

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«08» июля 2022 г.

Регистрационный № УД – 11573/уч.

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01

Математика (по направлениям)

направление специальности

1-31 03 01-04

Математика (научно-конструкторская деятельность)

2022 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021, типового учебного плана G31-1-011/пр-тип. от 31.03.2021 и учебного плана G31-1-018/уч. от 25.05.2021.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Ю.М. Метельский, доцент кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТ:

В.В. Лепин, ученый секретарь государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математической кибернетики Белорусского государственного университета
(протокол № 10 от 25.05.2022);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 29.06.2022).

Заведующий кафедрой
математической кибернетики _____ А.Л. Гладков

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Теория графов является одним из наиболее бурно развивающихся разделов дискретной математики, что в значительной степени обусловлено запросами стремительно расширяющейся области приложений. В теоретико-графовых терминах формулируется большое число задач, связанных с дискретными объектами. Такие задачи возникают при проектировании интегральных схем, схем управления и различного рода сетей, при исследовании автоматов, логических цепей, блок-схем программ, в экономике и статистике, теории расписаний и дискретной оптимизации. Фактически, теория графов стала существенной частью математического аппарата кибернетики, языком дискретной математики. В значительной степени через теорию графов происходит ныне проникновение математических методов в науку и технику.

Цели и задачи учебной дисциплины

Целью учебной дисциплины «Избранные главы теории графов» является ознакомление студентов с теми разделами теории графов, которые не представлены в дисциплине «Дискретная математика и теория графов» компонента учреждения высшего образования. В число таких разделов вошли «Графические последовательности», «Ориентированные графы» и «Элементы теории гиперграфов».

Развивающей целью учебной дисциплины является дальнейшее формирование у студентов навыков дискретного математического мышления и умения применять его в конкретных задачах.

Воспитательной целью учебной дисциплины является формирование у студентов математической культуры, а также стремления к получению знаний в области дискретной математики и их использованию при решении актуальных проблем современного общества.

Основными задачами, решаемыми в рамках изучения дисциплины «Избранные главы теории графов», являются изучение терминологии, основных утверждений и методов их доказательства, освоение методов решения типовых задач, а также ознакомление со способами моделирования практических задач в терминах задач из разделов «Графические последовательности», «Ориентированные графы» и «Элементы теории гиперграфов».

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к **дисциплинам специализации** компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами.

Для понимания учебной дисциплины студенту требуется прослушать основной курс теории графов, читаемый в рамках дисциплины «Дискретная

математика и теория графов» из модуля «Дискретная математика и математическая кибернетика» компонента учреждения высшего образования.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Избранные главы теории графов» должно обеспечить формирование следующих универсальных, базовых профессиональных и специализированных компетенций.

универсальные компетенции:

- УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;
- УК-2. Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий;
- УК-4. Работать в команде, толерантно воспринимать социальные, этнические, конфессиональные, культурные и иные различия;
- УК-5. Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;
- УК-6. Проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности.

базовые профессиональные компетенции:

- БПК-4. Применять теоретические знания и навыки в самостоятельной исследовательской деятельности;
- БПК-5. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

специализированные компетенции:

- СК-1. Осуществлять анализ контекста и поставленной проблемы, аргументированно выбирать оптимальный способ ее решения, согласовывать частичные проекты решения в общую согласованную архитектуру, выполнять реализацию проекта с учетом оценки накопленных и поступающих данных;
- СК-5. Применять основные понятия, утверждения и методы решения базовых задач дискретной математики.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать: основные понятия и утверждения из рассматриваемых разделов теории графов;

уметь: доказывать основные утверждения и применять их для решения типовых задач;

владеть: основными методами решения типовых задач из рассматриваемых разделов теории графов.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина «Избранные главы теории графов» изучается в 4-м семестре. Всего на изучение учебной дисциплины отведено:

– для очной формы получения высшего образования– 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы; форма текущей аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Графические последовательности

Тема 1.1. Степенная последовательность графа. Графическая последовательность, связь между ее реализациями. Критерий графичности Гавела-Хаками.

Тема 1.2. Алгоритм построения реализации графической последовательности. Реализации с предписанными свойствами.

