

И. К. Данейко, Н. П. Мацука, А. А. Спиридонов

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ВЗАИМНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

В настоящей работе рассматривается изменения функции взаимной когерентности второго порядка лазерного пучка, распространяющегося в случайно-неоднородной атмосфере с рефракционным каналом. Свойства среды задаются диэлектрической проницаемостью, детерминированная часть которой определяет регулярную рефракцию, а случайная вызывает рассеяние на турбулентных неоднородностях среды.

Рассмотрим решение параболического уравнения для функции когерентности второго порядка псевдоспектральным численным методом дробных шагов, позволяющим разбить уравнение на линейную и нелинейную части. Линейная часть представляет собой задачу дифракционного распространения лазерного пучка в случайно-неоднородной атмосфере и ее решения широко представлены в литературе [1, 2]. Нелинейная часть учитывает регулярный градиент диэлектрической проницаемости среды.

Пусть в статистически однородной стационарной слабोरассеивающей среде распространяется монохроматичный волновой пучок с частотой ν и начальной шириной b :

$$E_1(\vec{\rho}, z, t) = E(\vec{\rho}, z) \exp(ikz - 2\pi\nu t) \quad (1)$$

и гауссовым распределением амплитуды в плоскости $z = 0$:

$$E(\vec{\rho}, z = 0) = E_0 \exp\left(-\frac{(\rho - H)^2}{2b^2}\right). \quad (2)$$

В этом случае функция взаимной когерентности второго порядка:

$$\Gamma(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, z) = \langle E_1(\vec{\rho}_1, z) E_1^*(\vec{\rho}_2, z) \rangle$$

волнового пучка, распространяющегося в плавно-неоднородной среде с детерминированным изменением диэлектрической проницаемости в положительном направлении оси z , удовлетворяет уравнению параболического типа [1]:

$$2ik \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + (\Delta_{\perp 1} - \Delta_{\perp 2})\Gamma + k^2 [\bar{\varepsilon}(\rho_1, z) - \bar{\varepsilon}(\rho_2, z)]\Gamma + \frac{ik^2}{2} [A_\varepsilon(0) - A_\varepsilon(\rho_1, \rho_2)]\Gamma = 0, \quad (3)$$

где $\varepsilon(\vec{r}) = \bar{\varepsilon}(\vec{r}) + \tilde{\varepsilon}(\vec{r})$, $\bar{\varepsilon}(\vec{r}) \equiv \langle \varepsilon(\vec{r}) \rangle$ – среднее значение диэлектрической проницаемости, $\tilde{\varepsilon}(\vec{r})$ – флуктуация диэлектрической проницаемо-

сти, $A_{\varepsilon}(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{\varepsilon}(\vec{\rho}_1, z_1) \tilde{\varepsilon}(\vec{\rho}_2, z_2) \rangle d(z_1 - z_2)$ – поперечная автокорреляционная функция флуктуаций показателя преломления;

$\Delta_{\perp i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$ – поперечный лапласиан.

Предполагаем квадратичная зависимость $\bar{\varepsilon}$ от высоты y :

$$\bar{\varepsilon}(y_1) - \bar{\varepsilon}(y_2) = y_1 \frac{\partial \mu(y)}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial \mu(y)}{\partial y_2}, \quad (4)$$

где $\mu(y)$ – некоторая квадратичная функция, описывающая градиент среднего значения диэлектрической проницаемости.

Рассмотрим изменения функции взаимной когерентности $\Gamma(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, z)$ в вертикальной плоскости источника и приемника :

$$\Gamma_x(\rho_{1y}, \rho_{2y}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, z) d\rho_{1x} d\rho_{2x} \quad (5)$$

в ограниченной пространственной области $D = D_{py} \times D_{sy} \times D_z$: $D_{py} = [0, 2H]$, $D_{sy} = [-H, H]$, $D_z = [0, Z]$. Тогда уравнение (3) для функции $\Gamma_x(\rho_{1y}, \rho_{2y}, z)$ с начальным условием будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma_x(\rho_{1y}, \rho_{2y}, z)}{\partial z} - \frac{i}{k} \left(\frac{\partial^2 \Gamma_x(\rho_{1y}, \rho_{2y}, z)}{\partial \rho_{1y}^2} - \frac{\partial^2 \Gamma_x(\rho_{1y}, \rho_{2y}, z)}{\partial \rho_{2y}^2} \right) - \frac{ik}{8} \times \\ & \times (\rho_{1y} - \rho_{2y}) \cdot \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho_{1y}} + \frac{\partial \mu}{\partial \rho_{2y}} \right) \cdot \Gamma_x(\rho_{1y}, \rho_{2y}, z) - k^2 F(\rho_{1y}, \rho_{2y}) \Gamma_x(\rho_{1y}, \rho_{2y}, z) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$F(\rho_{1y}, \rho_{2y}) = k \left(A_{\varepsilon}(0) - A_{\varepsilon}(\rho_{1y}, \rho_{2y}) \right), \quad A_{\varepsilon}(\rho_{1y}, \rho_{2y}) = A_{\varepsilon}(0) \exp \left\{ - \left(\frac{\rho_{1y} - \rho_{2y}}{2} \right)^2 l_n^{-2} \right\}$$

