<x\le 3,\\ 0,7 \text{ при } 3<x\le 5,\\ 1 \text{ при } x>5.\end{cases}$$

Далее найдем вероятность $P(2 \le X < 3)$ попадания случайной величины X на полуинтервал [2;3). По формуле $P(a \le X < b) = F(a) – F(b)$ получаем

$$P(2\le X <3) = F(3) – F(2) = 0,5 – 0 = 0,5.$$

2. Стрелок ведет стрельбу по мишени до первого попадания, имея только 4 патрона. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6:

а) найдите закон распределения числа патронов, оставшихся неизрасходованными, постройте многоугольник распределения этой случайной величины.

б) найдите функцию распределения $F(x)$ и постройте ее график. Найдите вероятность того, что случайная величина X примет значения, принадлежащие интервалу [1, 3).

Решение.

а) обозначим A_i – попадание стрелком при i-ом выстреле, i=1,2,3,4. Пусть X – число оставшихся патронов. Если X = 0, то стрелок израсходовал все патроны. Это может произойти только в двух случаях: либо стрелок первые три раза промахнулся, а на четвертый попал либо промахнулся все четыре раза, причем оба исхода являются событиями несовместными. Поэтому

$$P(X=0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})=0,4\cdot 0,4\cdot 0,4\cdot 0,6+0,4\cdot 0,4\cdot 0,4\cdot 0,4=$$
$$=0,4^3\cdot 0,6+0,4^4=0,0384+0,0256=0,064\,.$$

Для того чтобы после стрельбы остался 1 патрон, стрелок должен попасть в мишень после первых двух промахов, т.е. происходит событие $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$, $P(X=1)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=0,4^2\cdot 0,6=0,096$. Если X = 2, то произошло событие – «первый раз стрелок промахнулся, а второй попал», т.е. $\overline{A_1}A_2$ и $P(X=2)=P(\overline{A_1}A_2)=0,4\cdot 0,6=0,24$. Если X = 3, то у стрелка осталось 3 патрона, значит, он попал с первого выстрела, т.е. $P(X=3)=P(A_1)=0,6$.

Закон распределения имеет вид.

X	0	1	2	3
P	0,064	0,096	0,24	0,6

Проверка: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,064+0,096+0,24+0,6=1$.

Многоугольник распределения имеет вид (рис. 3):

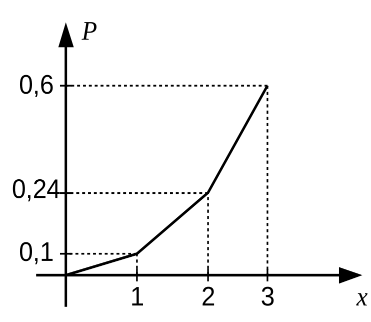


Рис. 3. – Многоугольник распределения

б) для нахождения функции распределения дискретной случайной величины воспользуемся формулой

$$F(x) = \sum_{x_i < X} P(X = x_i).$$

1. При $x \le 0$ $F(x) = \sum_{x_i < X} P(X = x_i) = 0$.

Рис. 1

2. При $0 < x \le 1$ $F(x) = \sum_{x_i < X} P(X = x_i) = P(X = 0) = 0{,}064$.

3. При $1 < x \le 2$ $F(x) = \sum_{x_i < 2} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) =$ $= 0{,}064 + 0{,}096 = 0{,}16$.

4. При $2 < x \le 3$ $F(x) = \sum_{x_i < 2} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$ $= 0{,}064 + 0{,}096 + 0{,}24 = 0{,}4$.

5. При $x > 3$ $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$ $= 0{,}064 + 0{,}096 + 0{,}24 + 0{,}6 = 1$.

Итак, искомая функция распределения принимает вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x \le 0, \\ 0{,}064 \text{ } при \text{ } 0 < x \le 1, \\ 0{,}16 \text{ } при \text{ } 1 < x \le 2, \\ 0{,}4 \text{ } при \text{ } 2 < x \le 3, \\ 1 \text{ } при \text{ } x > 3. \end{cases}$$

Таким образом, график $F(x)$ имеет следующий вид (рис. 4):

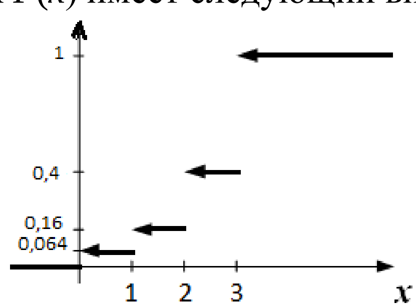


Рис. 4. – График функции распределения

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значения, принадлежащие интервалу [1, 3): $P(1 \le X < 3) = F(3) - F(1) = 0{,}4 - 0{,}064 = 0{,}336$.

3. Двое студентов играют в интересную игру: первый студент загадывает число от 1 до 6, второй студент должен угадать это число. Пусть случайная величина X – число попыток, сделанных вторым игроком при угадывании числа. Найдите функцию распределения случайной величины X и постройте ее график.

Решение. Закон распределения числа сделанных попыток будет иметь вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Построим функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

Так как x не принимает значений, меньших 1, то при $x \le 1,\ F(x) = 0.$

При $1 < x \le 2$ только одно значение случайной величины меньше x, а именно x=1 и вероятность этого значения равна 1/6, тогда $1 < x \le 2$, $F(x)$=1/6.

При $2 < x \le 3$ два значения случайной величины X, а именно x=1 и x=2, удовлетворяют неравенству $X<x$, тогда $F(x) = P(x=1) + P(x=2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

При $3 < x \le 4$ три значения случайной величины X удовлетворяют неравенству $X < x$, а именно x=1, x=2, x=3, следовательно

$$F(x) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

Аналогично, при $4 < x \le 5$,

$$F(x) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}.$$

При $5 < x \le 6$, $F(x) = \frac{5}{6}$; и наконец, если x>6, то $F(x) = \frac{6}{6} = 1$. Таким образом, аналитическое выражение функции распределения будет иметь вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 1, \\ \frac{1}{6} \ \ \textit{при} \ \ 1 < x \le 2, \\ \frac{2}{6} \ \ \textit{при} \ \ 2 < x \le 3, \\ \frac{3}{6} \ \ \textit{при} \ \ 3 < x \le 4, \\ \frac{4}{6} \ \ \textit{при} \ \ 4 < x \le 5, \\ \frac{5}{6} \ \ \textit{при} \ \ 5 < x \le 6, \\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x > 6. \end{cases}$$

Построим график функции распределения (рис. 5).

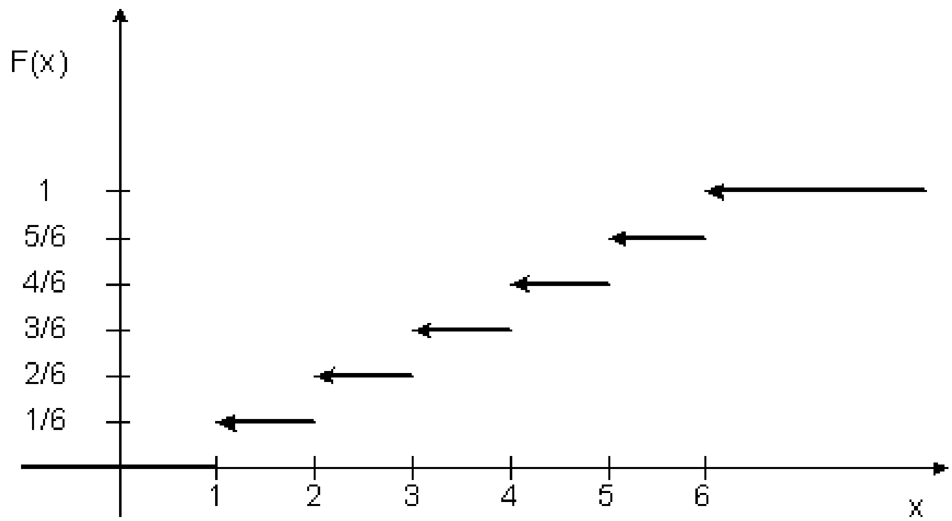


Рис. 5. – График функции распределения

Задачи для самостоятельного решения

1. В партии из 15 телефонных аппаратов 5 неисправных аппаратов. Случайная величина X – число неисправных аппаратов среди 3, случайным образом отобранных. Записать закон распределения случайной величины X. Вычислите $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. Найдите $F(x)$ и постройте ее график.