Тема 1.3. Расщепляемые графы. Критерий расщепляемости.

Тема 1.4. Пороговые графы, их распознавание и структура.

Тема 1.5. Степенное множество графа.

Раздел 2. Ориентированные графы

Тема 2.1. Ориентированный граф (орграф), основные понятия. Полустепени захода и исхода. Маршруты орграфа и их типы. Различные типы связности орграфа.

Тема 2.2. Сильносвязная компонента. Конденсация орграфа.

Тема 2.3. База орграфа, критерий базы. Ядро орграфа. Достаточное условие существования ядра.

Тема 2.4. Разбиение орграфа на пути. Теорема Галлаи–Милгрэма об оценке минимального числа путей, разбивающих орграф, следствия из нее.

Раздел 3. Элементы теории гиперграфов

Тема 3.1. Понятие гиперграфа. Способы задания гиперграфов. Изоморфизм. Двойственный гиперграф. Вершинная и реберная части гиперграфа. Подгиперграф.

Тема 3.2. Цепь, цикл гиперграфа. Связный гиперграф, связная компонента гиперграфа. Кёнигово представление гиперграфа. Необходимые и достаточные условия ацикличности гиперграфа.

Тема 3.3. Реберный граф гиперграфа и его применение. Теорема Бержа об описании множества гиперграфов, реберные графы которых изоморфны одному и тому же графу.

Тема 3.4. Оценки числа ребер в классах гиперграфов.

Тема 3.5. Критерий существования равномерного гиперграфа с заданной последовательностью степеней вершин.

Тема 3.6. Критерий существования гиперграфа с заданными последовательностями степеней вершин и ребер.

Тема 3.7. Хэллиево и конформное гиперграфы. Двойственность свойств хэллиевости и конформности.

Тема 3.8. Два способа обобщения хроматического числа графа для гиперграфов. Приложения хроматического числа и его оценки.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	Графические последовательности	10	8				2		
1.1	Степенная последовательность графа. Графическая последовательность, связь между ее реализациями. Критерий графичности Гавела-Хакими.	2	2					[1, 2] Устный опрос	
1.2	Алгоритм построения реализации графической последовательности. Реализации с предписанными свойствами.	2	2					[1, 2] Экспресс-опрос	
1.3	Расщепляемые графы. Критерий расщепляемости.	2	2					[1, 2] Устный опрос	
1.4	Пороговые графы, их распознавание и структура.	2	2					[1, 2] Коллоквиум	
1.5	Степенное множество графа.	2					2	[1, 2] Контрольная работа № 1 по разделу 1	
2	Ориентированные графы	8	8						
2.1	Ориентированный граф (орграф), основные понятия. Полуустепени захода и исхода. Маршруты орграфа и их типы. Различные типы связности орграфа.	2	2					[1, 2] Устный опрос	

