ОЦЕНКА ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА ГРАФИКА НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

М. М. Логиновская

Белорусский государственный университет, г. Минск;
mary.loginovskaya@gmail.com;
науч. рук. – В. Г. Кротов, д-р физ.-мат. наук, проф.

В данной работе рассмотрены понятия функциональной меры и размерности Хаусдорфа компактного множества в метрическом пространстве, а также функции Хаусдорфа. Получена оценка сверху функциональной размерности Хаусдорфа графика непрерывной функций, действующей из одного дублинг-пространства в другое. В частности, если задана непрерывная функция $f:[0,1] \to \mathrm{R}$, то функция Хаусдорфа

$$h_\omega(t) = \frac{t^2}{\omega(t,f)},$$

где ω — модуль непрерывности функции f , является верхней оценкой функциональной размерности её графика.

Ключевые слова: график функции; модуль непрерывности функции; дублинг-пространство; функция Хаусдорфа; функциональная мера Хаусдорфа; функциональная размерность Хаусдорфа.

Введем сначала термины, необходимые для формулировок.

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство и $A \subset X$ — компактное множество. Число

$$\operatorname{diam} A = \sup\{\rho(x,y): x,y \in A\}$$

называется диаметром множества A.

Определение 1. Модулем непрерывности ограниченной функции $f: A \to R$ называется функция

$$\omega := \omega(t,f) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)|: \rho(x_1,x_2) < t,\ t \in (0, \operatorname{diam} A)\}$$

[1, с. 83].

Определение 2. Функция $h: R_+ \to R_+$ называется функцией Хаусдорфа, если она непрерывна, строго возрастает и $h(+0) = 0$.

Множество всех функций Хаусдорфа обозначим $\mathcal{H}$. С каждой функцией Хаусдорфа свяжем соответствующее понятие меры Хаусдорфа.

Определение 3. Пусть $h \in \mathcal{H}$ — функция Хаусдорфа и $A \subset X$ — компакт. Для $t > 0$ введем

$$H_t^h(A) = \inf\{\textstyle\sum_i h(\operatorname{diam} A_i) : A \subset \bigcup_i A_i,\ \operatorname{diam} A_i < t\}, \tag{1}$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным или счетным покрытиям A_i множества A.

Число $H_t^h(A)$ будем называть (h,t)-вместимостью Хаусдорфа множества A.

Функция $t \mapsto H_t^h(A)$, $t > 0$, положительна и убывает (при большем t точная нижняя грань в (1) берется по более широкому множеству).

Определение 4. Предел $\lim\limits_{t\to+0} H_t^h(A) = H^h(A)$ называется h-мерой Хаусдорфа множества A.

Во множестве функций Хаусдорфа $\mathcal{H}$ введем частичный порядок — для $g, h \in \mathcal{H}$ будем писать, что $g \prec h$, если

$$\lim_{t\to+0} \frac{g(t)}{h(t)} = 0.$$

Ясно, конечно, что не любые две функции $g, h \in \mathcal{H}$ сравнимы в таком смысле.

Теорема 1. Пусть $A \subset X$ и функция Хаусдорфа h удовлетворяют условию

$$0 < H_h(A) < +\infty.$$

Тогда

1) $H_g(A) = 0$ для любой функции $g \in \mathcal{H}$, что $g \prec h$,

2) $H_g(A) = +\infty$ для любой функции $g \in \mathcal{H}$, что $h \prec g$.

Определение 5. Функцию $h \in \mathcal{H}$ будем называть функциональной размерностью Хаусдорфа множества $A \subset X$, если выполнено

$$0 < H_h(A) < +\infty. \quad [2, с. 37]$$

Рассмотрим понятие дублинг-пространства и некоторые его свойства, введенные в [3].

Определение 6. Метрическое пространство (X, ρ) называется дублинг-пространством, если существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что любой шар можно покрыть не более, чем N шарами вдвое меньшего радиуса. Число N называется параметром дублинг-пространства.

Произвольный шар $B(x, R) \subset X$, где $x \in X, R > 0$, далее будем обозначать $B(R)$, поскольку нас будет интересовать только радиус у шара.

Графиком функции $f : X \to Y$ называется множество

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}.$$

Пусть $f \in C(X, Y)$, где X, Y — дублинг-пространства с параметрами N_X и N_Y соответственно, причем X является ограниченным множеством.

Найдем функцию Хаусдорфа h, которая будет являться верхней оценкой функциональной размерности графика функции f.

То есть для любой функции Хаусдорфа $g \in H$ такой, что $g \prec h_\omega$, будет выполнено

$$H^g\big(Gr(f)\big) = 0.$$

Лемма 1. Любой шар $B(R) \subset X$ можно покрыть шарами радиуса r, количество которых не превышает

$$N\left(\frac{R}{r}\right)^{\log_2 N},$$

где $0 < r < R$.

Эта лемма является техническим результатом, используемым при доказательстве нашего основного результата.

Теорема 2. Пусть $f \in C(X, Y)$. Тогда

$$H^{h_\omega}\big(\mathrm{Gr}(f)\big) < \infty,$$

где функция h_ω определяется равенством

$$h_\omega(t) = \frac{t^{\log_2 N_X N_Y}}{\omega(t,f)^{\log_2 N_Y}},$$

где ω — модуль непрерывности функции f.

Поскольку теорема 2 носит очень общий характер, приведем ряд следствий из нее, которые носят более прозрачный характер.

Пусть $X = [0,1]^{d_0}$, $Y = \mathbb{R}^{d_1}$, тогда $N_X = 2^{d_0}$ и $N_Y = 2^{d_1}$. Тогда из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Если $f \in C([0,1]^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1})$, то

$$H^{h_\omega}\big(Gr(f)\big) < \infty,$$

когда

$$h_\omega(t) = \frac{t^{d_0+d_1}}{\omega(t,f)^{d_1}}.$$

Положим $d_0 = d_1 = 1$ в предыдущей теореме, в таком случае получаем результат, сформулированный в следующей теореме.

Теорема 4. Если $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, то

$$H^{h_\omega}\big(Gr(f)\big) < \infty,$$

когда

$$h_\omega(t) = \frac{t^2}{\omega(t,f)}.$$

Результат, приведенный в последней теореме, является точным, если ограничиться классами Гельдера $\omega(t,f) = O(t^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. Это было доказано в сложной работе [4]. Вопрос о точности в общем случае теоремы 4 — хорошо известная нерешенная задача.

Библиографические ссылки

1. Кротов В. Г. Математический анализ: учеб. пособие. Минск: БГУ, 2017.
2. Falconer K. Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications. Chichester: Wiley, 2003.
3. Heinonen J. Lectures on analysis on metric spaces. New York-Berlin- Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
4. Besicovitch A.S., Ursell H.D. Sets of Fractional Dimensions (V) : on Dimensional Numbers of Some Continuous Curves // Journal of the London Mathematical Society. 1937. V. 1–12, No 1. P. 18–25.