2. Вероятность того, что необходимая студенту книга в библиотеке свободна, равна 0,3. В городе 4 библиотеки. Случайная величина X – число библиотек, которые посетит студент в поисках книги. Вычислите $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. Найдите $F(x)$ и постройте ее график.

3. При установившемся технологическом процессе предприятие выпускает 2/3 своих изделий первым сортом. Случайная величина X – число изделий первого сорта из 4 взятых наугад. Запишите закон распределения случайной величины X. Вычислите $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. Найдите $F(x)$ и постройте ее график.

4. Из 25 работ,среди которых 5 имеют оценку «отлично», выбирают 3 работы. Определить функцию распределения случайной величины X — количества «отличных» работ среди выбранных. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

5. В группе туристов из 25 человек – 10 мужчин. Определите функцию распределения случайной величины X – количества мужчин среди 4 выбранных. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

6. В экзаменационном билете три задачи. Вероятность того, что студент правильно решит первую задачу, равна 0,9, вторую – 0,8, третью – 0,7. Составьте закон распределения числа правильно решенных задач в билете, вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Постройте график функции распределения.

4. *Непрерывные случайные величины*

4.1 Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Используя понятие функции распределения вероятностей, можно дать более точное определение непрерывной случайной величины.

Определение непрерывной случайной величины. Случайная величина X *называется* ***непрерывной***, если существует функция ***p(x)*** такая, что при любом $x \in \boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{F(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt.}$$

Функция ***p(x)*** входящая в последнее равенство, называется ***плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины*** X. График функции **p(x)** называется ***кривой распределения***.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[a;b)$.

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[a;b)$ равна определенному интегралу от ее плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a \le X < b) = \int\limits_{a}^{b} p(x)\,dx.$$

Доказательство. Действительно, на основании свойства 3 функции распределения имеем

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Из определения непрерывной случайной величины имеем

$$F(b) = \int\limits_{-\infty}^{b} p(x)\,dx,\; F(a) = \int\limits_{-\infty}^{a} p(x)\,dx,$$

откуда

$$F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} p(x)\,dx - \int\limits_{-\infty}^{a} p(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{a} p(x)\,dx + \int\limits_{a}^{b} p(x)\,dx - \int\limits_{-\infty}^{a} p(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} p(x)\,dx.$$

Замечание. *Доказанная формула геометрически означает тот факт, что вероятность попадания значений непрерывной случайной величины X в* *полуинтервал [a;b) равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью Ox и отрезками прямых x=a, x=b (рис. 6).*

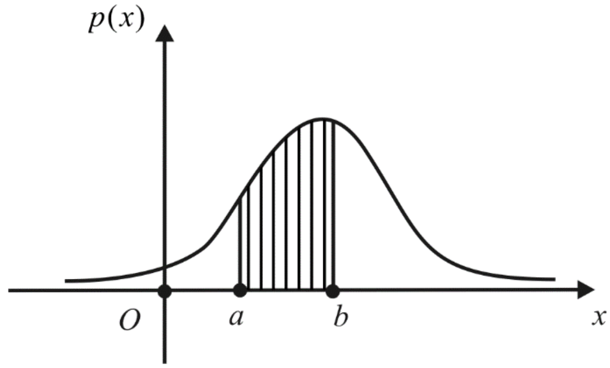


Рис. 6

Из определения непрерывной случайной величины следует, что функция $F(x)$ непрерывна. Поэтому вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю:

$$P(X=c)=0.$$

Действительно, положив в формуле

$$\boldsymbol{F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt.}$$

$a=c$, $b=c+\Delta x$, имеем $P(c\le X\le c+\Delta x)=F(c+\Delta x)-F(c)$.

Устремим Δx к нулю. В силу непрерывности $F(x)$ в точке c разность $F(c+\Delta x)-F(c)$ также стремится к нулю, откуда и получаем требуемое.

Используя равенство $P(X=c)=0$, нетрудно получить равенства

$$P(a\le X<b)=P(a<X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b).$$

Например, равенство

$$P(a\le X<b)=P(a<X<b)$$

доказывается так:

$$P(a\le X<b)=P(X=a)+P(a<X<b)=0+P(a<X<b)=P(a<X<b).$$

Свойства плотности распределения

1. $p(x)\ge 0$ (следует из того, что функция $F(x)$ – неубывающая функция).

2. В точках дифференцируемости функции распределения $F(x)$ ее производная равна плотности распределения: $F'(x)=p(x)$.

3. Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty,+\infty)$ от плотности распределения $p(x)$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx=1.$$

Это следует из того, что $F(+\infty)=1$. Это свойство имеет следующую геометрическую интерпретацию: площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения и осью Ox, равна единице.

В частности, если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат отрезку $[a;b]$, то

$$\int_a^b p(x)\,dx = 1.$$

так как $p(x) = 0$ вне этого отрезка.

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x \le 0, \\ \dfrac{1}{2}\sin x & \text{при } \ 0 < x \le \pi, \\ 0 & \text{при } \ x > \pi. \end{cases}$$

Найдите функцию распределения $F(x)$ и вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(0; \frac{\pi}{4})$.

Решение. Если $x \le 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

Если $0<x \le \pi$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} p(t)\,dt + \int_{0}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\sin t\,dt =$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x.$$

Если $x > \pi$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} p(t)\,dt + \int_{0}^{\pi} p(t)\,dt + \int_{\pi}^{x} p(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\sin t\,dt + \int_{\pi}^{x} 0\,dt = 0 - \frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi} + 0 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x \le 0, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos x & \text{при } \ 0 < x \le \pi, \\ 1 & \text{при } \ x > \pi; \end{cases}$$

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

4.2 Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Определение математического ожидания. ***Математическим ожиданием непрерывной случайной величины*** *X*, возможные значения которой принадлежат отрезку [*a*; *b*], а плотностью распределения вероятностей является функция *p*(*x*) называют определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b xp(x)\,dx.$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей оси *Ox*, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx$$

при условии, что несобственный интеграл сходится абсолютно, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,p(x)\,dx.$$

Определение дисперсии. ***Дисперсией непрерывной случайной величины*** *X* называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

Если возможные значения *X* принадлежат отрезку [*a; b*], а плотностью распределения вероятностей является функция *p*(*x*), то

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2\,p(x)\,dx.$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей оси *Ox*, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2\,p(x)\,dx$$

при условии, что интеграл сходится.

Для вычисления дисперсии можно получить более удобные формулы:

$$D(X) = \int_a^b x^2 p(x)\,dx - (M(X))^2,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx - (M(X))^2.$$

Замечание. *Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины обладают теми же свойствами, что и математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.*

Для непрерывной случайной величины X *среднее квадратическое отклонение* $\sigma(X)$ определяется, как и для дискретной случайной величины, формулой

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{2} & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. Имеем

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{4}{3},$$

$$D(X) = \int_0^2 \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^3 - \frac{8}{3} x^2 + \frac{16}{9} x \right) dx =$$

$$= \left.\left(\frac{1}{8} x^4 - \frac{4}{9} x^3 + \frac{4}{9} x^2 \right)\right|_0^2 = 2 - \frac{32}{9} + \frac{16}{9} = \frac{2}{9},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Примеры решения задач

1. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{9} & \textit{при} \quad 0 < x \le 3, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найдите: а) плотность распределения вероятностей $p(x)$; б) математическое ожидание $M(X)$; в) дисперсию $D(X)$; г) вероятность попадания случайной X на интервал $[0;1)$; д) постройте графики $p(x)$ и $F(x)$.