с начальным условием в виде симметричного гауссова пучка:

$$\Gamma_x(\rho_{1y}, \rho_{2y}, 0) = \Gamma_0 \cdot \exp \left\{ - \frac{(\rho_{1y} - H)^2}{b^2} - \frac{\rho_{2y}^2}{b^2} \right\}, \quad (7)$$

$u \in [0, 2H]$, $v \in [0, 2H]$, $0 \leq z \leq Z$.

Уравнение (6) может быть корректно дополнено периодическими или однородными краевыми условиями:

$$\begin{aligned}
a) \Gamma_x(0, \rho_{2y}, z) &= \Gamma_x(2H, \rho_{2y}, z), \Gamma_x(\rho_{1y}, 0, z) = \Gamma_x(\rho_{1y}, 2H, z), \\
б) \Gamma_x(0, \rho_{2y}, z) &= 0, \Gamma_x(2H, \rho_{2y}, z) = 0, \Gamma_x(\rho_{1y}, 0, z) = 0, \Gamma_x(\rho_{1y}, 2H, z), \quad (8) \\
в) \frac{\partial \Gamma_x}{\partial \rho_{1y}} \Big|_{(0, \rho_{1y}, z)} &= 0, \frac{\partial \Gamma_x}{\partial \rho_{1y}} \Big|_{(2H, \rho_{2y}, z)} = 0, \frac{\partial \Gamma_x}{\partial \rho_{2y}} \Big|_{(\rho_{1y}, 0, z)} = 0, \frac{\partial \Gamma_x}{\partial \rho_{2y}} \Big|_{(\rho_{1y}, 2H, z)} = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим решение параболического уравнения для функции когерентности второго порядка псевдоспектральным численным методом дробных шагов. Идея метода дробных шагов для решения задачи вида (6)–(8) основана на разбиении уравнения (5) на линейную и нелинейную части:

$$\frac{\partial \Gamma_x}{\partial z} = L_d \Gamma_x = \frac{i}{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho_{1y}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \rho_{2y}^2} \right) \Gamma_x, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Gamma_x}{\partial z} = L_n(\Gamma_x, \Gamma_x^*) \Gamma_x = \frac{ik}{8} (\rho_{1y} - \rho_{2y}) \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho_{1y}} + \frac{\partial \mu}{\partial \rho_{1y}} \right) \Gamma_x + k^2 F(\rho_{1y}, \rho_{2y}) \Gamma_x. \quad (10)$$

Последовательное решение на каждом шаге по z уравнений (9) и (10) дает выражение для приближенного решения уравнения (6):

$$G(\rho_{1y}, \rho_{2y}, z + h_z) = \hat{L}_n(G(\rho_{1y}, \rho_{2y}, z)) \hat{L}_d(\rho_{1y}, \rho_{2y}, h_z) G(\rho_{1y}, \rho_{2y}, z), \quad (11)$$

где $\hat{L}_{d,n} = \exp\{h_z \hat{L}_{d,n}\}$. Для линейной подзадачи в отдельности (а в ряде случаев и для нелинейной) существует эффективный путь получения решения с практически неограниченной точностью. Представление решения на сетке ω_{uv} в виде конечного ряда Фурье имеет вид:

$$\begin{aligned}
G(u_i, v_j, z) &= \frac{1}{N_u N_v} \sum_{n=0}^{N_u-1} \sum_{m=0}^{N_v-1} q_{nm}(z) \cdot \exp \left\{ \frac{i\pi(nu_i - mv_j)}{Hk} \right\}, \\
q_{nm}(z) &= \sum_{i=0}^{N_u-1} \sum_{j=0}^{N_v-1} G(u_i, v_j, z) \cdot \exp \left\{ -\frac{i\pi(nu_i - mv_j)}{Hk} \right\},
\end{aligned} \quad (12)$$

