КРИТЕРИИ КОМПАКТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

К. В. Хурсик

Белорусский государственный университет, Минск;
k.khursik@gmail.com;
науч. рук. – В. Г. Кротов, д-р физ.-мат. наук, проф.

В работе приводится новый критерий компактности множеств в пространствах суммируемых функций $L^p(X)$, $0 < p < \infty$, где X – метрическое пространство с мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Этот критерий аналогичен известному критерию А.Н. Колмогорова, однако, вместо средних Стеклова мы используем постоянные наилучшего приближения в $L^p(X)$.

Ключевые слова: компактность; наилучшие приближения постоянными; метрические пространства с мерой; пространства L^p; максимальные функции.

Мы будем рассматривать вопрос о условиях полной ограниченности для пространств $L^p(X)$, $0 < p < \infty$, где (X, d, μ) – ограниченное метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ.

На протяжении всей работы систематически используются следующие обозначения

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

для шара с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$ и

$$f_B = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f \, d\mu$$

для среднего значения функции $f \in L^1(B)$ по шару $B \subset X$. Для любого шара $B \subset X$ радиус B будем обозначать r_B.

Кроме того, $L^0(X)$ обозначает множество (классов эквивалентности) измеримых функций на X с топологией сходимости по мере.

Хорошо известен критерий компактности А.Н. Колмогорова [2]: множество $S \subset L^p(X)$, $p > 1$, вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и

$$\lim_{r \to +0} \sup_{f \in S} \int\limits_X \left| f(x) - \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f \, d\mu \right|^p d\mu(x) = 0.$$

Здесь X – ограниченное измеримое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и все функции считаются продолженными нулем вне X. Отметим работу [3], в которой обсуждаются критерии компактности М. Рисса и А.Н. Колмогорова.

Этот критерий нельзя применять для пространств L^p при $0 < p < 1$, так как средние Стеклова в этой ситуации не существуют, вообще говоря. В работе [1] доказан ряд критериев для полной шкалы пространств $L^p(X)$, $0 < p < \infty$.

В.Г. Кротов предложил использовать вместо средних Стеклова постоянные наилучшего приближения в $L^p(B)$, определяемые следующим образом: при $p > 0$ для любого шара $B \subset X$ существует такое число $I_B^{(p)} f \in \mathbb{R}$, что

$$\inf_{I \in \mathbb{R}} \int_B |f(y) - I|^p \, d\mu(y) = \int_B \left|f(y) - I_B^{(p)} f\right|^p d\mu(y).$$

Число $I_B^{(p)} f \in \mathbb{R}$ определяется неоднозначно, если $0 < p \leq 1$. Можно использовать любое из них.

При доказательствах мы опираемся на следующий общий критерий полной ограниченности, который приведен, например, в [1].

Теорема 1. X – множество конечной меры, $0 < p < \infty$. Множество $S \subset L^p(X)$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

a) S вполне ограничено в $L^0(X)$;

b) множество интегралов функций $\{|f|^p : f \in S\}$ равностепенно абсолютно непрерывно, т. е.

c)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in S, \quad E \subset X, \quad \mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f|^p \, d\mu < \varepsilon.$$

Следующая теорема даёт необходимое условие для полной ограниченности множества $S \subset L^p(X)$.

Теорема 2. Пусть $0 < q < p < \infty$. Если множество $S \subset L^p(X)$ вполне ограничено, то

$$\lim_{r \to +0} \sup_{f \in S} \int_X \left|f(x) - I_{B(x,r)}^{(q)} f\right|^p d\mu(x) = 0$$

Идея доказательства теоремы 2 состоит в применении теоремы Лебега о мажорируемой сходимости для каждой функции $f \in L^p(X)$ и её наилучшего приближения $I_{B(x,r)}^{(q)} f$, а затем в обобщении этого свойства сразу для всех функций из множества S.

Теорема 3. Пусть $0 < q < p < \infty$. Если множество $S \subset L^p(X)$ вполне ограничено в $L^0(X)$ и

$$\lim_{r\to+0} \sup_{f\in S} \int_X \left|f(x) - I_{B(x,r)}^{(q)} f\right|^p d\mu(x) = 0,$$

то S вполне ограничено в $L^p(X)$.

Теперь останется доказать, что из условия теоремы 3 следует условие равностепенной абсолютной непрерывности множества интегралов из теоремы 1. Это проверяется непосредственно.

Следствием теорем 2 и 3 является следующий критерий.

Следствие 1. X – множество конечной меры, $0 < q < p < \infty$. Множество $S \subset L^p(X)$ вполне ограничено в $L^p(X)$ тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено в $L^0(X)$ и

$$\lim_{r\to+0} \sup_{f\in S} \int_X \left|f(x) - I_{B(x,r)}^{(q)} f\right|^p d\mu(x) = 0.$$

Необходимость условия полной ограниченности множества в $L^0(X)$ для полной ограниченности в $L^p(X)$ хорошо известна (см, например, [1, теорема 9]).

Библиографические ссылки

1. Krotov V. G. // Sb. Math. 2012. V. 203, No. 7. P. 1045–1064. (Zbl 1271.46023); translation from Mat. Sb. 2012. V. 203, No. 7. P. 129–148.
2. Kolmogoroff A. // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1931. P. 60–63. (Zbl 0002.38501)
3. Hanche-Olsen H. and Holden H. // Expo. Math. 2010. V. 28, No. 4. P. 38–394. (Zbl 1208.46027)