ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИ УСЛОВИЯХ КОШИ НА КРИВОЙ В ПЛОСКОСТИ

А. Л. Кухарев

Белорусский государственный университет, г. Минск;
andrey.cuxarev@yandex.by;
науч. рук. – Ф. Е. Ломовцев, д-р физ.-мат. наук, проф.

Модификацией метода Римана выведена формула Римана классического решения задачи Коши для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами при условиях Коши на нехарактеристической кривой плоскости.

Ключевые слова: общее телеграфное уравнение; обобщенная задача Коши; метод Римана; формула Римана; классическое решение; достаточная гладкость данных.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В плоскости Ў^2 решить задачу Коши для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами и условиями Коши на нехарактеристической кривой l :

$$L\,u(x,t) \equiv u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) + b(x,t)u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) +$$

$$+ q(x,t)u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in R^2 \setminus l, \qquad (1)$$

$$u\,|_l = \varphi(x),\quad (\partial u / \partial \vec{n})\,|_l = \psi(x),\ \vec{n} \perp l, \qquad (2)$$

где коэффициенты уравнения a, b, c, q – вещественные функции и исходные данные задачи f, φ, ψ – заданные вещественные функции своих переменных x и t , $(\partial u / \partial \vec{n})\,|_l$ – производная по нормали $\vec{n}$ к кривой l уравнения $t=\chi(x)$, $x\in$ Ў^2.

Уравнение (1) даёт дифференциальные уравнения характеристик

$$dx = (-1)^i a(x,t)dt,\ i = 1, 2, \qquad (1)$$

которыми задаются в плоскости Ў^2 переменных x и t соответственно два различных семейства характеристик $g_i\,(x,t)=C_i$, $C_i\in$ Ў^2 , $i=1,2$. Если коэффициент $a(x,t\,) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in$ Ў^2, то характеристики $g_1\,(x,t)=C_1$ строго убывают, а характеристики $g_2\,(x,t)=C_2$ строго возрастают по переменной x. Поэтому неявные функции $y_i = g_i(x,t), x \geq 0, t \geq 0$, имеют явные строго монотонные обратные функции $x = h_i\{y_i, t\}, t \geq 0$ и $t = h^{(i)}[x, y_i], x \geq 0, i = 1, 2,$ для которых выполняются тождества обращения из статьи [1]:

$$g_i\left(h_i\{y_i,t\},t\right) = y_i, \forall y_i, \; h_i\left\{g_i\left(x,t\right),t\right\} = x, x \geq 0, i = 1, 2, \tag{4}$$

$$g_i\left(x, h^{(i)}[x, y_i]\right) = y_i, \forall y_i, \; h^{(i)}\left[x, g_i\left(x,t\right)\right] = t, t \geq 0, i = 1, 2, \tag{5}$$

$$h_i\left\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\right\} = x, x \geq 0, \; h^{(i)}\left[h_i\{y_i,t\}, y_i\right] = t, t \geq 0, i = 1, 2. \tag{6}$$

Если функция $a \in C^2$(Ў^2), то функции g_i ,h_i ,$h^{(i)} \in C^2$Ў^2 по $x, t, y_i, i = 1, 2,$ [1].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для однозначной разрешимости задачи Коши кривая l должна выражаться некоторой, по крайней мере, непрерывно дифференцируемой функцией на плоскости и удовлетворять требованию, чтобы каждая характеристика $g_i(x,t)=C_i$, $C_i \in$ Ў^2 , $i=1, 2$, уравнения (1) пересекала кривую l не более одного раза [2, с. 137].

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве Ω плоскости Ў^2. Если носитель l данных Коши φ, ψ задаётся уравнением $t = \chi(x)$, где $\chi \in C^2$ (Ў) , то формулу Римана классического решения этой задачи Коши содержит следующая

Теорема. Пусть в уравнении (1) коэффициенты $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in$ Ў^2, $a \in C^2$ (Ў^2), $b, c, q \in C^1$ (Ў^2), и каждая из характеристик $g_i(x,t) = C_i, i = 1, 2,$ пересекает кривую l гладкости $\chi \in C^2$ (Ў) не более одного раза. Когда правая часть $f \in C^1$ (Ў^2) уравнения (1) и данные Коши $\varphi \in C^2$ (Ў), $\psi \in C^1$ (Ў) в условиях Коши (2), тогда задача Коши (1), (2) имеет единственное и устойчивое по f, φ, ψ классическое решение
$u \in C^2$ (Ў^2) вида

