УДК 339.194

C. Математические и количественные методы
C. Mathematical and Quantitative Methods

МОДЕЛЬ ТОВАРНОГО РЫНКА С ИНФОРМАЦИЕЙ О ТЕНДЕНЦИИ ЦЕН: ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Б. С. КАЛИТИН[1]***, Н. В. НОВИКОВА***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается дискретная модель рынка с заданными функциями спроса и предложения, где поведение производителей и потребителей может основываться на информации о тенденции цен на товары или услуги. Выводятся условия параметров модели, при выполнении которых экономическое равновесие существует и является единственным.

Ключевые слова: линейная дискретная модель спроса и предложения; экономическое равновесие.

MODEL OF THE COMMODITY MARKET WITH INFORMATION ABOUT PRICE TRENDS: LIMITING CASES

B. S. KALITINE[a]***, N. V. NOVIKOVA***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: N. V. Novikova (novikovanv@bsu.by)

A discrete market model with given supply and demand functions is considered, provided that the behaviour of producers and consumers can be based on information about the tendency of prices of goods or services. The conditions concerning the parameters of the model, under which an economic equilibrium exists and is unique, are derived.

Keywords: linear discrete model of supply and demand; economic equilibrium.

Введение

Статьи [1; 2] посвящены исследованию поведения основных участников рыночных отношений (производителей и потребителей) при условии обладания ими информацией о тенденции цен на представляемые товары или услуги. В этих работах изучены экономические ситуации, при которых покупатели и продавцы либо активно, либо пассивно реагируют на известное им грядущее изменение цен.

Образец цитирования:
Калитин БС, Новикова НВ. Модель товарного рынка с информацией о тенденции цен: предельные случаи. *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика*. 2022;2:30–36.

For citation:
Kalitine BS, Novikova NV. Model of the commodity market with information about price trends: limiting cases. *Journal of the Belarusian State University. Economics.* 2022;2:30–36. Russian.

Авторы:
Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.
Наталья Владимировна Новикова – старший преподаватель кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Authors:
Boris S. Kalitine, PhD (physics and mathematics), docent; professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economics.
kalitine@bsu.by
Natalia V. Novikova, senior lecturer at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economics.
novikovanv@bsu.by

Публикации основываются на предварительном построении дискретной экономико-математической модели, зависящей от четырех параметров конъюнктуры рынка, с линейными функциями спроса и предложения, отражающими взаимодействие покупателей и продавцов как субъектов рыночных отношений. Два параметра изучаемой модели (в соответствии с классической паутинообразной моделью первого порядка [3, p. 37]) характеризуют уровень реакции на цену товара покупателей и продавца соответственно, а другие два параметра описывают шкалу уровней реакции покупателей и продавцов на развитие цен. Выделены и рассмотрены случаи активной [1] и пассивной [2] реакций субъектов рынка на доступную информацию о предстоящей динамике цен. Основной предпосылкой обеспечения возможных равновесий экономической системы является выполнение равенства функций спроса и предложения в дискретные моменты. В таких условиях функционирования рынка благ дан полный анализ проблем существования, единственности и устойчивости рыночного равновесия. Представлена соответствующая экономическая иллюстрация полученных результатов. Общий вывод работ [1; 2] говорит о том, что наличие доступной информации о тенденции цен способно существенно влиять на совершение торговых сделок при достижении рыночного компромисса.

Настоящая статья является продолжением работ [1; 2] и направлена на рассмотрение предельных случаев значений тех параметров модели, которые соответствуют бифуркации уровня реакции производителей и потребителей на динамику цен. Для изучения экономической ситуации предельных случаев применяется дискретная математическая модель, подробно описанная в публикации [1]. Полученные результаты исследований по проблемам устойчивости рынка примыкают к выводам, сделанным в статье [4]. В отличие от работы, нацеленной на рассмотрение классической модели [3, p. 37], в публикации [4] представлен анализ рыночной модели спроса и предложения в контексте дополнительных условий в нем (наличие рамок допустимых цен).