Решение. а) по определению $p(x) = F'(x)$, тогда

$$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{2x}{9} & при \quad 0<x\le 3,\\ 0 & при \quad x>3.\end{cases}$$

б) найдем математическое ожидание по формуле: $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$,

$$M(X)=\int\limits_0^3 \frac{2x}{9}\cdot xdx=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x^2dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3=\frac{2}{9}\cdot\frac{3^3}{3}=\frac{2\cdot 27}{27}=2;$$

в) вычислим дисперсию: $D(X)=M(X)^2-(MX)^2$, где

$$M(X^2)=\int\limits_0^3 \frac{2x}{9}\cdot x^2dx=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x^3dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^3=\frac{x^4}{18}\Bigg|_0^3=\frac{3^4}{18}=\frac{9}{2}.$$

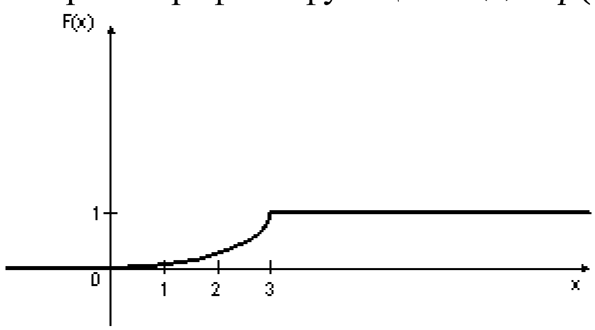
Тогда $D(X)=\frac{9}{2}-2^2=\frac{9}{2}-4=\frac{9-8}{2}=\frac{1}{2}=0{,}5$;

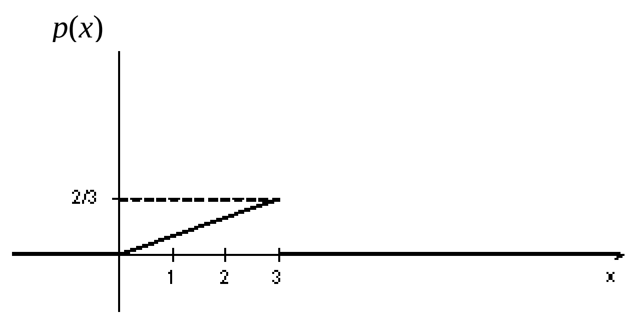
г) исходя из свойства функции распределения, имеем

$$P(\alpha\le x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha), \text{ тогда}$$

$$P(0\le x<1)=F(1)-F(0)=\frac{x^2}{9}\Bigg|_{x=1}-\frac{x^2}{9}\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{9}=0{,}111;$$

д) построим графики функций $F(x)$ и $p(x)$:





2. Дана функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ ax^2 & при \quad 0<x\le 2,\\ 1 & при \quad x>2.\end{cases}$$

Найдите коэффициент a.

Решение. Из непрерывности функции $F(x)$ следует, что

$$\lim_{x\to 2-0}F(x)=\lim_{x\to 2-0}ax^2=\lim_{x\to 2+0}F(x)=1, \text{ т.е. } \lim_{x\to 2}ax^2=1,$$

таким образом,

$$a\cdot 2^2=1,\ a\cdot 4=1,\ a=\frac{1}{4},\ \text{тогда}\ F(x)=\begin{cases}0\ \ при & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}\ \ при & 0<x\le 2,\\ 1\ \ при & x>2.\end{cases}$$

3. Задана плотность распределения случайной величины X

$$p(x)=\begin{cases}0\ \ при & x\le -1,\\ a(x+1)\ \ при & -1<x\le 2,\\ 0\ \ при & x>2.\end{cases}$$

Найдите коэффициент *a*.

Решение. Из свойства плотности распределения вероятностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \text{ следует, что}$$

$$\int_{-1}^{2} a(x+1)dx=1;\ a\int_{-1}^{2}(x+1)dx=1;\ a\left(\int_{-1}^{2}xdx+\int_{-1}^{2}dx\right)=1;\ a\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2}+x\Bigg|_{-1}^{2}\right)=1;\ a\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}+2+1\right)=1;$$

$$a\left(\frac{3}{2}+3\right)=1;\ a\cdot\frac{9}{2}=1,\ a=\frac{2}{9}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0,\ при & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4},\ при & 0<x\le 2,\\ 1,\ при & x>2.\end{cases}$$

Найдите плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

2. По данной функции распределения $F(x)$ случайной величины X найдите плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность попадания случайной величины X на интервал (0,5; 1,5) и постройте графики функций $F(x)$ и $p(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le 0,\\ \dfrac{x^3}{8},\ при\ 0<x\le 2,\\ 1,\ при\ x>2.\end{cases}$$

3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, \; при \;\; x<0,\\ ax^2, \; при \;\; 0\le x\le 2,\\ 1, \; при \;\; x>3.\end{cases}$$

Найдите коэффициент a, плотность распределения вероятностей $p(x)$, и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[1; 2]$.

4. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $p(x)$, причем

$$p(x)=\begin{cases}0, \; x\notin[0;3],\\ a(3x-x^2), \; x\in[0;3].\end{cases}$$

Найдите коэффициент a и вероятность попадания случайной величины X в промежуток $(1; 2)$.

5. Определите параметры функции $p(x)=\begin{cases}0, \; x\notin[1;4],\\ ax^3+bx, \; x\in[1;4].\end{cases}$

чтобы она являлась плотностью непрерывной случайной величины с математическим ожиданием, равным 2.

6. Электропоезда в метро движутся с постоянными интервалами в 2 минуты. Найдите вероятность того, что пассажир будет ожидать поезд в пределах от 30 до 100 секунд.

5. Законы распределения случайных величин и их применение в социологических исследованиях

5.1 Биномиальное распределение

Случайная величина X, которая принимает значение m с вероятностью $C_n^m p^m q^{n-m}$, где $m=0,1,2,...,n;\; 0\le p\le 1,\; q=1-p,$ называется распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p.

Рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых наступает либо событие A с вероятностью p, либо противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $q=1-p$. Пусть X – случайная величина, равная числу появлений события A в n испытаниях.

Понятно, что событие A может не наступить вообще, наступить один раз, два раза, …, n раз. Следовательно, возможными значениями случайной величины X будут числа $0,1,2,...,n$ (дискретная случайная величина с конечным числом значений). По формуле Бернулли можно найти вероятности этих значений:

$$P_n(0)=C_n^0 p^0 q^n=q^n, ..., P_n(1)=C_n^1 p^1 q^{n-1},$$

$$P_n(2)=C_n^2 p^2 q^{n-2}, ..., P_n(n)=C_n^n p^n q^0=p^n.$$

Биномиальный закон распределения может быть представлен в следующем виде.

X	0	1	2		m		n
P	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$		$C_n^m p^m q^{n-m}$		p^n

Замечание. *Для случайной величины X, имеющей биномиальное распределение, имеем*

$$M(X) = np, \ \ D(X) = npq.$$

Пример. Производится 3 независимых социологических испытания. При каждом испытании событие A появляется с одной и той же вероятностью p=0,6. Запишите в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа появлений события A при этих испытаниях.

Решение. Это биномиальное распределение, для которого закон распределения имеет вид

X	0	1	2	3
P	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Тогда

X	0	1	2	3
P	0,064	0,288	0,432	0,216

Контроль: 0,064+0,288+0,432+0,216=1.

5.2 Распределение Пуассона

Рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых наступает либо событие A с вероятностью p, либо противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $q = 1 - p$. Пусть X – случайная величина, равная числу появлений события A в n испытаниях. Если n является достаточно большим, а p – достаточно малым, причем $np=\lambda$, где λ – некоторое число ($\lambda > 0$), то

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \ \ m = 0, 1, \ldots$$

Говорят, что случайная величина X имеет *распределение Пуассона*, если ее закон распределения задается следующим образом.