где $\rho_{1yi} = u_i, \rho_{2yj} = v_j$. Это позволяет свести задачу к совокупности линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов ряда $q_{nm}(z)$, точные решения которых имеют вид:

$$q_{nm}(z + h_z) = q_{nm}(z) \cdot \exp \left\{ -\frac{ih_z(n^2 - m^2)\pi^2}{H^2 k} \right\}, \quad (13)$$

$$n = -N_u/2 + 1, \dots, 0, \dots, N_u/2, m = -N_v/2 + 1, \dots, 0, \dots, N_v/2.$$

При использовании алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье прямое и обратное преобразования (12) реализуются с затратой $O(N \log_2 N)$ арифметических операций для каждого пространствен-

ного направления. Следует отметить, что точность решения линейной задачи в данном случае определяется только погрешностью Фурье-разложения и не зависит от h_z . Столь же эффективна и реализация нелинейной подзадачи (10), когда L_n допускает точную аппроксимацию по пространственным переменным и $\text{Re } L_n = 0$. В этом случае выражение

$$G(u_i, v_j, z + h_z) = G(u_i, v_j, z) \exp\{h_z L_n(G(u_i, v_j, z))\} \quad (14)$$

дает точное решение для нелинейного шага в методе расщепления.

Погрешность метода дробных шагов (9)–(14) с использованием спектрального представления линейного оператора связана исключительно с расщеплением задачи, а хорошие вычислительные качества метода определяются высоким порядком точности (ограниченным только гладкостью решения) относительно шагов сетки по пространственным переменным. Порядок точности метода (9)–(14) в общем случае уравнения (6) – первый по эволюционной переменной и второй по пространственным. Отметим, что использование симметричной схемы метода дробных шагов позволяет получить второй порядок точности метода относительно h_z .

Что касается консервативности построенных разностного метода и метода дробных шагов, то для линейной подзадачи (9) имеет место следующая интегральная характеристика

$$\frac{\partial I_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2H} \int_0^{2H} |G|^2 du dv = 0. \quad (15)$$

Ее дискретный аналог имеет вид:

$$I_1^h(z) = \sum_{i=1}^{N_u-1} \sum_{j=1}^{N_v-1} h_u h_v |G(u_i, v_j, z)|^2 = \text{const}. \quad (16)$$

В смысле дискретного инварианта (16) оба рассмотренных выше метода являются консервативными. Для нелинейной же задачи консервативность, вообще говоря, зависит от вида оператора L_n , от аппроксимации этого оператора, а также от выбора краевых условий.

Кроме того, что из консервативности метода следует его устойчивость в сеточной норме $\|\cdot\|_{L_2} = \sqrt{(\cdot, \cdot)_h}$. Один из наиболее веских аргументов в пользу консервативных аппроксимаций заключается в том, что отсутствие консервативности ассоциируется с дополнительными источниками погрешности.

Численное моделирование динамики решения, описываемого формулой (7), проводилось на основе уравнения (6) для среды с гауссовой автокорреляционной функцией флуктуаций показателя преломления с

помощью метода дробных шагов с использованием быстрого дискретного преобразования Фурье (9) – (14). Задача рассматривалась на конечной пространственной области $u \times v \in [0, 2H] \times [0, 2H]$ с периодическими граничными условиями (8).

Следующие графики демонстрируют динамику решения вида (7) в рамках уравнения (6) без учета последнего слагаемого (без учета рассеяния) при перечисленных начальных данных (рис. 1, 2).

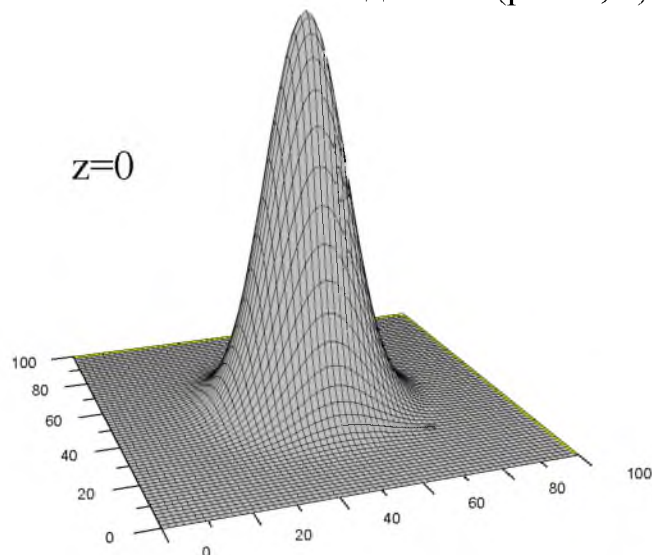


Рис. 1. Распределение функции взаимной когерентности $G_x(u, v, 0)$ в плоскости источника без учета рассеяния ($z=0$)