Постановка задачи

Рассмотрим дискретную модель товарного рынка, выведенную в работах [1; 2] с учетом интервала допустимых цен. Модель представлена выражениями функции спроса $D(t)$ и функции предложения $S(t)$ на последовательных периодах времени ($t = 1, 2, 3, \ldots$), где

$$\begin{aligned} D(t) &= b\left(\alpha p(t+1) - p(t)\right) - b\left(\alpha p^{**} - p^{*}\right),\ \ b > 0,\ 0 < \alpha < 1; \\ S(t) &= -b_1\left(\beta p(t+1) - p(t)\right) + b_1\left(\beta p^{*} - p^{**}\right),\ b_1 > 0,\ 0 < \beta < 1, \end{aligned} \tag{1}$$

здесь $p(t)$ – наблюдаемая цена рынка в момент t. В настоящей статье используются следующие символы: p^0 – равновесная цена; p^* – нижнее пороговое значение цены; p^{**} – верхнее потолочное значение цены; $p^* \le p \le p^{**}$ – интервал допустимых цен рынка.

Коэффициенты b и b_1 означают уровень реакции на цену товара покупателей и продавцов соответственно. Роли неотрицательных коэффициентов α и β состоят в оценке уровня реакции покупателей и продавцов на развитие цен. Если $\alpha > 1$, $\beta > 1$, то реакция является активной, а если $0 < \alpha < 1$, то она является пассивной. Критические значения коэффициентов $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ ($\beta = 0$ или $\beta = 1$ соответственно) в совокупности с условием $0 < \beta < 1$ ($0 < \alpha < 1$ соответственно) порождают несколько возможных комбинаций для изучения динамики цен. Настоящая работа посвящена анализу поведения продавцов и покупателей на рынке с различными комбинациями коэффициентов α и β. Рассматривается аналитическое исследование двух критических ситуаций. Экономическое поведение в оставшихся вариантах является симметричным, и результаты легко выводятся по аналогии с первыми двумя ситуациями.

В качестве объектов изучения выступает наблюдаемая во времени функция цены $p(t)$ товара или услуги, удовлетворяющая уравнению равенства функций спроса и предложения, а также равновесная цена $p = p^0$, которые принадлежат замкнутому интервалу цен $[p^*, p^{**}]$. Наличие ограничительного интервала, а именно $p^* < p(t) < p^{**}$ и $p < p^0 < p^{**}$, отличает данную постановку задачи по исследованию динамики рыночных цен от общепринятой традиционной постановки задач такого типа [3].

Далее понятия «сегодня» и «завтра» соответствуют временным моментам t и $t + 1$.

Предельный случай $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1$

Рассмотрим модель (1) при $\beta = 1$. Пусть

$$\begin{aligned} D(t) &= b\left(\alpha p(t+1) - p(t)\right) - b\left(\alpha p^{**} - p^{**}\right),\ 0 < \alpha < 1; \\ S(t) &= -b_1\left(p(t+1) - p(t)\right) - b_1 p. \end{aligned} \tag{2}$$

Поясним экономическую роль коэффициента α в отражении реакции покупателей на развитие цен. Из представления (2) следует, что чем ближе величина α к значению 1, т. е. чем больше $\alpha p(t+1) - p(t)$, тем быстрее покупатели реагируют на предстоящее изменение цен. Кроме того, когда цена убывает, то $p(t+1) - p(t) < 0$, и поэтому $\alpha p(t+1) - p(t) < 0$. В этом случае покупательский спрос немедленно уменьшается.

Когда цена поднимается, т. е. когда $p(t+1) - p(t) > 0$, возможны два сценария. В первом варианте выполняется неравенство $\alpha p(t+1) - p(t) < 0$. Покупатели не сразу увеличивают спрос «сегодня», а могут готовиться к такому действию до выполнения возможного равенства $\alpha p(t+1) - p(t) = 0$. Во втором случае тенденция подъема цены становится ощутимой, т. е. $\alpha p(t+1) - p(t) > 0$. Покупатели активно приступают к стратегии увеличения спроса.

Что касается продавцов, то согласно модели (2) происходит следующее. Отрицательный коэффициент $-b_1 < 0$ в слагаемом $-b_1(p(t+1) - p(t))$ величины предложения означает, что обладание продавцами информацией о тенденции цен на «завтра» способствует уменьшению предложения «сегодня» при росте цен и увеличению предложения «сегодня» в случае предстоящего снижения цен.