X	0	1	...	k	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	...	$\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	…

Это дискретная случайная величина, характеризующая возможность появления редких событий.

Замечание. *Для случайной величины, распределенной по закону Пуассона, имеют место равенства* $M(X) = D(X)=\lambda$.

Таким образом, *необходимым условием* того, что случайная величина распределена по закону Пуассона, является равенство $M(X)$ и $D(X)$.

Пример. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создаётся в 99,99% случаев. Какова вероятность того, что из 10000 вакцинированных детей заболеет соответственно 1, 2, 3, 4 ребёнка?

Решение. Вероятность заболеть p=0,0001, число испытаний n=10 000, поэтому $\lambda=np=1$. По формуле $P_n(k)\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ находим

$$P(1)=\frac{1\cdot e^{-1}}{1!}=0,3679,$$

$$P(2)=\frac{1^2\cdot e^{-1}}{2!}=\frac{1}{2}P(1)=0,1839,$$

$$P(3)=\frac{1^3\cdot e^{-1}}{3!}=\frac{1}{3}P(2)=0,0613,$$

$$P(4)=\frac{1^4\cdot e^{-1}}{4!}=\frac{1}{4}P(3)=0,0153.$$

Пример. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью, равной 0,001. Какова вероятность того, что при 2000 испытаниях событие A появится не менее 2 и не более 4 раз.

Решение. Из условия n = 2000, p = 0,001, np = 0,001·2000 = 2, $2\le k\le 4$. Тогда

$$P(2\le k\le 4)=P_n(2)+P_n(3)+P_n(4)=\frac{2^2\cdot e^{-2}}{2!}+\frac{2^3\cdot e^{-2}}{3!}+\frac{2^4\cdot e^{-2}}{4!}\approx 0,541.$$

5.3 Показательное распределение

Показательным (***экспоненциальным***) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$p(x)=\begin{cases}0\ при\ \ x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}\ \ при\ \ x\ge 0.\end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Найдем функцию распределения вероятностей данной случайной величины. При x<0 имеем

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0.$$

Если $x>0$, тогда

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{0}p(t)dt+\int_{0}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=-\ e^{-\lambda t}\Big|_0^x=-(e^{-\lambda x}-e^0)=1-e^{-\lambda x}.$$

Следовательно, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} \ \ \textit{при} \ \ x\ge 0.\end{cases}$$

Замечание: *Числовые характеристики случайной величины распределённой по показательному закону*:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{\lambda}.$$

Необходимым условием того, что случайная величина распределена по показательному закону, является равенство $M(X)=\sigma(X)$.

Пример: По показательному закону распределено время обслуживания, продолжительность ремонта, время простоя в очереди и др.

Замечание: *Вероятность попадания значений непрерывной случайной величины X в заданный интервал* (α;β), α≥0 *может быть вычислена по формуле*

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}p(x)dx=F(\beta)-F(\alpha)=e^{-\alpha\lambda}-e^{-\beta\lambda}.$$

Пример. Среднее время обслуживания покупателя 10 минут. Чему равна вероятность простоя в очереди от 10 до 20 минут?

Решение. По условию $M(X)=\frac{1}{\lambda}=10,$ тогда $\frac{1}{\lambda}=10.$ Если X – время обслуживания, то $P(10<X<20)=F(20)-F(10)=e^{-\frac{1}{10}\cdot 10}-e^{-\frac{1}{10}\cdot 20}=e^{-1}-e^{-2}\approx 0,2326.$

Если T – непрерывная случайная величина, выражающая продолжительность времени безотказной работы какого-либо элемента, а λ – среднее число отказов в единицу времени, то продолжительность времени t безотказной работы этого элемента можно считать случайной величиной, распределенной по показательному закону с функцией распределения $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t},$ которая определяет вероятность отказа элемента за время t.

5.4 Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X называется ***равномерно распределенной*** с параметрами a и b, если плотность распределения этой случайной величины постоянна на отрезке $[a;b]$ и равна нулю вне этого отрезка.

Функция плотности распределения определяется равенством

$$p(x)=\begin{cases}c, \ \textit{если} \ \ a\le x\le b,\\ 0, \ \textit{если} \ \ x<a \ \ \textit{или} \ \ x>b.\end{cases}$$

Поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_{a}^{b}cdx=c\cdot(b-a)=1,$ то $c=\dfrac{1}{b-a}.$

Следовательно, $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{ если } a\le x\le b,\\ 0, \text{ если } x<a \text{ или } x>b.\end{cases}$

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (α;β) принадлежащий отрезку $[a;b]$, пропорциональна длине этого интервала:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}p(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Непосредственно из определений находится функция распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a<x<b,\\ 1 \text{ при } x\ge b.\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример. Цена товара X может быть в равной степени любой в пределах от 15 до 25 тыс. ден. ед. Найдите $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$.

Решение. Случайная величина X распределена равномерно, следовательно,

$$M(X)=\frac{15+25}{2}=20,\ D(X)=\frac{(25-15)^2}{12}=\frac{100}{12}=8{,}33,\ \sigma(X)=\sqrt{8{,}33}=2{,}89.$$

5.5 Нормальное распределение

В социологических исследованиях чаще всего ссылаются на нормальное распределение, которое играет важнейшую роль в применении численных методов в социологии. Нормальное распределение лежит в основе измерений, методов проверки гипотез.

Продолжительность жизни, возраст вступления в брак и появление первого ребенка и т.д., подчиняются строгой закономерности. Распределения частот встречаемости любого демографического (продолжительность жизни и пр.) или антропометрического (рост, вес и пр.) показателя, измеренного на большом количестве людей, имеет одну и ту же колоколообразную форму.

Нормальное распределение характеризуется тем, что крайние значения признака в нем встречаются довольно редко, а значения, близкие к средней величине – довольно часто. И продолжительность жизни, и рост человека, и психологические особенности, например, способности, – это случайные проявления, частота встречаемости которых подчинена закону нормального распределения.

Непрерывная случайная величина X называется ***распределённой по нормальному закону***, если плотность её распределения определяется по формуле

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a и σ – параметры распределения, $\sigma > 0$ (положительное действительное число), a – любое действительное число. Записывается это так: N(a, σ).

Рассмотрим вероятностный смысл параметров случайной величины X. Параметр a совпадает с математическим ожиданием случайной величины X: $a = M(X)$, а параметр σ является средним квадратическим отклонением случайной величины X: $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Нормальное распределение с параметрами a=0 и $\sigma = 1$ называется ***нормированным*** или ***стандартным***.

График плотности распределения вероятностей нормального распределения называют ***нормальной кривой*** или кривой Гаусса. Он симметричен относительно прямой x=a, имеет асимптоту – ось Ox и схематически изображен на рис. 7.

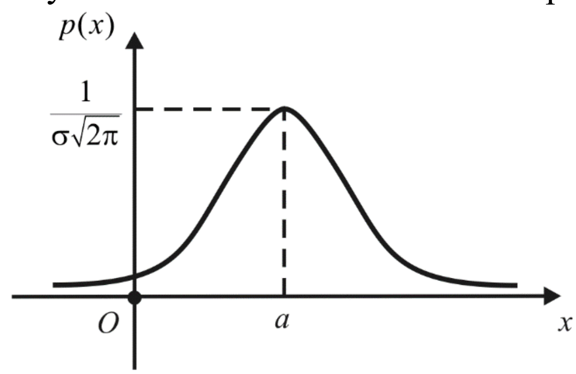


Рис. 7

На рис. 8 показаны нормальные кривые при различных σ. На рис 9 показаны нормальные кривые для различных a.