2.2	Сильносвязная компонента. Конденсация орграфа.	2	2					[1, 2]	Экспресс-опрос
2.3	База орграфа, критерий базы. Ядро орграфа. Достаточное условие существования ядра.	2	2					[1, 2]	Устный опрос
2.4	Разбиение орграфа на пути. Теорема Галлаи–Милгрэма об оценке минимального числа путей, разбивающих орграф, следствия из нее.	2	2					[1, 2]	Экспресс-опрос
3	Элементы теории гиперграфов	16	14				2		
3.1	Понятие гиперграфа. Способы задания гиперграфов. Изоморфизм. Двойственный гиперграф. Вершинная и реберная части гиперграфа. Подгиперграф.	2	2					[1, 2]	Устный опрос
3.2	Цепь, цикл гиперграфа. Связный гиперграф, связная компонента гиперграфа. Кёнигово представление гиперграфа. Необходимые и достаточные условия ацикличности гиперграфа.	2	2					[1, 2]	Экспресс-опрос
3.3	Реберный граф гиперграфа и его применение. Теорема Бержа об описании множества гиперграфов, реберные графы которых изоморфны одному и тому же графу.	2	2					[1, 2]	Устный опрос
3.4	Оценки числа ребер в классах гиперграфов.	2	2					[1, 2]	Экспресс-опрос
3.5	Критерий существования равномерного гиперграфа с заданной последовательностью степеней вершин.	2	2					[1, 2]	Устный опрос
3.6	Критерий существования гиперграфа с заданными последовательностями степеней вершин и ребер.	2	2					[1, 2]	Экспресс-опрос
3.7	Хэллиев и конформный гиперграф. Двойственность свойств хэллиевости и конформности.	2	2					[1, 2]	Коллоквиум
3.8	Два способа обобщения хроматического числа графа для гиперграфов. Приложения хроматического числа и его оценки.	2					2	[1, 2]	Контрольная работа № 2 по разделам 2, 3
	ИТОГО	34	30				4		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Лекции по теории графов: учеб. пособие для студ., обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" / В.А. Емеличев [и др.]. – Изд. стер. – Москва: URSS: ЛЕНАНД, 2017. – 383 с.
2. Теория графов в задачах и упражнениях. Более 200 задач с подробными решениями / В.А. Емеличев [и др.]. – Изд. стер. – Москва: URSS: Либроком, 2016. – 415 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Дистель Р. Теория графов: Пер. с англ. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. – 336 с.
2. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Вузовская книга, 2004. – 664 с.
3. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
4. Татт У. Теория графов. М.: – Мир, 1988. – 424 с.
5. Харари Ф. Теория графов: Пер с англ. – Изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

С целью текущего контроля знаний студентов предусматривается проведение устных опросов, экспресс-опросов, коллоквиума и контрольных работ.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Избранные главы теории графов» учебным планом предусмотрен **зачет**.

Итоговая отметка формируется на основе:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.).

2. Положения о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в БГУ (Приказ ректора БГУ от 31.03.2020 № 189-ОД).

3. Критерии оценки результатов учебной деятельности обучающихся в учреждениях высшего образования по десятибалльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 28.05.2013 г. № 09-10/53-ПО).

Формирование отметки за текущую успеваемость:

– устный опрос – 17 %;

- экспресс-опрос – 17 %;
- коллоквиум – 33 %;
- контрольная работа – 33 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Раздел 1. Графические последовательности

Примерный перечень заданий

1. Доказать, что вершины порогового графа можно занумеровать так, чтобы замкнутое окружение $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ каждой вершины v содержало окружения $N(v)$ всех вершин с меньшими номерами.
2. Доказать, что граф G является пороговым тогда и только тогда, когда для любого его подмножества $S \subseteq V(G)$ существует такая вершина $v \in S$, которая либо смежна со всеми вершинами из $S \setminus \{v\}$, либо не смежна ни с одной из них.

Форма контроля – контрольная работа № 1 по разделу 1.

Раздел 2. Ориентированные графы

Раздел 3. Элементы теории гиперграфов

Примерный перечень заданий

1. Как может измениться хроматическое число гиперграфа после удаления:
 - a) ребра;
 - b) вершины, не инцидентной ребру степени 2? Ответ обосновать.
2. Доказать, что гиперграф является 2-раскрашиваемым, если он не содержит циклов нечетной длины. Верно ли обратное утверждение? Ответ обосновать.

Форма контроля – контрольная работа № 2 по разделам 2, 3.

Примерная тематика контрольных работ

- Контрольная работа № 1. «Графические последовательности: распознавание графичности правильной последовательности; построение реализации с предписанными свойствами для графической последовательности; распознавание расщепляемых графов и расщепляемых последовательностей; распознавание пороговых графов и построение разделяющего неравенства; построение порогового графа минимального порядка с предписанным степенным множеством».
- Контрольная работа № 2. «Ориентированные графы: выделение сильносвязных компонент орграфа и построение его конденсации; нахождение всех баз и ядра орграфа. Элементы теории гиперграфов: решение задач на начальные понятия теории гиперграфов; построение

гиперграфа, реберный граф которого изоморфен заданному графу; построение гиперграфа по заданной последовательности степеней вершин и/или ребер; задачи на свойства хэллиевости и конформности; оценки хроматического числа гиперграфа».