Запишем предполагаемое равенство спроса и предложения:

$$-b(\alpha p(t+1) - p(t)) + b(\alpha p^{**} - p^*) = b_1(p(t+1) - p(t)) + b_1 P.$$

Отсюда относительно переменной $p = p(t)$ получаем рекуррентное соотношение

$$p(t+1) - \frac{b + b_1}{\alpha b + b_1} p(t) = \frac{(b_1 - b)p^* + (b\alpha - b_1)p^*}{\alpha b + b_1}, \; t = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

что определяет искомую модель как линейное дискретное неоднородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. В работе [1] для уравнения типа (3) представлена формула экономического равновесия $p = p^0$, из которой для рассматриваемого случая $\beta = 1$ получаем

$$p^0 = \frac{(b - b_1)p^* + (b_1 - b\alpha)p^*}{(1 - \alpha)b}. \tag{4}$$

Более того, в статье [1] сформулированы необходимые и достаточные условия возможности существования и единственности экономического равновесия. Для случая $\beta = 1$ это равносильно условию

$$\alpha \le \frac{b_1}{b} \le 1. \tag{5}$$

Отсюда, в частности, получаем, что модель не обладает экономическим равновесием в каждом из следующих случаев: $\frac{b_1}{b} < \alpha$ или $b_1 > b$.

Проанализируем варианты расположения равновесия $p = p^0$ на интервале допустимых цен и вне его. Перепишем формулу (4) в виде соотношений

$$p^0(x) = \frac{(1 - x)p^* + (x - \alpha)p^{**}}{1 - \alpha} = \frac{xP + p^* - \alpha p^{**}}{1 - \alpha}, \; x > 0, \tag{6}$$

где для простоты положено

$$x = \frac{b_1}{b}, \; P = p^{**} - p^*.$$

Очевидно, что $p^0(x)$ является линейной возрастающей функцией переменной x. Из равенства (6) для данной модели получаем следующие свойства:

$$p^0(0) = \frac{p^* - \alpha p^*}{1 - \alpha}; \; p^0(\alpha) = p^*, \; p^0(1) = p^{**};$$

$$p^0(x) = 0 \text{ при } x = \frac{\alpha p^{**} - p^*}{P}; \; p^0 = p^* \text{ при } \frac{b_1}{b} = \alpha;$$

$$p^* < p^0 < \frac{p^* + p^{**}}{2} \text{ при } \frac{b_1}{b} < \frac{\alpha + 1}{2};\ p^0 = \frac{p^* + p^{**}}{2} \text{ при } \frac{b_1}{b} = \frac{\alpha + 1}{2};$$
$$\frac{p^* + p^{**}}{2} < p^0 < p^{**} \text{ при } \frac{\alpha + 1}{2} < \frac{b_1}{b};\ p^0 = p^{**} \text{ при } \frac{b_1}{b} = 1.$$

Проанализируем зависимость равновесия p^0 от параметров b и b_1. Равновесие p^0 уменьшается при увеличении коэффициента b, и оно увеличивается при увеличении коэффициента b_1.

Общий вид решения $p(t)$ уравнения (3) можно представить выражением

$$p(t) = \left(\frac{b + b_1}{\alpha b + b_1}\right)^t \left(p(0) - p^0\right) + p^0, \qquad (7)$$

где равновесие p^0 определяется формулой (6).

Так как при $0 < \alpha < 1$ имеет место неравенство

$$\frac{b + b_1}{\alpha b + b_1} > 1,$$

то решение (7) удаляется от равновесия $p = p^0$ регулярным образом (либо монотонно убывая, либо монотонно возрастая). Значит, экономическое равновесие всегда неустойчиво.

Опираясь на проведенные исследования (в частности, на соотношения (1)–(4)), приведем схему графика функции равновесия $p^0(x)$ в зависимости от аргумента $x = \frac{b_1}{b}$ (рис. 1). На рис. 1 сплошной полужирной линией отмечено множество неустойчивых экономических равновесий, а пунктирной полужирной линией – множество неустойчивых равновесий дискретного уравнения (3).