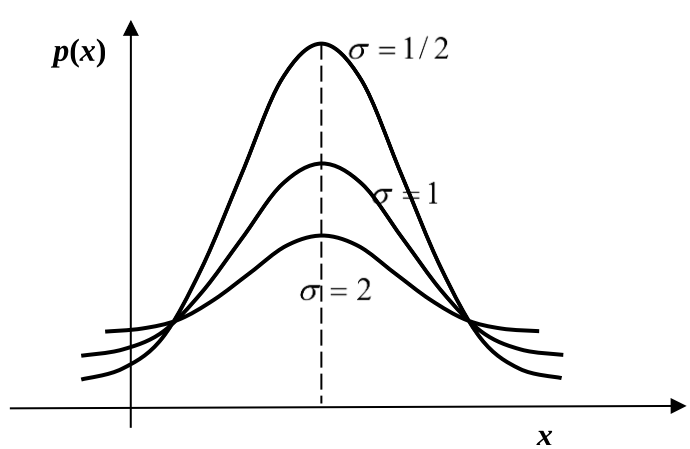


Рис. 8

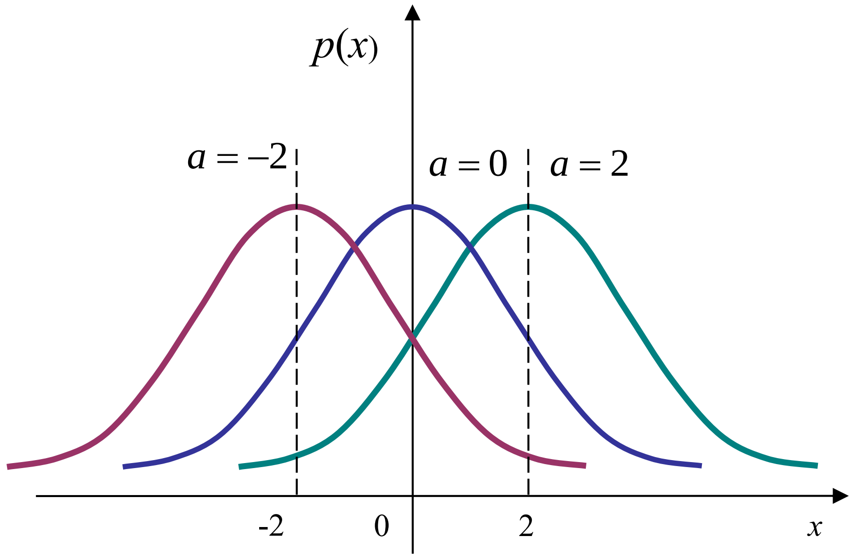


Рис. 9

Вероятность попадания непрерывной случайная величина *X*, распределенной по нормальному закону с параметрами распределения a и σ, на промежуток (α;β) определяется по формуле $P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$,

где $\Phi(x)$ – *функция Лапласа*, определяемая формулой

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt.$$

Свойства функции $\Phi(x)$ рассмотрены в п. 4.3.5, а её значения приведены в прил. 2.

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины *X* от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа ε находится по формуле

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}).$$

Что же общего у всех нормальных кривых? Чтобы ответить на этот вопрос, положим в последнем равенстве $\varepsilon = 3\sigma$, тогда поучим: $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi(3) = 0,9973 \approx 1.$

В социально-психологических исследованиях нормальное распределение используется в первую очередь при разработке и применении тестов интеллекта и способностей. Психометрические тесты общих и специальных умственных способностей часто дают приблизительно нормальное распределение оценок. Значения IQ интеллектуального теста распределены приблизительно нормально.

Пример. Спортсмен каждое утро взвешивается на напольных весах. Случайные ошибки измерения *X* веса подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 10 мг. Найдите вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, меньше по абсолютной величине 15 мг, если известно, что математическое ожидание случайных ошибок *X* равно нулю.

Решение. По формуле $P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$ находим

$$P(|X-0|<15)=2\Phi(\frac{15}{10})=2\Phi(1,5).$$

По таблице прил. 2 находим $\Phi(1,5)=0,4332.$ Тогда искомая вероятность равна

$$P(|X|<15)=2\cdot 0,4332=0,8664.$$

Примеры решения задач

1. Проверкой качества установлено, что из каждых 100 деталей не имеют дефектов 75 штук в среднем. Составьте биномиальный закон распределения вероятностей числа пригодных деталей из взятых наугад 6 деталей.

Решение. Из условия задачи следует, что $p=0,75,\ q=1-p=0,25,\ n=6.$ В соответствии с формулой Бернулли находим:

$$P(X=0)=1\cdot(0,25)^6\approx 0,0002;\ ;$$
$$P(X=1)=6\cdot(0,75)\cdot(0,25)^5\approx 0,0044;$$
$$P(X=2)=15\cdot(0,75)^2\cdot(0,25)^4\approx 0,033;$$
$$P(X=3)=20\cdot(0,75)^3\cdot(0,25)^3\approx 0,132;$$
$$P(X=4)=15\cdot(0,75)^4\cdot(0,25)^2\approx 0,297;$$
$$P(X=5)=6\cdot(0,75)^5\cdot(0,25)^1\approx 0,356;$$
$$P(X=6)=1\cdot(0,75)^6\approx 0,178.$$

Закон распределения данной случайной величины *X* – числа стандартных деталей из 6 взятых наудачу – запишем в виде.

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,0002	0,0044	0,033	0,132	0,297	0,356	0,178

Проверка: 0,0002+0,0044+0,033+0,132+0,297+0,356+0,178=1.

2. Телевизионный канал рекламирует новый вид детского питания. Вероятность того, что телезритель увидит рекламу, оценивается в 0,002. В случайном порядке выбраны 500 телезрителей. Найдите вероятность того, что рекламу увидят: а) ровно три телезрителя; б) менее трех телезрителей.

Решение. По условию $p=0,002,\ n=500,\ k=3.$ Найдем $\lambda=np=500\cdot 0,002=1.$ Имеет место формула Пуассона

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}:$$

а) найдем вероятность того, что рекламу увидят ровно 3 телезрителя:

$$P_{500}(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} = 0,0613;$$

б) найдем вероятность того, что рекламу увидят менее 3 телезрителей:

$$P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{5}{2}e^{-1} = \frac{5}{2e} \approx 0,9197.$$

3. Продолжительность жизни (в днях) растений данного вида в определенной среде представляет собой непрерывную случайную величину X, имеющую показательное распределение с параметром $\lambda = \frac{1}{140}$. Определить, какая доля растений данного вида погибает за период 100 дней.

Решение. Находим

$$P(0 < X < 100) = \int_0^{100} \frac{1}{140} e^{-\frac{x}{140}} dx = -e^{-\frac{x}{140}} \Bigg|_0^{100} = 1 - e^{-\frac{5}{7}} \approx 0,51.$$

4. Известно, что температура водоема в течение месяца является равномерно распределенной случайной величиной на отрезке [6;10]. Найдите среднюю температуру водоема в данном месяце.

Решение. Пусть X – температура водоема в течение месяца. Тогда ее среднее значение равно $M(X) = \frac{6+10}{2} = 8.$

5. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 30 ден. ед., и средним квадратическим отклонением, равным 10. Определить вероятность того, что в случайно выбранный день обслуживаемого периода цена за акцию была между 10 и 50 ден. ед.

Решение. Воспользуемся формулой $P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}).$ По условию $\alpha = 10, \beta = 50, a = 30, \sigma = 10,$ тогда

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(2) + \Phi(2) = 2\Phi(2).$$

По таблице прил. 2 находим $\Phi(2) = 0,4772.$ Отсюда, искомая вероятность равна:

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544.$$

6. Вес тропического грейпфрута, выращенного в Краснодарском крае, – случайная величина, подчиненного нормальному закону с математическим ожиданием 0,5 кг и средним квадратическим отклонением 0,09 кг. Установить: а) вероятность того, что наудачу взятый грейпфрут имеет вес в пределах от 0,4 до 0,7 кг; б) вероятность того, что вес наудачу взятого грейпфрута отличается от математического ожидания не более, чем на 0,2 кг; в) в каких границах следует ожидать вес грейпфрута, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,95.