Каждый из графиков является модулем функции $G(u, v, z = \text{const})$ в плоскости (u, v) . Графики показывают, что начальная форма решения при больших z начинает меняться – немного падает максимум амплитуды, расплываются крылья пучка, сохраняя симметричность относительно обеих осей.

Результат говорит о равноценном влиянии на динамику решения каждой компоненты уравнения по пространственным переменным. При проведении расчетов контролировалась сумма вида (16). Даже при длительности счета $z = 10000$ погрешность относительно начального значения составляла не более 0,1% (одной десятой процента), что свидетельствует о достаточно высокой точности численного метода.

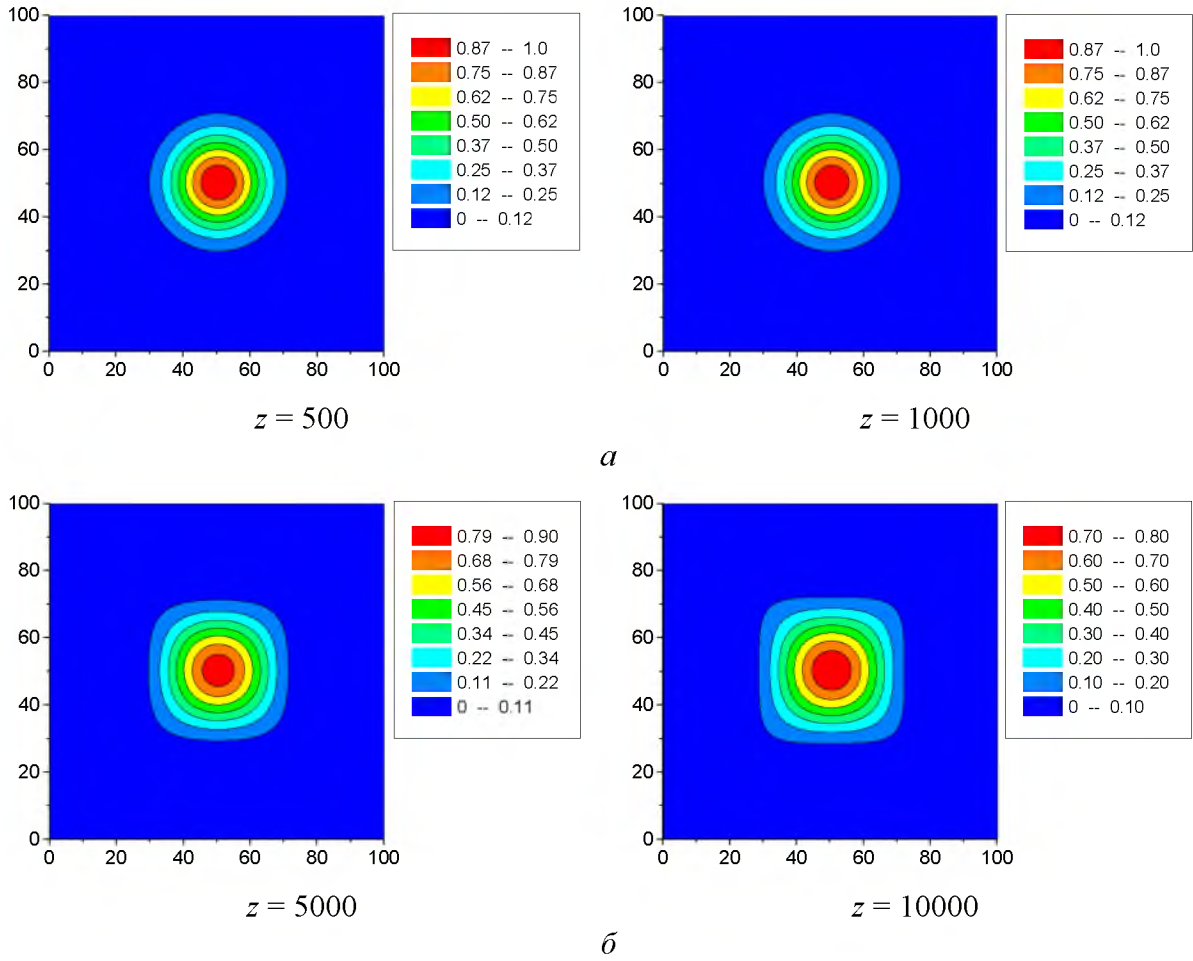


Рис. 2. Распределение функции взаимной когерентности $\Gamma_x(u, v, z = \text{const})$ в плоскости приемника без учета рассеяния

