ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫПУКЛОСТИ *f*-ПОТЕНЦИАЛА

Н. А. Царёв

Белорусский государственный университет, г. Минск;
colya.tsarew2015@yandex.by;
науч. рук. – В. И. Бахтин, доктор физ.-мат. наук, проф.

В данной заметке обобщается понятие спектрального потенциала и исследуется его выпуклость. Результаты могут быть применены в теории вероятностей и функциональном анализе.

Ключевые слова: выпуклость; спектральный потенциал; *f*-потенциал.

ВВЕДЕНИЕ

Существует такое понятие как спектральный потенциал. Пример его использования в приложениях можно найти в статье [1]. В ней активно используется свойство выпуклости спектрального потенциала. В следующем примере мы формально определим спектральный потенциал и исследуем его выпуклость.

Пример 1. *Спектральным потенциалом* будем называть функционал вида:

$$\lambda(\varphi) = \ln\left(\int_\Omega e^{\varphi}\, d\mu\right), \text{ где } \varphi \in L^\infty(\Omega, \mu).$$

Докажем выпуклость спектрального потенциала.

Пусть $\varphi, \psi \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Тогда

$$\frac{d\lambda(\varphi + t\psi)}{dt} = \frac{\int_\Omega e^{\varphi + t\psi}\psi\, d\mu}{\int_\Omega e^{\varphi + t\psi}\, d\mu}$$

$$\frac{d^2\lambda(\varphi + t\psi)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{\int_\Omega e^{\varphi}\psi^2\, d\mu \int_\Omega e^{\varphi}\, d\mu - \left(\int_\Omega e^{\varphi}\psi\, d\mu\right)^2}{\left(\int_\Omega e^{\varphi}\, d\mu\right)^2}.$$

Достаточно проверить, что последнее выражение неотрицательно. Это равносильно тому, что

$$\int_\Omega e^{\varphi}\psi^2\,d\mu\int_\Omega e^{\varphi}\,d\mu \geq \Big(\int_\Omega e^{\varphi}\psi\,d\mu\Big)^2.$$

Последнее неравенство — это неравенство Коши — Буняковского для функций $f = e^{\varphi/2}\psi$ и $g = e^{\varphi/2}$. Поэтому оно выполняется. Значит функционал $\lambda(\varphi)$ выпуклый. □

Помимо спектрального потенциала существуют другие функционалы подобной структуры, которые также являются выпуклыми.

Пример 2. Рассмотрим функционал

$$\lambda(\varphi) = \left(\int_\Omega \varphi^p\,d\mu\right)^{1/p}, \qquad p > 1,$$

на множестве

$$X = \Big\{\varphi \in L^\infty(\Omega,\mu)\,\Big|\,\text{ess inf}\,\varphi > 0\Big\}.$$

Пусть $\varphi \in X$ и $\psi \in L^\infty(\Omega,\mu)$. Тогда

$$\frac{d\lambda(\varphi+t\psi)}{dt} = \Big(\int_\Omega (\varphi+t\psi)^p\,d\mu\Big)^{1/p-1}\int_\Omega (\varphi+t\psi)^{p-1}\psi\,d\mu,$$

$$\frac{d^2\lambda(\varphi+t\psi)}{dt^2}\Big|_{t=0} = (1-p)\Big(\int_\Omega \varphi^p\,d\mu\Big)^{1/p-2}\Big(\int_\Omega \varphi^{p-1}\psi\,d\mu\Big)^2 +$$

$$+(p-1)\Big(\int_\Omega \varphi^p\,d\mu\Big)^{1/p-1}\int_\Omega \varphi^{p-2}\psi^2\,d\mu.$$

Проверим, что последнее выражение неотрицательно. Это равносильно тому, что

$$\int_\Omega \varphi^{p-2}\psi^2\,d\mu\int_\Omega \varphi^p\,d\mu \geq \Big(\int_\Omega \varphi^{p-1}\psi\,d\mu\Big)^2.$$

Последнее неравенство — это неравенство Коши — Буняковского для функций $f = \varphi^{p/2-1}\psi$ и $g = \varphi^{p/2}$. Поэтому оно выполняется. Значит функционал $\lambda(\varphi)$ выпуклый. □

При рассмотрении указанных выше примеров возникает вопрос: при каких ограничениях на функцию, порождающую подобные по построению спектральному потенциалу функционалы будут выпуклы?