Решение.

а) $P(0,4 < X < 0,7) = \Phi\left(\frac{0,7-0,5}{0,09}\right) - \Phi\left(\frac{0,4-0,5}{0,09}\right) = \Phi(2,22) + \Phi(1,11) = 0,4867 + 0,3664 = 0,8531;$

б) $P(|X-0,5| < 0,2) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{0,2}{0,09}) = 2\Phi(2,22) = 2 \cdot 0,4867 = 0,9734;$

в) $P(|X-0,5| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{0,09}) = 0,95,$ тогда $\Phi(\frac{\varepsilon}{0,09}) = \frac{0,95}{2} = 0,475.$

По таблице приложения 2 имеем $\frac{\varepsilon}{0,09} = 1,96,$ откуда $\varepsilon = 1,96 \cdot 0,09 = 0,1764$(кг).

Значит, границы, в которых следует ожидать вес грейпфрута, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,95, будут

$$(a-\varepsilon; a+\varepsilon) = (0,5-0,1764;\ 0,5+0,1764) = (0,3236;\ 0,6764).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Производится 9 независимых испытаний. При каждом испытании событие A появляется в одной и той же вероятностью $p = \frac{2}{3}$. Запишите в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа появлений события A при этих испытаниях.

2. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того, что герб при этом выпадет ровно 4 раза.

3. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин. равна 0,002. Найдите вероятность того, что в течение 1 мин. обрыв произойдет не более чем на трех веретенах.

4. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найдите вероятность следующих событий: а) «в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию»; б) «в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию»; в) «в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию».

5. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с функцией плотности $p(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le 0, \\ 7e^{-7x} & при\ \ x > 0. \end{cases}$

Найдите вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X попадет в интервал (0,15; 0,6), математическое ожидание, дисперсию случайной величины X.

6. Найдите среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке [-2; 7].

7. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найдите вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

8. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 300 вызовов. Найдите вероятность того, что за данную минуту она получит ровно два вызова.

9. Среди семян имеется 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 500 семян обнаружить 5 семян сорняков.

10. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найдите вероятность того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

11. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 12,5. Вероятность попадания случайной величины X в интервал (10; 15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания случайной величины X в интервал (35; 40)?

12. Среднее время обслуживания покупателя – 20 минут. Чему равна вероятность простоя в очереди от 20 до 40 минут?

13. Испытывают два независимо работающих электроприбора. Длительность работы первого элемента имеет показательное распределение с параметром 0,02, второго – 0,04. Найдите вероятность того, что за 50 часов оба элемента откажут.

14. Поезда данного маршрута городского трамвая идут с интервалом в 5 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через минуту после ухода предыдущего поезда, но не позднее чем за две минуты до отхода следующего поезда?

15. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами a=375 г, σ=25 г. Найдите вероятность того, что вес одной рыбы будет: а) от 300 до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300 г.

16. Нефтеразведывательная компания получила финансирование для проведения 6 нефтеразработок. Вероятность успешной нефтеразведки 0,5. Предположим, что нефтеразведку осуществляют независимые друг от друга разведывательные партии. Составить закон распределения случайной величины X – числа успешных нефтеразведок. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое распределение вероятностей называется биноминальным?

2. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биноминальному закону с параметрами n и p?

3. При каких условиях можно применять закон Пуассона? Каковы общие условия, необходимые для применения законов распределения Пуассона и биномиального распределения?

4. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона?

5. Как определяется показательное распределение случайной величины?

6. Напишите функцию распределения для показательного закона.

7. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей показательное распределение?

8. Как находится вероятность попадания в заданный интервал $(a;b)$ значений случайной величины X, имеющей показательное распределение?

9. Как определяется вероятность отказа элемента за время t?

10. Что такое функция надежности?

11. Какое распределение вероятности называют равномерным на отрезке $[a;b]$?

12. Какой вид имеет функция распределения $F(x)$ случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$?

13. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$?

14. Запишите плотность распределения $p(x)$ случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a;\, b]$.

15. Чему равны математическое ожидание и дисперсия нормальной случайной величины?

16. Как вычислить вероятность отклонения нормальной случайной величины от её математического ожидания?

17. Сформулируйте правило трех сигм.

6. Лабораторный практикум

Основные законы распределения вероятностей

<u>Цель:</u> *изучить основные статистические функции Excel и их использование для решения прикладных задач.*

I. <u>Биномиальное распределение</u>

Случайная величина X называется распределенной по биномиальному закону, если она принимает значение m с вероятностью $C_n^m p^m q^{n-m}$, где $m = 0,1,2,..., n$.

В Excel для вычисления вероятности появления конкретного значения случайной величины с биномиальным распределением или значения случайной величины по заданной вероятности используются функции **БИНОМРАСП** и **КРИТБИНОМ**.

БИНОМРАСП – возвращает отдельное значение биномиального распределения.

Функция БИНОМРАСП используется в задачах с фиксированным числом тестов или испытаний, когда результатом любого испытания может быть только успех или неудача, испытания независимы, и вероятность успеха постоянна на протяжении всего эксперимента.

Синтаксис. **БИНОМРАСП** (*число_успехов; число_испытаний; вероятность_успеха; интегральная*)**.**

- ⇨ *число_успехов* (m) – количество успешных испытаний;
- ⇨ *число_испытаний* (n) – число независимых испытаний;
- ⇨ *вероятность_успеха* (p) – вероятность успеха каждого испытания;
- ⇨ *интегральная* (k) – значение, определяющее вид функции. Если k=1, то функция БИНОМРАСП возвращает вероятность того, что число успешных испытаний не менее значения аргумента *число_успехов*; если k=0, то вероятность того, что число успешных испытаний в точности равно значению аргумента *число_успехов*.

Функция **КРИТБИНОМ –** вычисляет наименьшее значение, для которого интегральное биномиальное распределение больше или равно заданному критерию (α). Эта функция используется в приложениях, связанных с контролем качества.

Синтаксис. **КРИТБИНОМ** (*число_испытаний; вероятность_успеха; альфа*)**.**

- ⇨ *число_испытаний* (n) – число независимых испытаний;
- ⇨ *вероятность_успеха* (p) – вероятность успеха в каждом испытании;
- ⇨ *альфа* (α) – значение критерия, которое фактически является уровнем значимости.

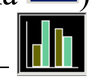
Задание 1. Какова вероятность того, что из пяти испытуемых: а) три холерика; б) не более 3 холериков. Считать вероятности того, что человек является холериком равной 0,3.

Решение.

1. Установите курсор в ячейку А1. Для получения значения вероятности на панели инструментов *Стандартная* вызовите *Мастер функций* (кнопка fx). В появившемся диалоговом окне *Мастер функций* выберите категорию *Статистические* и функцию БИНОМРАСП, после чего нажмите кнопку ОК.
2. В рабочее поле *число_успехов* введите с клавиатуры количество успешных испытаний m (в нашем случае 3). В рабочее поле *число_испытаний* введите с клавиатуры общее количество испытаний n (в нашем случае 5). В рабочее поле *вероятность_успеха* введите с клавиатуры вероятность успеха в отдельном испытании p (0,3). В рабочее поле *интегральная* введите вид функции распределения (для случая а) – 0). Нажмите ОК. В ячейке А1 появится искомое значение вероятности.
3. Для нахождения вероятности в случае b) установите курсор в ячейку В1. Далее поступаем также как и в предыдущем пункте, за исключением того, что в рабочее поле *интегральная* вводим 1. В ячейке В1 появится искомое значение вероятности.

Задание 2. Построить гистограмму биномиальной функции плотности вероятности $P(A=m)$ при $n=10$ и $p=0,2$.

Решение.

