АППРОКСИМАЦИЯ ПАДЕ В ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. М. Мифодьева

Белорусский государственный университет, г. Минск;
katyatomkovich22@gamail.com;
науч. рук. – В. А. Нифаги, канд. физ.-мат. наук, доц.

В работе предложен алгоритм вычисления аппроксимации Паде, рассмотрено дифференциальное уравнение Риккати и предложен пример решения дифференциального уравнения типа Риккати на основе аппроксимации Паде.

Ключевые слова: аппроксимация Паде; разложение в степенной ряд: уравнение Риккати.

Наряду с линейными методами аппроксимации [1] при построении асимптотических решений в окрестности сингулярных точек, а также нахождении численных решений начальных и краевых задач, получили распространение нелинейные методы интерполирования, где класс интерполируемых функций не является векторным пространством. Важнейшим подобным частным случаем является рациональная Паде-аппроксимация [2], основанная на применении в качестве аппроксимирующей функции рациональной функции в виде отношения двух полиномов, коэффициенты которых определяются коэффициентами разложения функции в ряд Тейлора [3], т.е. аппроксимация Паде является эффективным методом построения и вычисления значений степенных рядов. Если задан степенной ряд

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i,$$

представляющий функцию $f(z)$, то аппроксимации Паде – это рациональная функция вида

$$\left[\frac{L}{M}\right] = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M}$$

Разложение которой в ряд Тейлора (с центром в нуле) совпадает с разложением (1) до тех пор, пока это возможно. Для определенности полагается, что $b_0 = 1$. Такой выбор станет затем существенной чертой точного определения, и условимся считать, что в записи (2) он подразумевается. Тогда в числителе содержится L+1 свободных параметров, в знаменателе – M (т.к. b_0 уже определен), т.е. всего имеется L+M+1 свободных параметров. Это означает, что в общем случае коэффициенты тейлоровского разложения функции $\left[\frac{L}{M}\right]$ при степенях $1, z, z^2, \cdots, z^{L+M}$ должны совпадать с соответствующими коэффициентами ряда (1), т.е. должно выполняться соотношение

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M} + O(z^{L+M+1})$$

Избавляясь в (3) от дроби

$$(b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M)(c_0 + c_1 z + \cdots) =$$
$$= a_0 + a_1 z + \cdots + a_L z^L + O(z^{L+M+1})$$

и сравнивая коэффициенты при $z^{L+1}, z^{L+2}, \cdots, z^{L+M}$ получим равенства

$$b_M c_{L+1-M} + b_{M-1} c_{L+2-M} + \cdots + b_0 c_{L+1} = 0, \quad \text{для } z^{L+1}$$
$$b_M c_{L+2-M} + b_{M-1} c_{L+3-M} + \cdots + b_0 c_{L+2} = 0, \quad \text{для } z^{L+2}$$

…

$$b_M c_L + b_{M-1} c_{L+1} + \cdots + b_0 c_{L+M} = 0, \quad \text{для } z^{L+M}$$

Для полноты положим $c_j = 0$ при $j < 0$. С учетом соглашения $b_0 = 1$ равенства (5) можно переписать в виде системы M линейных уравнений с M неизвестными коэффициентами знаменателя (6):

$$\begin{pmatrix} c_{L+1-M} & c_{L+2-M} & c_{L+3-M} & \cdots & c_L \\ c_{L+2-M} & c_{L+3-M} & c_{L+4-M} & \cdots & c_L \\ c_{L+3-M} & c_{L+4-M} & c_{L+5-M} & \cdots & c_L \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & c_{L+2} & \cdots & c_{L+1-M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ b_{M-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ c_{L+3} \\ \vdots \\ c_{L+M} \end{pmatrix}$$

Таким образом, могут быть найдены b_i. Коэффициенты числителя $a_0, a_1, \cdots$ находятся теперь из (4) сравнением коэффициентов при 1, z, ..., z^L:

$$a_0 = c_0$$
$$a_1 = c_1 + b_1 c_0$$
$$a_2 = c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \qquad (7)$$

…

$$a_L = c_L + \sum_{i=1}^{\min(L,M)} b_i c_{L-i}$$

Уравнения (6), (7) называются уравнениями Паде. В случае, когда система (6) разрешима, они определяют коэффициенты числителя и знаменателя аппроксимации Паде $[L/M]$. Коэффициенты тейлоровского разложения этой функции при 1, z, z^2, ..., z^{L+M} совпадают с соответствующими коэффициентами ряда (1).

Поскольку исходной точкой являются коэффициенты ряда $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$, то нет необходимости заранее считать эти коэффициенты коэффициентами Тейлора какой-либо функции.

Представим применение аппроксимации Паде для получения численных решений в ряде специальных случаев дифференциального уравнения Риккати [5].