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть μ — вероятностная мера на множестве Ω, I — открытое связное подмножество в Ў^2. Рассмотрим пространство существенно ограниченных вещественнозначных функций $L^\infty(\Omega,\mu)$ и выделим из него подмножество X, в которое включим функции вида $\varphi : \Omega \to I$. Заметим, что множество X — выпукло. Пусть $f\colon I \to$ Ў^2 — непрерывная строго возрастающая функция.

Тогда f-потенциалом будем называть функционал вида

$$\lambda_f(\varphi) = f^{-1}\left(\int_\Omega f(\varphi)\,d\mu\right), \text{ где } \varphi \in X.$$

Замечание. Разумно предположить, что множество Ω представимо в виде дизъюнктного объединения двух множеств ненулевой меры, потому что в противном случае f-потенциал вырождается. Далее будем считать, что указанное условие выполняется.

Исследуем вопрос выпуклости f-потенциала, т. е. при каких условиях на f для любого $\tau \in (0,1)$ для любых $\varphi, \psi \in X$ выполняется неравенство

$$\lambda_f\left(\tau\varphi + (1-\tau)\psi\right) \le \tau\lambda_f(\varphi) + (1-\tau)\lambda_f(\psi).$$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Предположим, что f дважды дифференцируема. Определим функцию h из следующего выражения:

$$h(f(x)) = \frac{f'(x)^2}{f''(x)}.$$

Будем считать, что если $f''(x)$ принимает нулевое значение в точке x_0, то $h(f(x_0)) = +\infty$. Также, если h тождественно равна $+\infty$ будем считать, что h вогнута.

Теорема 1. Пусть f: $I \to$ Ў^2 — дважды дифференцируемая строго возрастающая функция. Функционал λ_f является выпуклым тогда и только тогда, когда f выпукла и h вогнута.

ПРИМЕРЫ

Пример 3. Построим функционал λ_{ch} с параметрами $f(x) = \operatorname{ch} x, I = (0, +\infty)$. Тогда

$$f'(x) = \operatorname{sh} x > 0,$$

$$f''(x) = \operatorname{ch} x > 0,$$

$$h(ch(x)) = \frac{(\operatorname{sh} x)^2}{\operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch} x} > 0,$$

$$h(t) = \frac{t^2 - 1}{t},$$

$$h'(t) = \frac{t^2 + 1}{t^2},$$

$$h''(t) = \frac{-2}{t^3}.$$

Очевидно, что h — вогнутая и, в силу теоремы 1 функционал λ_{ch} выпуклый. □

Пример 4. Построим функционал λ_{sh} с параметрами $f(x) = \operatorname{sh} x, I = (0, +\infty)$. Тогда

$$f'(x) = \operatorname{ch} x > 0,$$

$$f''(x) = \operatorname{sh} x > 0,$$

$$h(sh(x)) = \frac{(\operatorname{ch} x)^2}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh}^2(x) + 1}{\operatorname{sh} x} > 0,$$

$$h(t) = \frac{t^2 + 1}{t},$$

$$h'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2},$$

$$h''(t) = \frac{2}{t^3}.$$

Очевидно, что h не вогнутая и в силу теоремы 1 функционал λ_{sh} не является выпуклым.

Библиографические ссылки

1. В. И. Бахтин, “Спектральный потенциал, действие Кульбака и большие уклонения эмпирических мер на измеримых пространствах”, Теория вероятн. и ее примен., 59:4 (2014), 625–638; Theory Probab. Appl., 59:4 (2015), 535–544