$$u(x,t) = \frac{(auv)\left(s_1(x,t), \chi(s_1(x,t))\right) + (auv)\left(s_2(x,t), \chi(s_2(x,t))\right)}{2a(x,t)} +$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{s_2(x,t)}^{s_1(x,t)}\Big\{\Big[\psi(s)\big(1-\chi'^2(s)a^2\left(s,\chi(s)\right)\big)+\chi'(s)\varphi'(s)\big(1+a^2\left(s,\chi(s)\right)\big)\Big]\frac{v\left(s,\chi(s)\right)}{\sqrt{1+\chi'^2(s)}}-$$

$$-\varphi(s)\Big[v_\tau(s,\tau)\big|_{\tau=\chi(s)}-b\left(s,\chi(s)\right)v\left(s,\chi(s)\right)+$$

$$+\chi'(s)\Big(\left(a^2(s,\tau)v(s,\tau)\right)_s\big|_{\tau=\chi(s)}+c\left(s,\chi(s)\right)v\left(s,\chi(s)\right)\Big)\Big]\Big\}ds+$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{\Delta MPQ} f(s,\tau)v(s,\tau;x,t)dsd\tau,\ (x,t)\in\square^2, \tag{7}$$

где $u\left(s_i(x,t),\chi\left(s_i(x,t)\right)\right)=\varphi\left(s_i(x,t)\right),\ i=1,2,$ *в силу условий Коши (2),* $s_i(x,t)\in C^2$ (Ў^2) *– решения уравнений* $g_i\left(s_i,\chi(s_i)\right)=g_i\left(x,t\right),\ i=1,2$, ΔMPQ *–криволинейный характеристический треугольник с вершиной* $M\left(x,t\right)$ *и вершинами* $P\left(s_2(x,t),\chi\left(s_2(x,t)\right)\right)$, $Q\left(s_1(x,t),\chi\left(s_1(x,t)\right)\right)$ *его криволинейного основания* PQ *. Функция Римана* $v\left(s,\tau\right)=v\left(s,\tau;x,t\right)$ *с параметрами* (x,t) *– это решение задачи Гурса (12), (13) на треугольниках*
$\Delta MPQ\subset$ Ў^2 .

Схема доказательства. Вывод формулы Римана (7) формального решения задачи Коши (1), (2) осуществляется модификацией известного метода Римана. Во-первых, он состоит в применении следующего известного тождества для всех вещественных функций *u, v* ∈ C^2 (Ў^2) с дифференциальным оператором L общего телеграфного уравнения (1) и формально сопряженным к нему дифференциальным оператором M :

$$\left(L\ u(x,t)\right)v(x,t)-u(x,t)\left(M\ \ v(x,t)\right)=$$
$$=\frac{\partial H\left(u\left(x,t\right),v\left(x,t\right)\right)}{\partial t}+\frac{\partial K\left(u\left(x,t\right),v\left(x,t\right)\right)}{\partial x} \tag{8}$$

с дифференциальными квадратичными формами

$$H(u,v)=u_t v-uv_t+buv=(uv)_t-u[2v_t+bv],$$

$$K(u,v)=-u_x a^2 v+u(a^2v)_x+cuv=-(a^2uv)_x+u[2(a^2v)_x+cv].$$

Во-вторых, метод Римана предполагает применение известной формулы Грина к двойному интегралу от тождества (8) в нашем случае по криволинейному характеристическому треугольнику *MPQ* в Ў^2 с любой вершиной $M\ (x,\ t)\ \in$ Ў^2 и соответствующими вершинами $P\big(s_2(x,t),\chi\big(s_2(x,t)\big)\big),\ Q\big(s_1(x,t),\chi\big(s_1(x,t)\big)\big)$ его основания PQ на кривой l:

$$\int\limits_{\Delta MPQ}\big(L\,u(s,\tau)\big)v(s,\tau)-u(s,\tau)\big(M\ \ v(s,\tau)\big)dsd\tau=$$
$$=\int\limits_{l^+}\Big[K\big(u(s,\tau),v(s,\tau)\big)d\tau-H\big(u(s,\tau),v(s,\tau)\big)ds\Big],\qquad (9)$$

где $l^+=QM\cup MP\cup PQ$ – контур криволинейного треугольника MPQ с положительным направлением обхода, в силу левой ориентации плоскости $Os\tau$. Вычисляем криволинейный интеграл из правой части равенства (9) по кривой QM и приводим криволинейный интеграл второго типа к обыкновенному определенному интегралу

$$\int\limits_Q^M\Big[K\big(u(s,\tau),v(s,\tau)\big)d\tau-H\big(u(s,\tau),v(s,\tau)\big)ds\Big]=$$
$$=(auv)(x,t)-(auv)\big(s_1(x,t),\chi\big(s_1(x,t)\big)\big)-$$
$$-\int\limits_{\chi(s_1(x,t))}^{t}u(s,\tau)\big\{4a(s,\tau)v_\tau(s,\tau)-\big[a(s,\tau)b(s,\tau)-4a_\tau(s,\tau)+c(s,\tau)\big]v(s,\tau)\big\}d\tau.\qquad (10)$$