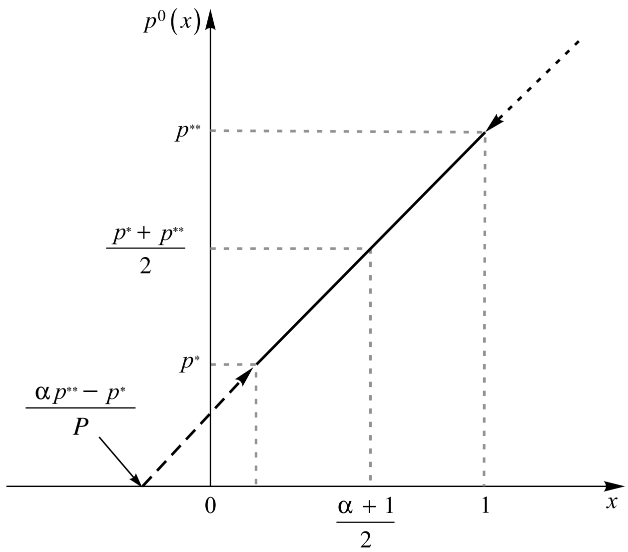

Рис. 1. График множества равновесий для случая $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1$, где $x = \frac{b_1}{b}$

Fig. 1. The graph of the set of equilibria for the case of $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1$, where $x = \frac{b_1}{b}$

Согласно представленному графику рынок такой модели неустойчив. При этом функция цены $p(t)$ удаляется от экономического равновесия p^0 с ростом времени t регулярным образом: она монотонно убывает, если начальная цена меньше равновесной $p(0) < p^0$, и монотонно возрастает при начальной цене больше равновесной $p(0) > p^0$.

Вырожденный случай $\alpha = 0$, $\beta = 1$

Рассмотрим предельный случай модели (1), когда $\alpha = 0$, $\beta = 1$, т. е. когда спрос и предложение определяются соответственно следующими формулами:

$$D(t) = -bp(t) + bp^*;$$
$$S(t) = -b_1\left(p(t + 1) - p(t)\right) + b_1\left(\beta p^* - p^{**}\right). \qquad (8)$$

Для функции спроса, где угловой коэффициент $-b < 0$, данный случай характеризуется тем, что с ростом цены $p(t)$ спрос потребителей падает. Это так называемый нормальный случай поведения потребителей на рынке при отсутствии информации о тенденции цен.

Кроме того, если цена убывает, то $p(t+1) - p(t) < 0$, поэтому продавцы немедленно увеличивают предложение.

Когда цена поднимается, т. е. при $p(t+1) - p(t) > 0$, то продавцы активно уменьшают предложение.

На основании (8) запишем предполагаемое равенство спроса и предложения. Так,

$$bp(t) - bp^* = b_1\big(p(t+1) - p(t)\big) + b_1P.$$

Отсюда относительно переменной $p = p(t)$ получаем рекуррентное уравнение

$$p(t+1) - \frac{b + b_1}{b_1}p(t) = -\frac{bp^* + b_1P}{b_1} \tag{9}$$

для дискретных значений времени ($t = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

В результате приходим к экономико-математической модели динамики рыночных цен $p(t)$ в моменты $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ в виде линейного дискретного неоднородного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами.

На основании (5) экономическое равновесие существует и является единственным только тогда, когда выполняется условие

$$b_1 \le b,$$

и это равновесие определяется равенством

$$p^0 = \frac{bp^* + b_1P}{b}. \tag{10}$$

Из этого, в частности, получаем, что при выполнении неравенства $b_1 > b$ модель не обладает экономическим равновесием.

Проанализируем варианты расположения равновесия $p = p^0$ на интервале допустимых цен и вне его. Аналогично предыдущим рассуждениям подставим в формулу (11) $x = \frac{b_1}{b}$ и преобразуем ее:

$$p^0(x) = (1 - x)p^* + xp^{**} = p^* + xP. \tag{11}$$

Отсюда видим, что функция равновесия является линейной по x и возрастающей.

Из условий (10) для данной модели получаем следующие равенства:

$$p^0(0) = p^*,\ p^0(\alpha) = p^*,\ p^0(1) = p^{**},$$

$$p^0(x) = 0 \text{ при } x = \frac{-p^*}{P}.$$

Можно сделать вывод о том, что с ростом величины $\frac{b_1}{b}$ равновесие возрастает и становится больше, чем p^{**}.