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка вида:

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$$

$$y(x_0) = y_0,$$

здесь $a(x), b(x), c(x)$ – известные функции.

Если $c(x) = 0$, то (8) или коэффициенты в уравнении Риккати постоянны, то уравнение вырождается в простейший тип и допускает разделение переменных, и мы сразу получаем общий интеграл:

$$C_1 - x = \int \frac{dy4}{ay^2 + by + c}$$

Но для произвольных $a(x), b(x), c(x)$ нет алгоритма решения уравнения Риккати. Данное уравнение занимает особое место в теории дифференциальных уравнений. Можно сказать, уравнение Риккати занимает некоторое пограничное положение, так как разделяет области дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, от, вообще говоря, не интегрируемых в квадратурах (т.е. нахождение его решения не может быть сведено к конечному числу последовательных интегрирований).

В общей сложности, если удается найти хотя бы одно частное решение уравнения (8) $y_1(x)$, то по нему можно реконструировать общее решение.

$$y = y_1(x) + z(x),$$

где $z(x)$ (общее решение однородного уравнения) – новая неизвестная функция. Общее решение однородного ДУ (т.е. уравнения Бернулли) может быть получено при помощи квадратур (методом Бернулли, методом вариации произвольной постоянной и т.д.).

Особое место уравнение Риккати занимает среди уравнений геометрической оптики в криволинейных координатах (операторы градиента и Лапласа в ортогональных криволинейных координатах, коэффициенты Ламе для полных и локальных лучевых переменных, решение уравнений геометрической оптики (Эйконала и главного уравнения переноса) в окрестности выделенного луча с использованием локальных лучевых переменных (разложение в ряды по переменной поперечной к образующему лучу), учет кривизны волнового фронта (вещественные решения соответствующего уравнения Риккати), построение гауссовых пучков (комплексные решения уравнения Риккати)). Важную роль играет уравнение Риккати для теории автоматического управления, теории оптимизации по нормам H_0 и H_∞, а также при построении асимптотичесих решений краевых задач теории трещин.

Для примера применения представленной методики построим решение задачи Коши для специального случая уравнения Риккати:

$$xy' - (x + n - 1)y = -1$$
$$y(x_0) = y_0$$

Уравнение (10) при $x_0 = y_0 = 0$ имеет решение

$$y(x) = -e^x x^{n-1} E_n(x),$$

где

$$E_n(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-n} dt$$

Получаем представление решения в виде степенного ряда

$$y(x) = -\sum_{k=0}^{q} \frac{x^{k+n-1}}{k!} \int_x^{+\infty} \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k t^{k-n}}{k!} dt,$$

где q – количество членов рядов разложения e^x и e^{-x}.

Для дальнейшего решения, т.е. аппроксимации при разных n и q была использована среда вычислений PTC Mathcad Prime 8.

