

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям
О.Г. Прохоренко
«08» июля 2022 г.

Регистрационный № УД – 11518/уч.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 02

Механика и математическое моделирование

2022 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 02-2021, типового учебного плана № G31-1-025/пр. тип. от 30.06.2021, учебных планов: №G31-1-029/уч. от 30.06.2021, №G31-1-209/уч. от 22.03.2022.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Ю.М. Метельский, доцент кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТ:

В.В. Лепин, ученый секретарь государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математической кибернетики Белорусского государственного университета
(протокол № 10 от 25.05.2022);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 29.06.2022).

Заведующий кафедрой
математической кибернетики _____ А.Л. Гладков

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Теория графов является одним из наиболее бурно развивающихся разделов дискретной математики, что в значительной степени обусловлено запросами стремительно расширяющейся области приложений. В теоретико-графовых терминах формулируется большое число задач, связанных с дискретными объектами. Такие задачи возникают при проектировании интегральных схем, схем управления и различного рода сетей, при исследовании автоматов, логических цепей, блок-схем программ, в экономике и статистике, теории расписаний и дискретной оптимизации. Фактически, теория графов стала существенной частью математического аппарата кибернетики, языком дискретной математики. В значительной степени через теорию графов происходит ныне проникновение математических методов в науку и технику.

Цели и задачи учебной дисциплины

Целью учебной дисциплины «Теория графов» является обучение студентов базовым разделам теории графов, методам использования графов при решении прикладных задач.

Развивающей целью учебной дисциплины является формирование у студентов навыков дискретного математического мышления и умения применять его в конкретных задачах.

Воспитательной целью учебной дисциплины является формирование у студентов математической культуры, а также стремления к получению знаний в области дискретной математики и их использованию при решении актуальных проблем современного общества.

Основными задачами, решаемыми в рамках изучения дисциплины «Теория графов», являются изучение терминологии, основных утверждений и методов их доказательства, освоение методов решения типовых задач, а также ознакомление со способами моделирования практических задач в терминах задач из теории графов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к **дополнительным видам обучения**.

Связи с другими учебными дисциплинами.

Для понимания учебной дисциплины студенту требуется минимум предварительных математических знаний и навыков. В частности, нужно иметь самые начальные сведения из общей теории отображений, теории множеств и линейной алгебры, которые даются в учебных дисциплинах «Математический анализ» и «Алгебра» государственного компонента.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Теория графов» должно обеспечить формирование следующих универсальных, базовых профессиональных и специализированных компетенций.

универсальные компетенции:

- УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;
- УК-4. Работать в команде, толерантно воспринимать социальные, этнические, конфессиональные, культурные и иные различия;
- УК-5. Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;
- УК-6. Проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности;

базовые профессиональные компетенции:

- БПК-1. Применять основные законы и методы естественнонаучных дисциплин для решения теоретических и практических задач в профессиональной деятельности;
- БПК-10. Применять теоретические знания и навыки в самостоятельной исследовательской деятельности;

специализированные компетенции:

- СК-4. Применять математический аппарат при исследовании задач механики.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать: основные понятия и утверждения из рассматриваемых разделов теории графов;

уметь: доказывать основные утверждения и применять их для решения типовых задач;

владеть: основными методами решения типовых задач из рассматриваемых разделов теории графов.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 3 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Теория графов» отведено:

- для очной формы получения высшего образования – 90 часов, в том числе 46 аудиторных часов, из них: лекции – 16 часов, практические занятия – 26 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Форма текущей аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Элементы теории графов

Тема 1.1. Первоначальные понятия теории графов. Способы задания графов. Лемма о рукопожатиях. Помеченный граф. Изоморфизм.

Тема 1.2. Операции над графами. Подграфы. Маршруты, их типы и основные свойства. Связная компонента. Число связных компонент в графе, полученном после удаления ребра из связного графа.

