ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА

Д. А. Лицкевич

Белорусский государственный университет, г. Минск;
danila.litskevich@gmail.com;
науч. рук. – О. А. Лаврова, к. физ.-мат. наук, доц.

В работе рассмотрены методы решения обратной задачи для нахождения неизвестных параметров обобщённой модели Лотки-Вольтерра по экспериментальным данным, а именно, метод на основе приближений Пикара и метод на основе построения разностной схемы. Численное определение неизвестных параметров модели осуществлялось при помощи пакета Mathematica.

Ключевые слова: обобщённая модель Лотки-Вольтерра; обратная задача; линейная регрессия; разностная схема; приближения Пикара.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в моменты времени $t_0, t_1, \dots t_{N-1}$ известны значения функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, которые будем называть исходными данными. Предполагая, что функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ удовлетворяют обобщённой системе Лотки-Вольтерра [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1\left(a_{0,1} + a_{1,1}\,x_1 + a_{2,1}\,x_2 + a_{3,1}\,x_3\right), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2\left(a_{0,2} + a_{1,2}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + a_{3,2}\,x_3\right), \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3\left(a_{0,3} + a_{1,3}\,x_1 + a_{2,3}\,x_2 + a_{3,3}\,x_3\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $A = (a_{i,j})_{i=0,j=1}^{3} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, сформулируем задачу: необходимо по исходным данным определить неизвестные параметры взаимодействия A для системы (1).

Обозначим $x \coloneqq (x_1, x_2, x_3)^T$, $f \coloneqq (f_1, f_2, f_3)^T$– вектор-функция правой части системы (1).

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Для нахождения параметров системы (1) можно составить разностные схемы, применяя многошаговые разностные методы, методы Адамса, разностные производные различных порядков. В работе рассмотрим явные и неявные линейные -шаговые разностные методы [2, 230 с.].

Для каждого дифференциального уравнения системы (1) можно составить разностное уравнение $\forall\, n = \overline{m, N-1}$:

$$\frac{c_0 x_i^{(n)} + c_1 x_i^{(n-1)} + \dots + c_m x_i^{(n-m)}}{t_n - t_{n-1}} = \\ = b_0 f_i^{(n)} + b_1 f_i^{(n-1)} + \dots + b_m f_i^{(n-m)}, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2}$$

где $\forall\, j = \overline{0,m} :\ c_j, b_j \in \mathbb{R}$; $\forall\, k = \overline{0, N-1} : x_i^{(k)} :=\ x_i(t_k)$ и $f_i^{(k)} := f_i(t_k)$. Далее уравнения (2) можно объединить в систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров A:

$$Y = XA, \tag{3}$$

где $Y \in \mathbb{R}^{(N-m)\times 3}$, $X \in \mathbb{R}^{(N-m)\times 4}$. При этом

$$\begin{array}{ll} Y_{n-m+1,j} := \dfrac{c_0 \ln x_j^{(n)} + c_1 \ln x_j^{(n-1)} + \dots + c_m \ln x_j^{(n-m)}}{t_n - t_{n-1}}, & n = \overline{m, N-1}, \\ X_{n-m+1,1} := 1, & j = \overline{1,3}. \\ X_{n-m+1,j+1} := b_0 f_j^{(n)} + b_1 f_j^{(n-1)} + \dots + b_m f_j^{(n-m)}, & \end{array}$$

Воспользовавшись методом наименьших квадратов и линейной регрессией [3], получим решения системы (3):

$$A = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

ПРИБЛИЖЕНИЯ ПИКАРА

Суть метода на основе приближений Пикара [4] заключается в последовательном нахождении параметров $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots A^{(k)}, \dots$. Для этого требуется последовательно определять решения системы (1) $\varphi^{(0)}(t)$, $\varphi^{(1)}(t), \dots \varphi^{(k)}(t), \dots$ по рекуррентным соотношениям:

$$\varphi^{(k)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\varphi^{(k-1)}(\tau)\right) d\tau, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где $x_0 := (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T$ – начальное условие $(x(t_0) = x_0)$, а $\varphi^{(0)}(t) := x_0$.

Соотношение (4) можно привести к следующему виду:

$$\varphi_i^{(k)}(t) - x_i^0 = C_i^{(k)}(t) A_{\cdot,i}^{(k)}, \quad i = \overline{1,3},$$

где $A_{\cdot,i}^{(k)}$ – i-ый столбец матрицы $A^{(k)}$,

$$C_i^{(k)}(t) := \left(C_{i,0}^{(k)}(t), C_{i,1}^{(k)}(t), C_{i,2}^{(k)}(t), C_{i,3}^{(k)}(t)\right),$$

$$C_{i,0}^{(k)}(t) := \int_{t_0}^{t} \varphi_i^{(k-1)}(\tau)\, d\tau,$$

$$C_{i,j}^{(k)}(t) := \int_{t_0}^{t} \varphi_i^{(k-1)}(\tau) \varphi_j^{(k-1)}(\tau)\, d\tau, \quad j = \overline{1,3}.$$

