

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**УТВЕРЖДАЮ**

**Проректор по учебной работе  
и образовательным инновациям**



**О.Г. Прохоренко**

**Регистрационный № УД – 11586/уч.**

**Дополнительные главы математического анализа**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

**1-31 03 01 Математика (по направлениям)**

**Направлений специальности:**

**1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)**

**1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)**

2022 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021, типового учебного плана № G 31-1-011/пр-тип. от 31.03.2021 и учебных планов: №G 31-1-003/уч. от 25.05.2021, №G31-1-061/уч. ин. от 31.05.2021, №G31-1-004/уч. от 25.05.2021.

#### **СОСТАВИТЕЛИ:**

**С.А. Бондарев**, доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**И.Л. Васильев**, доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**Н.В. Бровка**, профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета, доктор педагогических наук, профессор;

**В.Г. Кротов**, профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Т.С. Мардвилко**, доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**Н.Б. Яблонская**, доцент кафедры общей математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

#### **РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**В.В. Гороховик**, заведующий Отделом нелинейного и стохастического анализа Института математики Национальной Академии Наук Республики Беларусь, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Национальной Академии наук Беларуси;

**А.Б. Антонец**, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

#### **РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой теории функций Белорусского государственного университета (протокол № 13 от 12.05.2022);

Научно-методическим Советом Белорусского государственного университета (протокол № 6 от 29.06.2022)

Заведующий  
кафедрой теории функций



Н.В. Бровка

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Дополнительные главы математического анализа» – создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики.

**Образовательная цель:** изложение основ дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных.

**Развивающая цель:** формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

**Задачи учебной дисциплины «Дополнительные главы математического анализа»:**

1. Изучение различных понятий предела и освоение этих понятий с целью практического использования при решении различных задач математики;
2. Изучение основ дифференциального и интегрального исчисления;
3. Использование основ дифференциального и интегрального исчисления при решении задач математики, механики, математической физики.

### Место учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» относится к модулю «Математический анализ» 2 компонента учреждения высшего образования.

### Связи с другими учебными дисциплинами

Учебная дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» является основой для преподавания большинства математических курсов. Наиболее тесной является связь с такими дисциплинами как «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики», «Экстремальные задачи», «Вариационное исчисление».

### Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Дополнительные главы математического анализа» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции:**

БПК-2. Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

**знать:**

- основные понятия и результаты дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных;
- методы доказательств и алгоритмы решения задач математического анализа;
- достижения в области математического анализа и их приложения в задачах естествознания;

**уметь:**

– использовать основные результаты математического анализа в практической деятельности;

– использовать теоретические и практические навыки применения дифференциального и интегрального исчисления в математике;

**владеть:**

– основными методами интегрирования и дифференцирования функций, рядов и интегралов;

– методами доказательств и аналитического исследования функций, рядов и интегралов на непрерывность, сходимость, равномерную сходимость;

– навыками самообразования и способами использования аппарата математического анализа для проведения математических и междисциплинарных исследований.

### **Структура учебной дисциплины**

Учебная дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» изучается в 4 семестре очной формы получения высшего образования. Всего на ее изучение отведено 120 часов для направления специальности 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность), 90 часов для направления специальности 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность), в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 30 часов, лабораторные занятия – 34 часа, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### Тема 1. Мера Жордана в $\mathbb{R}^d$

1.1. Построение меры Жордана на евклидовых пространствах. Критерии измеримости. Примеры: площадь криволинейной трапеции, площадь круга, число  $\pi$ , неизмеримое по Жордану множество.

1.2. Свойства меры Жордана (монотонность, аддитивность, субаддитивность).

### Тема 2. Интеграл Римана в $\mathbb{R}^d$

2.1. Определение интеграла Римана на множестве, измеримом по Жордану. Необходимое условие интегрируемости. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Классы интегрируемых функций. Критерий Лебега.

2.2. Свойства интеграла Римана: интегрируемость на подмножестве, аддитивность, линейность, монотонность. Неравенства для интеграла. Мера декартова произведения измеримых множеств. Теорема об интеграле по декартовому произведению множеств (теорема Фубини) и ее следствия.