Из соотношений (11) приходим к некоторым результатам:

$$p^0 \to p^* \text{ при } \frac{b_1}{b} \to 0;$$

$$p^* < p^0 < \frac{p^* + p^{**}}{2} \text{ при } \frac{b_1}{b} < \frac{1}{2};$$

$$p^0 = \frac{p^* + p^{**}}{2} \text{ при } \frac{b_1}{b} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{p^* + p^{**}}{2} < p^0 < p^{**} \text{ при } \frac{1}{2} < \frac{b_1}{b};$$

$$p^0 = p^{**} \text{ при } \frac{b_1}{b} = 1.$$

Равновесие p^0 уменьшается при увеличении коэффициента b, и оно увеличивается при увеличении коэффициента b_1.

Для рассматриваемого случая $\alpha = 0$, $\beta = 1$ общее решение дискретного уравнения (9) принимает вид

$$p(t) = \left(\frac{b + b_1}{b_1}\right)^t \left(p(0) - p^0\right) + p^0, \tag{12}$$

где равновесие p^0 определяется формулой (11).

Так как очевидно выполняется неравенство

$$\frac{b + b_1}{b_1} > 1,$$

то решение (12) удаляется от равновесия $p = p^0$. Значит, экономическое равновесие всегда неустойчиво.

Согласно установленным свойствам на рис. 2 приведена схема графика функции равновесия $p^0(x)$ в зависимости от аргумента $x = \dfrac{b_1}{b}$. Сплошной полужирной линией отмечено множество неустойчивых экономических равновесий, а пунктирной полужирной линией – множество неустойчивых равновесий дискретного уравнения (9).

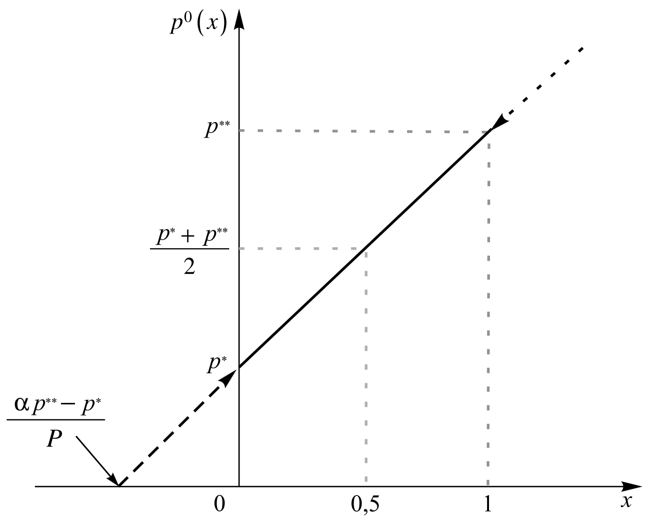

Рис. 2. График множества равновесий для случая $\alpha = 0$, $\beta = 1$

Fig. 2. Equilibrium set graph for the case $\alpha = 0$, $\beta = 1$

Результаты исследований относительно оставшихся неизученных граничных случаев работ [1; 2] получаются аналогичным образом. Оставляя эти исследования за рамками данной статьи, составим лишь перечень их результатов, которые поместим в следующую таблицу.

Классификация предельных случаев

Classification of limit cases

№ п/п	Параметры α и β	Характеристика	Условия существования экономического равновесия	Характеристика экономического равновесия
1	$\alpha > 0$, $\beta > 1$	Активная реакция	$\frac{1}{\beta} \le \frac{b_1}{b} \le \alpha$	Асимптотически устойчивое
2	$\alpha = 0$, $\beta > 1$	Активная реакция продавцов	$\frac{1}{\beta} \le \frac{b_1}{b} \le 1$	Асимптотически устойчивое
3	$\alpha > 1$, $\beta = 1$	Активная реакция покупателей	$1 \le \frac{b_1}{b} \le \alpha$	Асимптотически устойчивое
4	$\alpha = 1$, $\beta = 1$	Нейтральная реакция покупателей и продавцов	$b = b_1$	Устойчивое
5	$0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$	Пассивная реакция	$\alpha \le \frac{b_1}{b} \le \frac{1}{\beta}$	Неустойчивое