1. Перейдите на второй лист рабочей книги.
2. В ячейку A1 введите символ количества успешных исходов *m*, а в ячейку B1 — символ вероятности – *p*.
3. Заполните диапазон A2:A12 возможными значениями исходов: 0,1,2…,10.
4. Установите курсор в ячейку B2 и для получения значения вероятности на панели инструментов Стандартная вызовите Мастер функций (кнопка ). В появившемся диалоговом окне Мастер функций выберите категорию Статистические и функцию БИНОМРАСП, после чего нажмите кнопку ОК.
5. В рабочее поле число_успехов введите количество успешных испытаний m (в нашем случае щелкните мышью на ячейке A2). В рабочее поле число_испытаний введите с клавиатуры общее количество испытаний *n* (в нашем случае 10). В рабочее поле вероятность_успеха введите с клавиатуры вероятность успеха в отдельном испытании *p* (0,2). В рабочее поле интегральная введите вид функции распределения — 0. Нажмите ОК. В ячейке B2 появится искомое значение вероятности.
6. Скопируйте значение ячейки B2 в диапазон B3:B12.
7. Постройте диаграмму биномиальной функции распределения. Щелчком указателя мыши по кнопке на панели инструментов вызовите Мастер диаграмм (кнопка ). В появившемся диалоговом окне выберите тип диаграммы Гистограмма, вид – . После нажатия кнопки Далее укажите диапазон данных — B1:B12 (с помощью мыши). Проверьте положение переключателя Ряды в: столбцах. Выберите вкладку Ряд и с помощью мыши введите в рабочее поле Подписи оси X диапазон подписей оси X: A2:A12. Нажав кнопку Далее, введите названия осей X и Y: *m* и *p*, соответственно. Нажмите кнопку Готово.
8. Сохраните документ на диске D (Имя папки — номер группы) под именем Задачи1 по ТВиМС.

6.1 *Предельные теоремы в схеме Бернулли*

Если вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число испытаний велико, то для вероятности того, что событие *A* появится в *n* независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, имеет место следующая формула:

$$P(k_1 \le m \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

В *Excel* функция Лапласа $\Phi(x)$ реализована в статистической функции НОРМСТРАСП.

Функция **НОРМСТРАСП –** возвращает значения стандартного нормального распределения. Это распределение имеет среднее, равное нулю, и стандартное отклонение, равное единице.

Синтаксис. **НОРМСТРАСП** (z)

⇨ z – значение, для которого строится распределение.

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, но близка к нулю, а число независимых испытаний n достаточно велико и произведение $np = \lambda = const$, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступает m раз приблизительно равна $P_n(m) \approx \dfrac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$ – формула Пуассона. Для реализации формулы Пуассона в *Excel* используется статистическая функция ПУАССОН.

Функция **ПУАССОН** – возвращает значения распределения Пуассона. Обычное применение распределения Пуассона состоит в предсказании количества событий, происходящих за определенное время.

Синтаксис. **ПУАССОН** (*x; среднее; интегральная*)

⇨ x – число событий;

⇨ *средне*е – ожидаемое численное значение;

⇨ *интегральная* (k) –определяет форму возвращаемого распределения вероятностей. Если k=1, то функция ПУАССОН вычисляеет вероятность того, что число случайных событий будет от 0 до x включительно. Если k=0, то вычисляется вероятность того, что число событий будет в точности x.

Задание 3. Известно, что кандидата в депутаты поддерживает 65% населения. Число избирателей равно 2 000 000. С какой вероятностью число проголосовавших «за» на выборах находится в пределах от 1 299 000 до 1 302 000.

Решение.

1. Перейдите на третий лист рабочей книги.
2. Для реализации решения задачи создайте следующую таблицу:

	A	B
1	Число избирателей	2000000
2	Вероятность поддержки	0,65
3	Число проголосовавших "за"	
4	от	до
5	1299000	1302000
6	Ф(k2)	
7	Ф(k1)	
8	Вероятность нахождения в интервале	

3. В ячейку В6 введите формулу: =НОРМСТРАСП((B5-B1*B2)/КОРЕНЬ(B1*B2*(1-B2))).
4. В ячейку В7 введите формулу: =НОРМСТРАСП((A5-B1*B2)/КОРЕНЬ(B1*B2*(1-B2))).

5. В ячейку B8 введите формулу: =B6-B7. В ячейке B8 появится искомое значение вероятности.

6. Сохраните документ.

Задание 4. Вероятность того, что человек страдает аутизмом, равна 0,0001. Найти вероятность того, что среди 20000 исследуемых только один будет страдать аутизмом.

Решение.

1. Для решения данной задачи воспользуемся формулой Пуассона, так как условия ее применения выполнены($n = 20000, \quad p = 0.0001, \quad np = 2 < 10$).

2. Перейдите на четвертый лист рабочей книги.

3. Для реализации решения задачи создайте следующую таблицу:

	A	B
1	Количество исследуемых	20000
2	Вероятность аутизма	0,0001
3	Вероятность, того что один человек страдает аутизмом	

4. Установите курсор в ячейку B3, на панели инструментов *Стандартная* вызовите *Мастер функций*. В появившемся *диалоговом* окне *Мастер функций* выберите категорию *Статистические* и функцию ПУАССОН, после чего нажмите кнопку ОК.

5. В рабочее поле x введите количество событий m, которое должно произойти (в нашем примере 1). В рабочее поле *среднее* введите среднее ожидаемое значение (в нашем случае $B2 \cdot B1$). В рабочее поле *интегральная* введите 0. В ячейке $B3$ появится искомое значение вероятности.

6. Сохраните документ (нажмите кнопку  на панели инструментов).

6.2 Нормальный закон распределения

Задание 4. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 80 у.е. и средним квадратическим отклонением, равным 5. Найти значения функции распределения на интервале от 71 до 89. Построить графики плотности вероятности и функции распределения. Определить вероятность того, что в случайно выбранный день обслуживаемого периода цена за акцию была между 75 и 85 у.е.

Решение.

1. Перейдите на пятый лист рабочей книги.

2. Для реализации решения задачи создайте следующую таблицу:

	A	B	C
1	Средняя стоимость (матем.ожидание)	80	
2	Среднее квадратическое отклонение	5	
3		Функция распределения	Плотность распределения
4	71		
5	72		
6	73		
7	74		
8	75		
9	76		
10	77		
11	78		
12	79		
13	80		
14	81		
15	82		
16	83		
17	84		
18	85		
19	86		
20	87		
21	88		
22	89		
23	Вероятность нахождения в заданных пределах		

3. В ячейку B4 введите формулу:=НОРМРАСП(A4;B1;B2;1). Распространите формулу на диапазон B5:B22.
4. В ячейку C4 введите формулу:=НОРМРАСП(A4;B1;B2;0). Распространите формулу на диапазон C5:C22.
5. В ячейку B23 введите формулу: =B18-B8.
6. Постройте график плотности вероятности, выбрав тип диаграммы – *Гладкие графики* на вкладке *Нестандартные*. Укажите диапазон данных – C4:C22 (с помощью мыши). Проверьте положение переключателя *Ряды* в: столбцах. Выберите вкладку *Ряд* и с помощью мыши введите в рабочее поле *Подписи оси X* диапазон подписей оси X: A4:A22. Нажав кнопку *Далее,* введите названия осей X и Y: x и $f(x)$, соответственно. Нажмите кнопку *Готово.*
7. Постройте график функции распределения вероятности, выбрав тип диаграммы – *Гладкие графики* на вкладке *Нестандартные*. Укажите диапазон данных — B4:B22 (с помощью мыши). Проверьте положение переключателя *Ряды* в: столбцах. Выберите вкладку *Ряд* и с помощью мыши введите в рабочее поле *Подписи оси X* диапазон подписей оси X: A4:A22. Нажав кнопку *Далее,* введите названия осей X и Y: x и $F(x)$, соответственно. Нажмите кнопку *Готово.*

8. Сохраните документ (нажмите кнопку  на панели инструментов).