Для каждого столбца $A_{\cdot,i}^{(k)}$ составляем систему линейных алгебраических уравнений, учитывая исходные данные:

$$Y_i := L_i^{(k)} A_{\cdot,i}^{(k)}, \quad i = \overline{1,3}, \tag{5}$$

где $Y_i \in \mathbb{R}^N$ и $L_i^{(k)} \in \mathbb{R}^{N\times 4}$ определяются построчно:

$$\begin{gathered} (Y_i)_n := \varphi_i^{(k)}(t_{n-1}) - x_i^0, \\ \left(L_i^{(k)}\right)_{n,\cdot} := \left(C_{i,0}^{(k)}(t_{n-1}), C_{i,1}^{(k)}(t_{n-1}), C_{i,2}^{(k)}(t_{n-1}), C_{i,3}^{(k)}(t_{n-1})\right), \end{gathered} \quad n = \overline{1,N}.$$

Воспользовавшись методом наименьших квадратов и линейной регрессией [3], получим решения систем (3):

$$A_{\cdot,i}^{(k)} = \left(L_i^{(k)^T} L_i^{(k)}\right)^{-1} L_i^{(k)^T} Y_i, \quad i = \overline{1,3}.$$

ТЕСТОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Ввиду того, что для обобщённой модели Лотки-Вольтерра в общем случае существует только численное решение, рассмотрим частный случай системы (1), когда удаётся построить аналитическое решение:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(1 + 0.02\, x_2 - 0.1\, x_3), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3(1 - 0.01\, x_3). \end{cases} \qquad (6)$$

Подстановкой можно удостовериться, что

$$s(t) = \left(\frac{(5.07 \times 10^{15})\, e^{-1.6\, e^{-t} + t}}{(19 + e^t)^{10}}, \quad 80\, e^{-t}, \quad \frac{100\, e^t}{19 + e^t}\right)^T$$

является решением системы (6) с начальными данными $x_0 = (100, 80, 5)^T$. Также $\lim_{t \to \infty} s(t) = (0, 0, 100)^T$ – предельное состояние системы (6) , причём $\forall\, t \geq 40 : s(t) \approx (0, 0, 100)^T$.

В качестве исходных данных примем $N = 12$ значений функций $(1 + 0.05\xi_1)\, s_1(t)$, $(1 + 0.05\xi_2)\, s_2(t)$, $(1 + 0.05\xi_3)\, s_3(t)$ в узлах равномерной сетки по времени $t_n = 0.17n$, $n = \overline{0, N-1}$, где $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in U[-1,1]$ – случайные величины, равномерно распределённые на $[-1,1]$.

Для сравнения получаемых результатов будем использовать коэффициент детерминации R^2 [3], вычисляемый по исходным данным, и относительную погрешность $\varepsilon := \frac{1}{3M} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(s_i(t_n) - x_i(t_n)\right)^2}{1 + s_i^2(t_n)}$, которая вычисляется в $M = 800$ равноотстоящих точках отрезка $[0, 40]$.

Таблица 1

Результат применения m-шаговых разностных методов

m	R^2	ε	Предельное состояние
1	0.87	0.05	$(0, 0, 67.9)$
2	0.96	6.72	$(0, 3100, +\infty)$
3	0.44	0.11	$(0, 0.0001, 122)$
4	0.97	0.08	$(0, 0, 54.2)$
5	0.83	41	$(0, 11.4, 31.8)$

(а)Явный метод

m	R^2	ε	Предельное состояние
1	0.99	0.188	$(0, 0, 176)$
2	0.86	402	$(0, 46, 126)$
3	**0.78**	**0.007**	$(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{95})$
4	0.95	0.065	$(0, 0, 56)$
5	0.82	0.185	$(0, 0, 42)$

(б)Неявный метод

Наилучший результат получился для неявного трёхшагового метода (см. табл. 1 (б)). Коэффициент детерминации R^2 в этом случае не наибольший, выбирать стоит по наименьшей относительной погрешности ε. Этому свидетельствует и соответствующее предельное состояние, крайне близкое к настоящему предельному состоянию системы (6).

Таблица 2

Результат применения метода на основе приближений Пикара

Приближение	1	2	3	4	**5**	6	7
R^2	-1.54	-1.48	-96.7	0.985	**0.994**	0.994	0.994
ε	$+\infty$	3480	$+\infty$	0.0357	**0.0289**	0.0311	0.0308

Проводя аналогичные рассуждения, для метода, основанного на приближениях Пикара, получаем, что пятое приближение (см. табл. 2) приводит к наилучшему результату с предельным состоянием $(0, 0, 71)^T$, также близкому к настоящему предельному состоянию системы (6).

Заметим, что отрицательным значениям коэффициента детерминации R^2 (см. табл. 2) соответствуют решения, плохо описывающие исходные данные. Однако при положительных значениях коэффициента детерминации R^2 (см. табл. 2) оказывается, что значений R^2 не достаточно для оценки качества найденных параметров.

Библиографические ссылки

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
2. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.
3. *Devore Jay L.* Probability and Statistics for Engineering and the Sciences, 2011.
4. *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения: учеб. пособие. Минск: БГУ, 2012. 288 с. (Классическое университетское издание).