О КОЛИЧЕСТВЕ КОМПОНЕНТ СВЯЗНОСТИ ВЕЕРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ НАКРЫТИЙ

А. Л. Кухарев

Белорусский государственный университет, г. Минск;
andrey.cuxarev@yandex.by;
науч. рук. – С. М. Агеев, д-р физ.-мат. наук, проф.

Операция веерного (или послойного) произведения является обычным произведением объектов в категории отображений над фиксированным пространством. Веерные произведения играют важную роль в алгебраической топологии. Так, например, веерные произведения римановых поверхностей участвуют в топологическом доказательстве теоремы Абеля о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах [1, с. 58]. В данной статье описывается действие слева фундаментальной группы базы накрытия на накрывающем пространстве и с его помощью выводится формула для вычисления количества компонент линейной связности накрывающего пространства. Полученные в данной статье формулы помогают устанавливать эйлерову характеристику и род поверхности, получающиеся при веерном произведении. Данный вопрос поднимается в статье [2], однако в данной статье рассматривается более общий метод нахождения компонент линейной связности веерного произведения накрытий.

Ключевые слова: алгебраическая топология; накрытия; веерные произведения; действие группы.

Рассмотрим конечнолистное накрытие $p: E \to B$. Пусть $\pi_1(B, b_0),\ b_0 \in B$ – фундаментальная группа пространства B, $F = p^{-1}(b_0)$ – слой над точкой b_0, тогда для любого класса петель $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$ существует поднятие в накрывающее пространство [3, с. 166]. В силу сюръективности отображения p, прообраз пути γ, также называемый поднятием, в накрывающем пространстве не обязан определяться однозначно. Для того, чтобы избежать этого, необходимо выбирать точку из F, которая была бы началом поднятого пути $\tilde{\gamma}$. Тогда конец пути $\tilde{\gamma}$ для каждой начальной точки определяется однозначно [3, с. 167] и лежит в F. Таким образом каждому классу петель из $\pi_1(B, b_0)$ можно поставить в соответствие некоторую перестановку s элементов слоя F. Отображение, которое производит описанное действие $\mu:\ \pi_1(B, b_0) \ni [\gamma] \to s \in G \subset S(F)$ называется отображением монодромии, где $G = \mu(\pi_1(B, b_0))$ является подгруппой группы перестановок $S(F)$.

Далее рассмотрим действие конечной группы G в накрывающем пространстве E как левое действие группы: $\cdot: G \times E \ni (g, x) \to g \cdot x \in E$, оно переводит элемент x в элемент $g \cdot x$, получающийся после применения перестановки g к x.

Отметим, что если накрытие регулярно, то группа G определяется как факторгруппа $\pi_1(B)/_{p_*(\pi_1(E))}$, где E, B – локально линейно связные пространства [3, с. 177].

В случае регулярного накрытия количество компонент связности накрывающего пространства можно найти используя следующее

Предложение. Пусть $p : E \to B$ – регулярное накрытие, $b_0 \in B$, тогда если слой $F = p^{-1}(b_0)$ – конечное множество, то количество компонент линейной связности k пространства E вычисляется по формуле $k = \frac{|F|}{|G|}$.

Доказательство. Пусть точки $e, e' \in F$ лежат в одной компоненте связности пространства E, тогда существует путь $\tilde{\gamma}$ их соединяющий, а значит, если $\gamma = p(\tilde{\gamma})$, то справедливо $e' = \tilde{\gamma} \cdot e$, $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$. И наоборот, если $e, e' \in F$ и $e' = \tilde{\gamma} \cdot e$, для некоторого $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$, то это значит, что e, e' лежат в одной компоненте связности.

С другой стороны, из выполнения равенства $e' = \tilde{\gamma} \cdot e$ следует, что для класса $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$ можно рассмотреть перестановку $g = \mu([\gamma]) \in G$. Тогда, можно сказать, что e, e' лежат в одной орбите, например $G \cdot e$. Значит, найдя количество орбит, мы найдём количество компонент связности пространства E.

Согласно [4, с. 61] накрытие регулярно тогда и только тогда, когда никакая петля в X не является образом одновременно замкнутого и незамкнутого пути в E.Тогда прообраз петли, который переводил бы некоторую точку слоя F саму в себя должен являться петлёй для всех точек из F. Перестановка, которая соответствует такому пути – тождественная, а значит $|G| = 1$ и количество компонент линейной связности ровно столько, сколько элементов в слое. Отметим, что любая другая перестановка, лежащая не во всех стабилизаторах точек из F, автоматически нарушает условие регулярности накрытия. То есть перестановки из G единственным образом определяют количество элементов, которые находятся в одной компоненте связности. Но тогда количество компонент связности пространства E вычисляется по формуле $\frac{|F|}{|G|}$.

Обобщим полученное предложение. Пусть теперь $p : E \to B$ – нерегулярное накрытие, тогда число компонент связности по предыдущей формуле вычислить не удаётся, однако для такого случая справедлива следующая

Теорема. Пусть $p : E \to B$ – накрытие, $b_0 \in B$, тогда если слой $F = p^{-1}(b_0)$ – конечное множество, то количество компонент линейной связности k пространства E вычисляется по формуле $k = \frac{1}{|G|}\sum_{x \in F} |G_x|$.

Доказательство. Пусть $F_0 \subset F$ – множество точек, находящихся в одной компоненте связности. В орбите произвольного элемента $x \in F$ будет $|G \cdot x| = [G: G_x] = |G|/|G_x|$ точек из F_0. Перепишем эту формулу в следующем виде $\frac{1}{|G \cdot x|} = \frac{|G_x|}{|G|}$. Тогда, просуммировав её по всем точкам из F_0, получим $\frac{1}{|G|}\sum_{x \in F_0} |G_x| = 1$. А значит, если просуммировать $\frac{1}{|G \cdot x|} = \frac{|G_x|}{|G|}$ по всем элементам множества F, то мы получим натуральное число $k = \frac{1}{|G|}\sum_{x \in F} |G_x|$ равное числу компонент связности пространства E.

Покажем, как применить полученную в теореме формулу на случай веерного произведения конечного числа накрытий. Пусть $p_1 : E_1 \to B, \dots, p_n : E_n \to B$ – конечнолистные накрытия, тогда веерное произведение этих накрытий это $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : p_i(x_i) = p_j(x_j)\ \forall\, i \neq j\}$ [5, с. 152]. Отметим, что отображение $p = p_i(x_i) : E \to B$ это тоже накрытие. Для каждого накрытия $p_i : E_i \to B$ можно рассмотреть отображение монодромии $\mu_i : \pi_1(B, b_0) \to G_i \subset S(p^{-1}(b_0))$. В случае веерного произведения, отображение монодромии μ, соответствующее накрытию p определяется так: $\mu = \mu_1 \times \dots \times \mu_n : \pi_1(B, b_0) \to G \subset S(F_1) \times \dots \times S(F_n)$, где $F_i = p_i^{-1}(b_0), i = \overline{1,n}$. Теперь, зная, как устроено отображение монодромии, для подсчёта количества компонент линейной связности построенного веерного произведения можно применить доказанную выше формулу.

Библиографические ссылки

1. *Прасолов В. В., Шварцман О. В.* Азбука римановых поверхностей. Москва : МЦНМО, 2015.
2. Hidalgo R. A., Reyes-Carocca S., Vega A. On the fiber product of Riemann surfaces //arXiv preprint arXiv:1611.07880. – 2016.
3. *Масси У., Столлингс Дж.* Алгебраическая топология. Москва : Мир, 1977.
4. *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. Москва : Наука, 1989.
5. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности: введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. Москва : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973.