ЛИТЕРАТУРА

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 1986.
2. Ахтямов, А.М. Математика для социологов и экономистов: учеб.пособие / А.М. Ахтямов. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
3. Велько, О.А. Методические подходы к преподаванию математики студентам-социологам // Математика и информатика в естественнонаучном и гуманитарном образовании. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. –С. 58–61.
4. Велько, О.А. Основы высшей математики для социологов: Учебно-методическое пособие / О.А. Велько, М.В. Мартон, Н.А. Моисеева. – Минск: БГУ, 2020. – 303 с.
5. Велько, О.А. Основы высшей математики и теории вероятностей: Учебно-методическое пособие / О.А. Велько, М.В. Мартон, Н.А. Моисеева. – Минск: БГУ, 2022. – 399 с.
6. Велько, О. А. Основы высшей математики и теории вероятностей: учебная программа УВО по учебной дисциплине по специальности 1-23 01 15 Социальные коммуникации [Электронный ресурс] / О.А. Велько // Белорусский государственный университет. – Минск, 2021. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/269619. – Дата доступа: 2.07.2021.
7. Велько, О.А. Основы высшей математики. Учебная программа УВО для специальности 1-23 01 05 Социология [Электронный ресурс] / О.А. Велько, Н.А. Моисеева // Белорусский государственный университет. – Минск, 2019. – Режим доступа:http://elib.bsu.by/handle/123456789/233274. – Дата доступа: 12.07.2019.
8. Велько, О. А. Основы высшей математики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-23 01 05 «Социология» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск: БГУ, 2020. – 257 с.: ил. – Библиогр.: с. 255–257. [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/241078. Дата доступа: 06.03.2020.
9. Велько О.А. Теория вероятностей и математическая статистика: сб. задач / О.А. Велько, Е.В. Воронкова, Г.К. Игнатьева, Л.В. Корчёмкина, И.П. Мацкевич, С.А. Мызгаева; под общ. ред. И. П. Мацкевича. – Минск: МИУ, 2003. – 56 с.
10. Велько, О. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности 1-23 01 05 Социология [Электронный ресурс] / О.А. Велько // Белорусский государственный университет. – Минск, 2021. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/269618. – Дата доступа: 2.07.2021.

11. Гайшун, Л.Н. Теория вероятностей: Учебное пособие для студентов экономических специальностей / Л.Н. Гайшун, Г.К. Игнатьева, О.А. Велько. – Минск: МИУ, 2002. – 167 с.
12. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1997.
13. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие / В.Е. Гмурман. – 7-е., изд., доп. – М.: Высш.шк., 2003. – 405 с.
14. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Выш. шк., 1984.
15. Гусак А.А. Высшая математика. Т2. – Мн.: Университетское, 1998.
16. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Справочное пособие к решению задач: теория вероятностей. – Мн.:ТетраСистем, 1999.
17. Еровенко, В. А. Основы высшей математики: типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В. А. Еровенко, М.В. Мартон, О.А. Велько // Типовая учебная программа располагается в коллекциях: Кафедра общей математики и информатики. [Электронный ресурс]. – 2019. – Режим доступа: –http://elib.bsu.by/handle/123456789/218164.
18. Еровенко, В.А. Избранные главы курса «Основы высшей математики» для философов: Методическое пособие для студентов-заочников / В.А. Еровенко, М.В. Мартон. – Минск: БГУ, 2009. – 68 с.
19. Еровенко, В.А. Основы высшей математики: типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В.А. Еровенко, С.Н. Сиренко, О.А. Велько // Основы высшей математики. Основы информационных технологий: типовые учебные программы для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В.А. Еровенко [и др.]; под ред. В.А. Еровенко. – Минск: БГУ, 2009. – С. 5–14.
20. Еровенко, В.А. Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры: курс лекций / В.А. Еровенко. – Минск: БГУ, 2006. – 175 с.
21. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч2. – М.: Высшая школа, 1982.
22. Кузьмин, К.Г. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-25 01 03 «Мировая экономика» / К.Г. Кузьмин, Н.И. Широканова. – Минск: БГУ, 2009. – 89 с.
23. Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Физматлит, 2001. – 256 с.

24. Леонов, Н.Н. Математическая социология: структурно-аппроксимационный подход / Н.Н. Леонов. – Минск, «ООО ФУАинформ», 2002. – 220 с.
25. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / К.Н. Лунгу и [и др.]. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 576с.
26. Малыхин В.И. Математика в экономике. – М.: Инфра-М, 2001.
27. Матейко, О.М. Высшая математика для географов : учеб. Пособие : в 2 ч. / О.М. Матейко, А.Н. Таныгина. – Минск: БГУ, 2012. – Ч. 1. – 271 с.
28. Матейко, О.М. Высшая математика для географов : учеб. Пособие : в 2 ч. / О.М. Матейко, А.Н. Таныгина. – Минск: БГУ, 2013. – Ч. 2. – 175 с.
29. Мацкевич, И.П. Математические методы в психологии / И.П. Мацкевич, О.А. Велько, Е.В. Воронкова, С.Л. Гуринович. – 3-е изд. – Минск: МИУ, 2009. – 188 с.
30. Мацкевич, И.П. Статистические методы в психологии: Учебно-методический комплекс / И.П. Мацкевич, О.А. Велько, Е.В. Воронкова, С.Л. Гуринович. – 2-е изд. – Минск: МИУ, 2012. – 194 с.
31. Моисеева, Н. А. Основы высшей математики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-23 01 15 «Социальные коммуникации» / Н. А. Моисеева, О. А. Велько; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск: БГУ, 2020. – 193 с.: ил. – Библиогр.: с. 191–193. [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/241081. Дата доступа: 06.03.2020.
32. Моисеева, Н. А. Основы высшей математики и теории вероятностей : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-23 01 15 «Социальные коммуникации» [Электронный ресурс] / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2021. – 239 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 238–239. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/274772: 26.01.2022.
33. Ниворожкина Л.И, Морозова З.А. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов. – Ростов на Дону : Феникс, 1996.
34. Петров, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебно-методический комплекс / В.А. Петров, Г.К. Игнатьева, О.А. Велько. – Минск: МИУ, 2007. – 268 с.
35. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие. В 4ч. Ч.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко и [и др.]. – 4-е изд. – Минск: Выш. Шк., 2008. – 304 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	5637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3261	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3064	3011	2989-	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732-	2709-	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,054	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt.$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,30	0,1179	0,60	0,2257	0,90	0,3159
0,01	0,0040	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186
0,02	0,0080	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212
0,03	0,0120	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238
0,04	0,0160	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264
0,05	0,0199	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289
0,06	0,0239	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315
0,07	0,0279	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,3340
0,08	0,0319	0,38	0,1480	0,68	0,2517	0,98	0,3365
0,09	0,0359	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389
0,10	0,0398	0,40	0,1554	0,70	0,2580	1,00	0,3413
0,11	0,0438	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438
0,12	0,0478	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461
0,13	0,0517	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485
0,14	0,0557	0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508
0,15	0,0596	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531
0,16	0,0636	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554
0,17	0,0675	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577
0,18	0,0714	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599
0,19	0,0753	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621
0,20	0,0793	0,50	0,1915	0,80	0,2881	1,10	0,3643
0,21	0,0832	0,51	0,1950	0,81	0,2910	1,11	0,3665
0,22	0,0871	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686
0,23	0,0910	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708
0,24	0,0948	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729
0,25	0,0987	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749
0,26	0,1026	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770
0,27	0,1064	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790
0,28	0,1103	0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810
0,29	0,1141	0,59	0,2224	0,89	0,3133	1,19	0,3830

1,20	0,3849	1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913
1,21	0,3869	1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918
1,22	0,3883	1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922
1,23	0,3907	1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927
1,24	0,3925	1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931
1,25	0,3944	1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
3,40	0,49966	3,80	0.49992	4,50	0,49999		
3,60	0,49984	4,00	0,49996	5,00	0,49999		