Рисунки (рис. 3 *a, б*) соответствуют случаю учета рассеяния $l_n = 0.1$; $\sigma_0 = 2.5 \cdot 10^{-4}$. Остальные значения параметров при численном решении уравнения совпадают с параметрами предыдущего эксперимента в целях определения влияния добавленного слагаемого на поведение решения.

Деструктивное влияние дополнительного слагаемого в уравнении (6) $-k^2 F(u, v) \Gamma_x(u, v, z)$, учитывающего рассеяние по сравнению со случаем без рассеяния наиболее хорошо проиллюстрировано на последнем графике рис. 3 ($z = 10000$). В плоскости, перпендикулярной пространственной плоскости и пересекающейся с ней по диагонали, можно наблюдать, как на решении появляются возмущения (в виде узких пиков). В плоскости, параллельной оси u , этот эффект выглядит следующим образом (рис. 4).

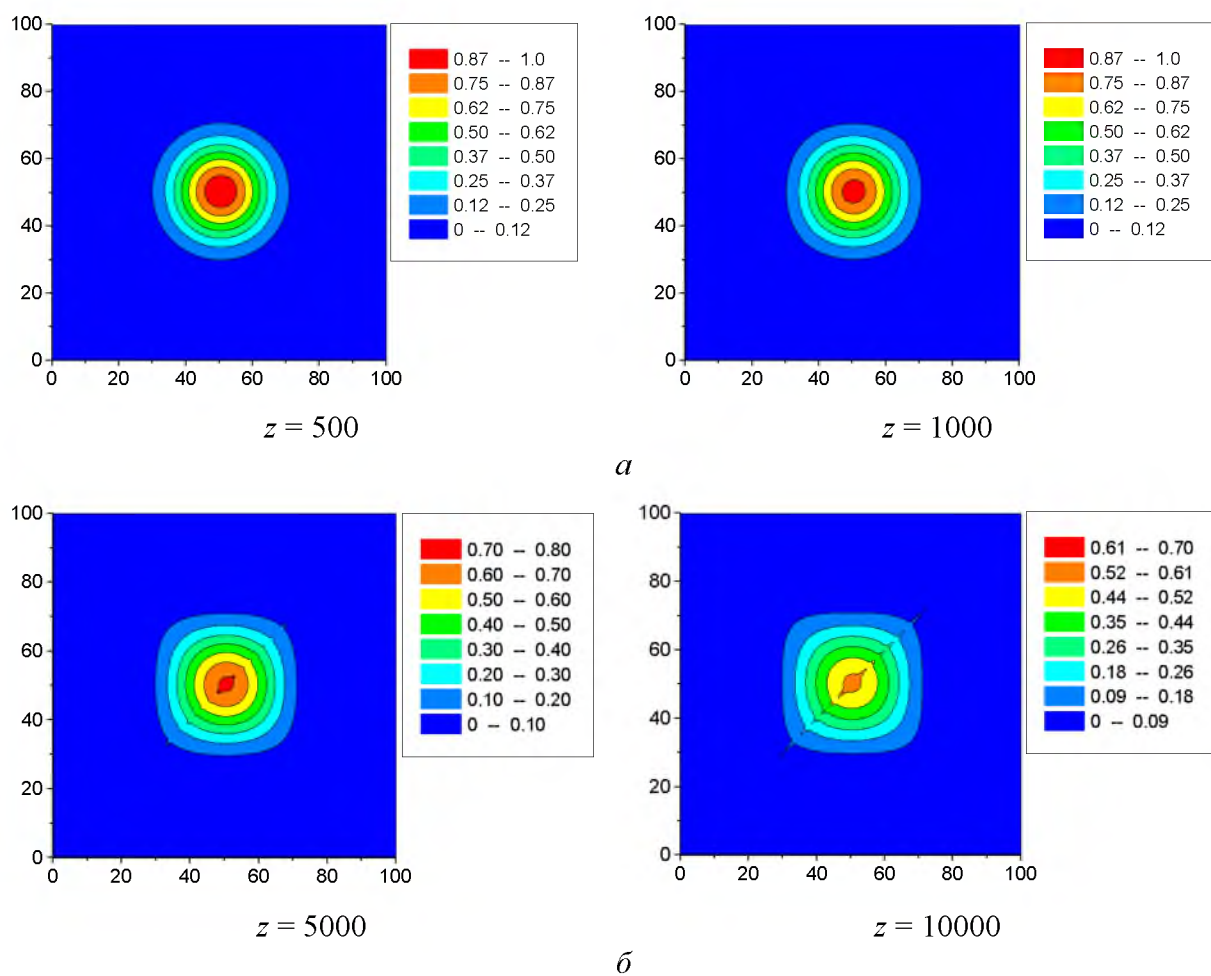


Рис. 3. Распределение функции взаимной когерентности $\Gamma_x(u, v, z = \text{const})$ в плоскости приемника с учетом рассеяния

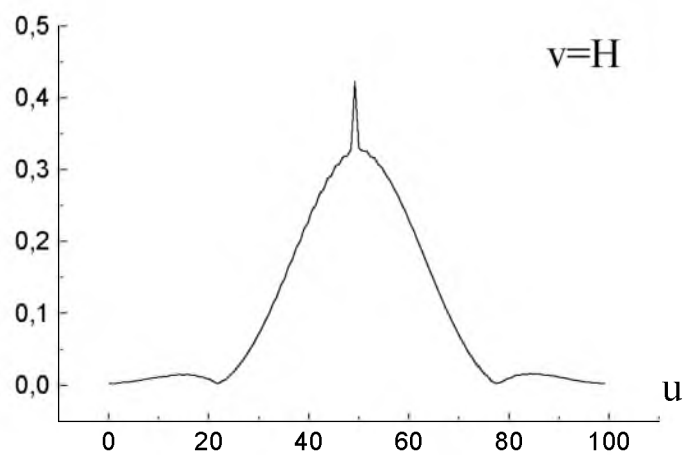


Рис. 4. Распределение функции взаимной когерентности $\Gamma_x(u, v = \text{const}, z = \text{const})$ в плоскости приемника с учетом рассеяния

Далее эти возмущения как бы "перекачивают" энергию у исходного решения (максимум его амплитуды существенно падает) и при дальнейшем счете разваливают его (рис. 5).