2.3. Замена переменной в интеграле Римана. Примеры.

### Тема 3. Функции ограниченной вариации и интеграл Римана-Стилтьеса

3.1. Функции ограниченной вариации. Аддитивность и непрерывность вариации. Теорема Жордана. Спрямолинейный путь и его длина. Критерий Жордана спрямолинейности.

3.2. Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства (линейность, аддитивность, формула интегрирования по частям). Условия существования интеграла Стилтьеса, оценка интеграла. Формулы для вычисления с помощью интеграла Римана.

### Тема 4. Криволинейные интегралы и формула Грина

4.1. Интегралы вдоль путей. Жордановы кривые и контуры, их параметризации и ориентация. Натуральная параметризация. Интегралы по жордановым кривым.

4.2. Формула Грина. Односвязные области. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла. Условия независимости криволинейного интеграла от пути. Первообразная функции многих переменных.

### Тема 5. Поверхностные интегралы. Формула Стокса

5.1. Параметрические поверхности и параметризации. Площадь поверхности. Нормаль и касательная плоскость к поверхности, ориентация. Поверхности с краем.

5.2. Поверхностные интегралы первого и второго рода и их приложения.

5.3. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского.

5.4. Теория поля. Потенциальные и соленоидальные поля.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Иное	Количество часов УСР (аудиторный контроль)	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	<b>Мера Жордана в <math>R^d</math></b>	4			4				
1.1	Построение меры Жордана на евклидовых пространствах	2			2				
1.2	Свойства меры Жордана	2			2				
2	<b>Интеграл Римана в <math>R^d</math></b>	6			10				
2.1	Определение интеграла Римана и условия интегрируемости	2			2				
2.2	Свойства и вычисление интеграла	2			4				
2.3	Замена переменной	2			4		2	контрольная работа по теме 2	
3	<b>Функции ограниченной вариации и интеграл Римана-Стилтьеса</b>	4			4				
3.1	Функции ограниченной вариации	2			2				
3.2	Интеграл Стилтьеса	2			2				
4	<b>Криволинейные интегралы и формула Грина</b>	8			8				

4.1	Интегралы вдоль путей и кри- вых.	4				4			
4.2	Формула Грина	4				4			
<b>5</b>	<b>Поверхностные интегралы. Формула Стокса</b>	<b>8</b>				<b>8</b>			
5.1	Параметрические поверхности	2				2			
5.2	Поверхностные интегралы пер- вого и второго рода	2				2			
5.3	Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского и	2				2			
5.4	Теория поля	2				2		2	контрольная работа по темам 4 и 5
	<b>Всего по дисциплине</b>	<b>30</b>				<b>34</b>		<b>4</b>	

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

- 1 Кротов, В.Г. Математический анализ : учеб. пособие для студ. уво по математическим спец. / В. Г. Кротов ; БГУ. - Минск : БГУ, 2017. - 375 с. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/191394>
- 2 Зверович, Э. И. Вещественный и комплексный анализ : учеб. пособие для студ. мат. спец. учреждений, обеспеч. получение высш. образования : в 6 ч. - / Э. И. Зверович. - Минск : Вышэйшая школа, 2008.
- 3 Зорич, В. А. Математический анализ. Часть I : учебник / В. А. Зорич. - 11-е изд., испр. - Москва : МЦНМО, 2021. - 564 с. - ISBN 978-5-4439-3304-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/>  
Зорич, В. А. Математический анализ. Часть II : учебник / В. А. Зорич. - 11-е изд, испр. - Москва : МЦНМО, 2021. - 676 с. - ISBN 978-5-4439-3305-4. - Текст : электронный. - URL:<https://znanium.com/catalog/product/1900075>
- 4 Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 1 / Г. М. Фихтенгольц. —17-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023.—608 с. <https://e.lanbook.com/book/284078>  
Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х тт. : учебник для вузов — Том 2 2022. — 800 с. <https://e.lanbook.com/book/199928>  
Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления В 3-х тт. : учебник для вузов / Г. М. Фихтенгольц. — 13-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022 — Том 3 — 2022. — 656с. <https://e.lanbook.com/book/221270>
- 5 Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа. Часть 1 / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 444 с. <https://e.lanbook.com/book/289001>  
Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа. Часть 2 / Г. М. Фихтенгольц. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 464 с. <https://e.lanbook.com/book/297692>
- 6 Никитин, А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 460 с. <https://urait.ru/bcode/511175>
- 7 Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие [для студентов физических и механико-математических специальностей вузов] / Б. П. Демидович. - Изд. 24-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 623 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/184105>
- 8 Васильев, И.Л. Математический анализ. Задачи и упражнения. Часть 1: учебное пособие [для студентов уво по математическим специальностям]. / Васильев, И.Л., Васильев Ю.В., Кротов В.Г., Мардвилко Т.С. –