Примерная тематика практических занятий

1. Задачи на использование связи между различными реализациями графической последовательности.
2. Распознавание графичности правильной последовательности и построения некоторой ее реализации. Реализуемость правильной последовательности графами с некоторыми предписанными свойствами («быть связным графом», «быть деревом»).
3. Распознавание расщепляемых графов и расщепляемых графических последовательностей.
4. Распознавание пороговых графов и построение соответствующих разделяющих неравенств.
5. Построение порогового графа минимального порядка с предписанным степенным множеством.
6. Разбор основных понятий и элементов орграфа. Решение задач на распознавание различных типов связности орграфа.
7. Выделение сильносвязных компонент орграфа и построение его конденсации.
8. Построение всех баз орграфа, нахождение его ядра.
9. Задачи на использование теоремы Галлаи–Милгрэма.
10. Разбор первоначальных понятий теории гиперграфов.
11. Задачи на использование необходимых и достаточных условий ацикличности гиперграфа.
12. Построение реберного графа гиперграфа. Восстановление гиперграфа, реберный граф которого изоморфен заданному графу.
13. Задачи на оценки числа ребер в классах гиперграфов.
14. Распознавание существования равномерного гиперграфа и его построение по заданной последовательности степеней вершин.
15. Распознавание существования гиперграфа и его построение по заданным последовательностям степеней вершин и ребер.
16. Распознавание хэллиевых и конформных гиперграфов.
17. Задачи на оценки хроматического числа гиперграфа.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает:

- осуществление студентами личностно-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

Наиболее эффективной предполагается следующая форма реализации эвристического подхода: доказательства громоздких теорем, а также решения сложных задач разбиваются на этапы, после чего обучаемые подводятся к самостоятельному определению действий на этапах.

При организации образовательного процесса используется также *практико-ориентированный подход*, который предполагает:

- освоение содержания образования через решение практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по индивидуально заданной теме дисциплины;
- выполнение домашнего задания;
- проведение научно-исследовательских работ;
- подготовка к участию в научных и научно-практических конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Понятие переключения. Связь между различными реализациями графической последовательности.
2. Производная последовательность. Критерий Гавела–Хаками графичности правильной последовательности.
3. Распознавание графичности правильной последовательности и построение одной из ее реализаций с помощью l -процедуры.
4. Построение реализаций с предписанными свойствами с помощью l -процедуры.
5. Расщепляемый граф. Критерий расщепляемости графической последовательности.
6. Пороговый граф. Распознавание и структура пороговых графов.
7. Степенное множество графа.
8. Ориентированный граф, основные понятия. Полустепени захода и исхода.
9. Маршруты орграфа и их типы. Различные типы связности орграфа и их характеристикация.
10. Сильносвязная компонента орграфа. Конденсация орграфа.
11. База орграфа. Критерий базы.
12. Ядро орграфа. Достаточное условие существования ядра.
13. Разбиение орграфа на пути. Теорема Галлаи–Милгрэма об оценке минимального числа путей, разбивающих орграф, следствия из нее.
14. Гиперграф и его элементы. Способы задания гиперграфов. Изоморфизм. Двойственный гиперграф.
15. Вершинная и реберная части гиперграфа. Подгиперграф.
16. Цепь, цикл гиперграфа. Связный гиперграф, связная компонента гиперграфа. Кёнигово представление гиперграфа.
17. Необходимые и достаточные условия ацикличности гиперграфа.
18. Реберный граф гиперграфа и его применение. Теорема Бержа об описании множества гиперграфов, реберные графы которых изоморфны одному и тому же графу.
19. Оценки числа ребер в классах гиперграфов.
20. Критерий существования равномерного гиперграфа с заданной последовательностью степеней вершин.
21. Критерий существования гиперграфа с заданными последовательностями степеней вершин и ребер.
22. Хэллиев и конформный гиперграф. Двойственность свойств хэллиевости и конформности.
23. Два способа обобщения хроматического числа графа для гиперграфов. Приложения хроматического числа и его оценки.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
на ____ / ____ учебный год

№№ ПП	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры математической кибернетики (протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой
доктор физ.-мат. наук, профессор

А.Л. Гладков

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
доктор физ.-мат. наук, доцент

С.М. Босяков