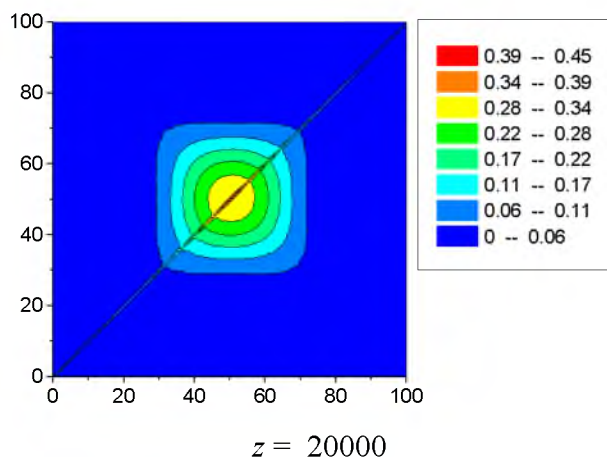


Рис. 5. Распределение функции взаимной когерентности $\Gamma_x(u, v, z = \text{const})$ в плоскости приемника с учетом рассеяния

Очевидно, что в данной модели свое влияние на картину развала решения оказывают размеры выбранной области и периодические краевые условия. На сравнительно большой пространственной плоскости возникающие возмущения решения расходились бы в стороны (при этом также портя решение), а однородные краевые условия могли бы их поглощать или отражать. Но качественно поведение решения при больших дистанциях в достаточной мере отражено на приведенных графиках (рис. 3).

Представляет интерес поведение решения (и в том числе сохранение его первоначальных параметров) на больших эволюционных промежутках. Очевидно, что уменьшение коэффициента σ_0 приведет к уменьшению возмущений решения и сохранит его на большей дистанции распространения.

Литература

1. Миронов В. Л. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. Новосибирск: Наука, 1981. 246 с.
2. Зуев В. Е., Банах В. А., Покасов В. В. Оптика турбулентной атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1988. 246 с.