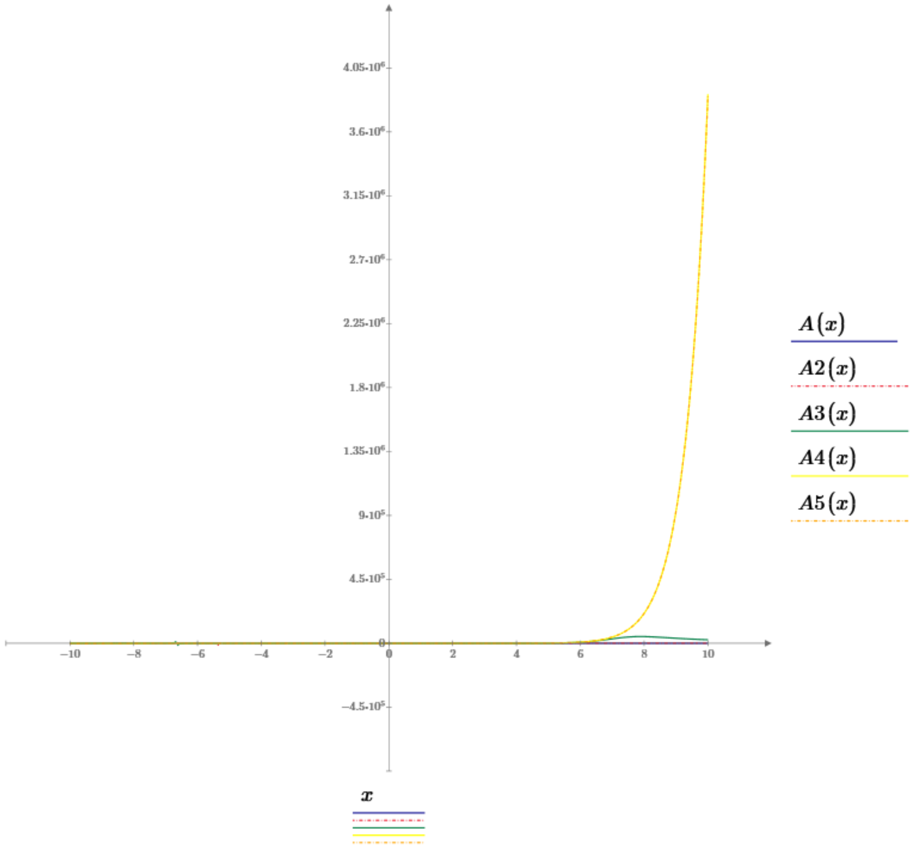
$$
\begin{array}{l}
TE(n,q,t) := \\
\quad \text{if } n = 1 \\
\quad\quad \text{for } k \in 0..q \\
\quad\quad\quad S(x) \leftarrow \int \left(\sum_k \frac{(-1)^k \cdot x^{k-n}}{k!} \right) dx \\
\quad\quad\quad A(t) \leftarrow -\left(\sum_k \frac{t^{k+n-1}}{k!} \right) \cdot (-S(t)) \\
\quad\quad \text{return } A(t) \\
\quad \text{else if } \operatorname{mod}(n,2) = 0 \\
\quad\quad \text{for } k \in 0..q \\
\quad\quad\quad S(x) \leftarrow \int \left(\sum_k \frac{(-1)^k \cdot x^{k-n}}{k!} \right) dx \\
\quad\quad\quad A(t) \leftarrow -\left(\sum_k \frac{t^{k+n-1}}{k!} \right) \cdot \left(-S(t) - \frac{(\ln(t))}{((n-1)!)} \right) \\
\quad \text{else if } \operatorname{mod}(n,2) = 1 \\
\quad\quad \text{for } k \in 0..q \\
\quad\quad\quad S(x) \leftarrow \int \left(\sum_k \frac{(-1)^k \cdot x^{k-n}}{k!} \right) dx \\
\quad\quad\quad A(t) \leftarrow -\left(\sum_k \frac{t^{k+n-1}}{k!} \right) \cdot \left(-S(t) + \frac{(\ln(t))}{((n-1)!)} \right) \\
\quad \text{return } A(t)
\end{array},
$$

где q – количество членов рядов разложения e^x и e^{-x}, t – переменная.

Для представления (11) в виде отношения двух полиномов, коэффициенты которых определяются коэффициентами разложения функции в ряд Тейлора была использована функция pade(CO, L, M, t), где CO – вектор с коэффициентами ряда Тейлора, L – степень числителя, M – степень знаменателя, t – переменная.

```
pade(CO, L, M, t) :=
    g(o, p) ← 0
    C ← matrix(M, M, g)
    d ← matrix(M, 1, g)
    for i ∈ 0..M−1
        for j ∈ 0..M−1
            k ← L−M+i+j+1
            if k<0
                C_{i,j} ← 0
            else
                C_{i,j} ← CO_k
    for i ∈ 0..M−1
        d_i ← −CO_{L+i+1}
    r ← lsolve(C, d)
    a ← matrix(M, 1, g)
    b_0 ← 1
    a_0 ← CO_0
    for i ∈ 1..M
        b_i ← r_{M−i}
    for i ∈ 1..L
        m ← i
        if m>M
            m ← M
        a_i ← Σ_{k=0}^{m} (CO_{i−k} · b_k)
    return Σ_{i=0}^{L} (a_i · t^i) / Σ_{i=0}^{M} (b_i · t^i)
```

Для наглядности и сравнения приближения при разных n и количестве членов ряда Тейлора были также построены графики. Например, при n=4 были вычислены рациональные дроби (аппроксимация Паде) A(x), A2(x), A3(x), A4(x), A5(x), коэффициенты которых определяются коэффициентами разложения в ряд Тейлора с 12, 16, 24, 40, 60 членами соответственно. График представлен на рисунке:



Таким образом, аппроксимация Паде находит многочисленное применение в различных задачах математической физики, механики и прикладной математики. В отличие от линейных аппроксимаций аппроксимация Паде обладает вычислительной устойчивостью, что позволяет решать уравнения со сложной структурой решения.

Библиографические ссылки

1. Линейная аппроксимация. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://cutt.ly/JHJK2x1. - Дата доступа: 18.03.2022.
2. Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского. Аппроксимация Паде. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://elibrary.sgu.ru/VKR/2019/02-04-01_008.pdf. – Дата доступа: 13.04.2022.
3. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Примеры решений. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://mathprofi.ru/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady.html . – Дата доступа: 20.04.2022.
4. Аннотация к дополнительным главам математического анализа. Департамент математики. ВШЭ. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.hse.ru/edu/courses/492550565. – Дата доступа: 18.04.2022.
5. Дифференциальное уравнение Риккати. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://mathhelpplanet.com/static.php?p=differentsialnoe-uravnenie-rikkati. – Дата доступа: 01.05.2022.