Перечень дополнительной литературы

- 9 С.М. Никольский. Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Наука. 1990 и другие издания.
- 10 Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2000.
- 11 В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. Математический анализ. М.: Наука, 1985 и другие издания.
- 12 А.М. Тер-Крикоров, И.И. Шабунин. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.
- 13 Сборник задач по математическому анализу /Под ред. Л.Д. Кудрявцева, М.: Наука, Т. 1. – 1984, Т. 2. – 1986, Т. 3 – 1994 и другие издания.
- 14 У. Рудин. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976 и другие издания.
- 15 Г. Поля, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1978.
- 16 Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

## **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Перечень рекомендуемых средств диагностики:

- Контрольная работа.

**Методика формирования итоговой отметки:**

Итоговая отметка формируется на основе документов:

- Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012);
- Положение о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 189-ОД от 31.03.2020 г.);
- Положение об организации аттестации лиц, не сдавших экзамены, зачеты, не прошедших иные формы контроля результатов учебной деятельности, предусмотренные учебными планами и учебными программами, и ликвидации академической разницы в учебных планах в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ 20.10.2020 № 549-ОД);
- Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов (курсантов, слушателей) от 18.11.2019.
- Критерии оценки результатов учебной деятельности обучающихся в учреждениях высшего образования по десятибалльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 28.05.2013 г. № 09-10/53-ПО).

Формой текущей аттестации учебными планами предусмотрен экзамен.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Формирование отметки текущей успеваемости: отметка текущей успеваемости представляет собой среднеарифметическую величину отметок по всем формам текущего контроля знаний по учебной дисциплине.

Итоговая отметка по учебной дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки текущей успеваемости составляет 50 %, экзаменационной отметки – 50 %.

### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

**Тема 2. Интеграл Римана в  $R^d$  (2 ч.)**

1. В двойном интеграле по параболическому сегменту, ограниченному кривыми  $y = x^2$  и  $y = 1$ , расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

2. Вычислить двойной интеграл  $\iint_D xy^2 dx dy$ , если  $D$ - область, ограниченная параболой  $y^2 = 2px$  и прямой  $x = p/2$ , где  $p > 0$ .

3. Переходя к полярным координатам, вычислить площадь, ограниченную кривыми  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  и  $x^2 + y^2 \geq a^2$ .

4. Различными способами расставить пределы интегрирования тройном интеграле  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$ .

Форма контроля – контрольная работа.

**Тема 4. Криволинейные интегралы и формула Грина. Тема 5. Поверхностные интегралы. Формула Стокса (2 ч.)**

1. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода  $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$ ,  $L$  – где часть винтовой линии  $x = a \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = bt$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

2. Найти длину пространственной кривой  $x = 3t$ ,  $y = 3t^2$ ,  $z = 2t^3$ , от точки  $(0, 0, 0)$  до точки  $(3, 3, 2)$ .

3. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода  $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$  по параболу  $y = x^2$ ,  $x \in [-1, 1]$ , в направлении от точки  $(-1, 1)$  до точки  $(1, 1)$ .

4. Найти первообразную функции  $f(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2, x^2 - 2xy - y^2)$ .

5. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода Вычислить поверхностный интеграл  $\iint_S (x + y + z) dS$  по части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z > 0$ .

6. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода  $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , где – внешняя сторона полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z > 0$ .

7. Найти массу границы единичного куба  $[0, 1]^3$ , если плотность в точке  $(x, y, z)$  на его поверхности равна  $xyz$ .

Форма контроля – контрольная работа.

### Примерная тематика лабораторных занятий

Занятие № 1. Построение меры Жордана на евклидовых пространствах

Занятие № 2. Свойства меры Жордана.

Занятие № 3. Определение интеграла Римана.

Занятия № 4-5. Вычисление кратных интегралов.

Занятие № 6-7. Вычисление кратных интегралов с помощью замены переменной.

Занятия № 8. Функции ограниченной вариации.

Занятие № 9. Интеграла Стилтеса.

Занятие № 10-11. Интегралы вдоль путей и кривых.

Занятие № 12-13. Формула Грина.

Занятия № 14. Параметрические поверхности.

Занятия № 15. Поверхностные интегралы.

Занятие № 16. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского.

Занятие № 17. Теория поля

### Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *практико-ориентированный подход*, который предполагает:

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

### Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Дополнительные главы математического анализа» используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к экзамену, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

### Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Мера сегмента и ее свойства. Фигура, мера фигуры и ее свойства.
2. Внутренняя и внешняя меры. Мера Жордана, критерий измеримости.
3. Свойства меры Жордана (измеримость и операции над множествами, монотонность, аддитивность и субаддитивность). Теорема о площади криволинейной трапеции.
4. Определение интеграла Римана. Суммы Дарбу и их свойства. Интегралы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости.
5. Множества лебеговой меры нуль. Критерий интегрируемости Лебега.
6. Свойства интеграла Римана.
7. Мера декартового произведения множеств.
8. Основная теорема об интеграле по произведению множеств. Следствия из основной теоремы.

9. Диффеоморфизм. Леммы о преобразование меры при линейных отображениях и при диффеоморфизмах.
10. Формула замены переменной. Полярные, сферические и цилиндрические координаты.
11. Вариация функции, класс BV. Аддитивность и непрерывность вариации. Критерий Жордана.
12. Определение интеграла Стильеса и его свойства.
13. Условия существования интеграла. Вычисление интеграла Римана-Стилтьеса.
14. Путь, след, начало и конец пути. Длина пути, спрямляемый путь. Критерий спрямляемости Жордана, формулы для вычисления длины. Интегралы вдоль путей.
15. Жордановы кривые и их параметризации. Замена параметра и описание класса параметризаций.
16. Длина и натуральная параметризация.
17. Ориентация. Интегралы вдоль жордановой кривой.
18. Контур: ориентация и интеграл по контуру.
19. Область, линейная связность области. Определение первообразной и ее свойства. Независимость криволинейного интеграла от пути.
20. Условие существования первообразной.
21. Положительная ориентация контура. Теорема (формула Грина).
22. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов.
23. Параметрические поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Площадь поверхности.
24. Ориентация поверхности. Поверхностные интегралы. Поверхности с краем.
25. Формула Стокса.
26. Формула Гаусса-Остроградского.
27. Язык теории поля. Основные теоремы теории поля.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Функциональный анализ	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Изменений не требуется (протокол № 13 от 12.05.2022)
Экстремальные задачи	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Изменений не требуется (протокол № 13 от 12.05.2022)
Вариационное исчисление	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Изменений не требуется (протокол № 13 от 12.05.2022)
Теория функций комплексного переменного	Кафедра теории функций	нет	Изменений не требуется (протокол № 13 от 12.05.2022)
Уравнения математической физики	Кафедра математической кибернетики	нет	Изменений не требуется (протокол № 13 от 12.05.2022)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ  
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры теории функций (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_ г.)

Заведующий кафедрой

Доктор педагогических наук, профессор \_\_\_\_\_ Н.В. Бровка

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

Доктор физико-математических наук \_\_\_\_\_ С.М. Босяков