Окончание таблицы
Ending table

№ п/п	Параметры α и β	Характеристика	Условия существования экономического равновесия	Характеристика экономического равновесия
6	$0 < \alpha < 1$, $\beta = 1$	Вялая реакция покупателей	$\alpha \le \frac{b_1}{b} \le 1$	Неустойчивое
7	$\alpha = 1$, $0 < \beta < 1$	Вялая реакция продавцов	$1 \le \frac{b_1}{b} \le \frac{1}{\beta}$	Неустойчивое
8	$\alpha = 0$, $\beta = 1$	Нулевая реакция продавцов	$b \le b_1$	Неустойчивое
9	$\alpha = 1$, $\beta = 0$	Нулевая реакция покупателей	$b \ge b_1$	Неустойчивое

Заключение

Полученные результаты аналитического исследования вкупе с выводами, сделанными в работах [1; 2], относительно активной (при $\alpha > 0$, $\beta > 1$) и неактивной (при $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$) реакций продавцов и покупателей на информацию о тенденции рыночных цен позволяют построить следующие умозаключения. Вялое реагирование потребителей и производителей на грядущее изменение цен (в соответствии с законом спроса и предложения) приводит к неустойчивости паритетного равновесия рыночных цен. И наоборот, активное реагирование на изменение цен способствует асимптотической устойчивости паритетного равновесия рыночных цен. Граничным (бифуркационным) значением с сохранением неасимптотической устойчивости является ситуация $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Ниже граничных значений устойчивости нет, а выше этих значений устойчивость достаточно сильная, асимптотическая.

Библиографические ссылки

1. Калитин БС, Новикова НВ. Модель товарного рынка с функциями спроса и предложения. В: Кравцов МК, редактор. *Экономика, моделирование, прогнозирование. Выпуск 13.* Минск: НИЭИ Министерства экономики Республики Беларусь; 2019. с. 163–170.

2. Калитин БС, Новикова НВ. Модель товарного рынка с пассивной реакцией на рост цен. В: Кравцов МК, редактор. *Экономика, моделирование, прогнозирование. Выпуск 15.* Минск: НИЭИ Министерства экономики Республики Беларусь; 2021. с. 159–164.

3. Gandolfo G. First-order difference equation in economic models. In: Gandolfo G. *Economic dynamics*. North-Holland: Springer; 2010. p. 37–54.

4. Калитин БС. Еще раз о паутинообразной модели рынка. В: Червяков АВ, редактор. *Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития. Материалы XIV Международной научной конференции; 24–25 октября 2013 г.; Минск, Беларусь. Том 3.* Минск: НИЭИ Министерства экономики Республики Беларусь; 2013. с. 198–200.

References

1. Kalitine BS, Novikova NV. [Model of commodity market with functions of demand and supply]. In: Kravtsov MK, editor. *Ekonomika, modelirovanie, prognozirovanie. Vypusk 13* [Economics, modeling, forecasting. Issue 13]. Minsk: The Economy Research Institut of the Ministry of Economy of the Republic of Belarus; 2019. p. 163–170. Russian.

2. Kalitine BS, Novikova NV. [Model of the commodity market with passive reaction to price growth]. In: Kravtsov MK, editor. *Ekonomika, modelirovanie, prognozirovanie. Vypusk 15* [Economics, modeling, forecasting. Issue 15]. Minsk: The Economy Research Institut of the Ministry of Economy of the Republic of Belarus; 2021. p. 159–164. Russian.

3. Gandolfo G. First-order difference equation in economic models. In: Gandolfo G. *Economic dynamics*. North-Holland: Springer; 2010. p. 37–54.

4. Kalitine BS. [Once again about the spider-like model of the market]. In: Chervyakov AV, editor. *Problemy prognozirovaniya i gosudarstvennogo regulirovaniya sotsial'no-ekonomicheskogo razvitiya. Materialy XIV Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii; 24–25 oktyabrya 2013 g.; Minsk, Belarus'. Tom 3* [Problems of forecasting and state regulation of socio-economic development. Proceedings of the 14th International scientific conference; 2013 October 24–25; Minsk, Belarus. Volume 3]. Minsk: The Economy Research Institut of the Ministry of Economy of the Republic of Belarus; 2013. p. 198–200. Russian.

Статья поступила в редколлегию 04.10.2022.
Received by editorial board 04.10.2022.