Аналогично вычисляется интеграл из равенства (9) по кривой MP

$$\int\limits_M^P\Big[K\big(u(s,\tau),v(s,\tau)\big)d\tau-H\big(u(s,\tau),v(s,\tau)\big)ds\Big]=$$
$$=(auv)(x,t)-(auv)\big(s_2(x,t),\chi\big(s_2(x,t)\big)\big)-$$
$$-\int\limits_{\chi(s_2(x,t))}^{t}u(s,\tau)\big\{4a(s,\tau)v_\tau(s,\tau)-\big[a(s,\tau)b(s,\tau)-4a_\tau(s,\tau)-c(s,\tau)\big]v(s,\tau)\big\}d\tau.\qquad (11)$$

В третьих, метод Римана привлекает функцию Римана $v(s,\tau)=v(s,\tau;x,t)$, которая является классическим решением однородного формально сопряжённого дифференциального уравнения

$$M\ \ v(x,t)\equiv v_{tt}(x,t)-\big(a^2(x,t)v(x,t)\big)_{xx}-\big(b(x,t)v(x,t)\big)_t-$$
$$-\big(c(x,t)v(x,t)\big)_x+q(x,t)v(x,t)=0,\ \ (x,t)\in\Delta MPQ,\qquad (12)$$

с двумя согласованными условиями Гурса

$$v(s,\tau)=\exp\left\{\int_t^\tau k_i(h_i\{g_i(x,t),\rho\},\rho)d\rho\right\},\ g_i(s,\tau)=g_i(x,t),$$

$$\tau\in\left[\chi\left(s_i(x,t)\right),t\right],\ i=1,2, \tag{13}$$

где соответственно на кривых QM и MP характеристик функции равны

$$k_1(s,\tau)=\left\{a(s,\tau)b(s,\tau)-4a_\tau(s,\tau)+c(s,\tau)\right\}/\,4a(s,\tau),$$

$$k_2(s,\tau)=\left\{a(s,\tau)b(s,\tau)-4a_\tau(s,\tau)-c(s,\tau)\right\}/\,4a(s,\tau).$$

Модификация метода Римана заключается в использовании соотношений (3)–(6) для всех преобразований и доказательств из-за криволинейных и неявных характеристиках $g_i\,(x,\,t)=C_i$, $C_i \in$ Ў^2 , $i=1,\,2,$ телеграфного уравнения (1). Далее, применяя формулы (10), (11) и условия (12) и (13) на функцию Римана $v(s,\tau)=v(s,\tau;x,t)$, для которой $v(x,t)=1$ в точке $M(x,t)$ и $v(s,\tau)=0$ на QM и MP, из равенства (9) находим выражение формального решения

$$u(x,t)=\frac{(auv)(s_1(x,t),\chi(s_1(x,t)))+(auv)(s_2(x,t),\chi(s_2(x,t)))}{2a(x,t)}+$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int_P^Q\left[H\left(u\left(s,\tau\right),v\left(s,\tau\right)\right)ds-K\left(u\left(s,\tau\right),v\left(s,\tau\right)\right)d\tau\right]+$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{\Delta MPQ}f(s,\tau)v(s,\tau;x,t)dsd\tau,\ (x,t)\in\square^2. \tag{14}$$

Таким образом, остаётся только в формуле (14) с помощью условий Коши (2) вычислить криволинейный интеграл по дуге PQ кривой l.

Дважды непрерывная дифференцируемость на Ў^2 полученного формального решения (7) базируется на гладкости входных данных f,φ,ψ задачи Коши из нашей теоремы и на дважды непрерывной дифференцируемости функции Римана $v(s,\tau)=v(s,\tau;x,t)$ [2, с. 129–135].

Единственность классического решения (7) задачи Коши (1), (2) следует из общности тождества (8), т.е. его справедливости для всех *u*, *v* $\in C^2$ (Ў^2) , и однозначности решения задачи Гурса (12), (13) в ΔMPQ.

Его устойчивость по f, φ, ψ, т.е. непрерывная зависимость решения *u* $\in C^2$ (Ў^2) в норме банахова пространства C^2 (Ў^2) от исходных данных f, φ, ψ задачи Коши в норме декартового произведения C^1 (Ў^2) × C^2 (Ў^2) × C^1 (Ў) соответствующих банаховых пространств вытекает из явного вида (7) классического решения задачи Коши (1), (2) на Ў^2.

Замечание. Случай формулы (7) при $a(x,t) \equiv 1$ есть в [2, с. 139].

Библиографические ссылки

1. *Ломовцев Ф. Е.* Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2021. № 1. С. 18–38.
2. *Тихонов А. Н.,* Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 2004. – 798 с.