Тема 1.3. Число ребер в графе с фиксированными числами вершин и связных компонент. Двудольные графы. Критерий двудольности Кёнига.

Тема 1.4. Эквивалентные определения дерева. Остов графа, его свойства.

Тема 1.5. Эйлеровы графы. Необходимое и достаточное условие эйлеровости. Гамильтоновы графы. Достаточные условия гамильтоновости графа.

Раздел 2. Экстремальные задачи на графах

Тема 2.1. Построение остовного дерева минимального веса. Алгоритм Краскала.

Тема 2.2. Нахождение путей минимального веса от фиксированной вершины до всех остальных в ориентированном графе. Алгоритм Дейкстры.

Тема 2.3. Потоки и разрезы в сетях. Теорема Форда–Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе, следствия из нее. Алгоритм построения максимального потока в сети.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	Элементы теории графов	10	16				2		
1.1	Первоначальные понятия теории графов. Способы задания графов. Лемма о рукопожатиях. Помеченный граф. Изоморфизм.	2	4					[1, 2] Устный опрос	
1.2	Операции над графами. Подграфы. Маршруты, их типы и основные свойства. Связная компонента. Число связных компонент в графе, полученном после удаления ребра из связного графа.	2	2					[1, 2] Экспресс-опрос	
1.3	Число ребер в графе с фиксированными числами вершин и связных компонент. Двудольные графы. Критерий двудольности Кёнига.	2	4					[1, 2] Устный опрос	
1.4	Эквивалентные определения дерева. Остов графа, его свойства.	2	4					[1, 2] Экспресс-опрос	
1.5	Эйлеровы графы. Необходимое и достаточное условие эйлеровости. Гамильтоновы графы. Достаточные условия гамильтоновости графа.	2	2				2	[1, 2] Контрольная работа № 1 по разделу 1	

2	Экстремальные задачи на графах	6	10				2		
2.1	Построение остовного дерева минимального веса. Алгоритм Краскала.	2	4					[1, 2]	Устный опрос
2.2	Нахождение путей минимального веса от фиксированной вершины до всех остальных в ориентированном графе. Алгоритм Дейкстры.	2	4					[1, 2]	Коллоквиум
2.3	Потоки и разрезы в сетях. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе, следствия из нее. Алгоритм Форда–Фалкерсона построения максимального потока в сети.	2	2				2	[1, 2]	Контрольная работа № 2 по разделу 2
	ИТОГО	16	26				4		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. (Изд. второе, исправленное.) – М.: URSS. Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 392 с.
2. Емеличев В.А., Зверович И.Э., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Теория графов в задачах и упражнениях (учебное пособие). – М.: URSS. Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 416 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 368 с.
2. Дистель Р. Теория графов: Пер. с англ. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. – 336 с.
3. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Вузовская книга, 2004. – 664 с.
4. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
5. Харари Ф. Теория графов: Пер с англ. – Изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

С целью текущего контроля знаний студентов предусматривается проведение устных опросов, экспресс-опросов, коллоквиума и контрольных работ.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Теория графов» учебным планом предусмотрен **зачет**.

Итоговая отметка формируется на основе:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.).

2. Положения о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в БГУ (Приказ ректора БГУ от 31.03.2020 № 189-ОД).

3. Критериев оценки результатов учебной деятельности обучающихся в учреждениях высшего образования по десятибалльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 28.05.2013 г. № 09-10/53-ПО).

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- устный опрос – 17 %;
- экспресс-опрос – 17 %;
- коллоквиум – 33 %;
- контрольная работа – 33 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Раздел 1. Элементы теории графов

Примерный перечень заданий

1. Ввести понятие кода Прюфера для помеченного дерева порядка n . Привести альтернативное доказательство теоремы Кэли: число помеченных деревьев порядка n равно n^{n-2} . В качестве вспомогательной подзадачи предполагается доказать, что между кодами Прюфера помеченных деревьев порядка n и всеми последовательностями длины $n-2$, образованными из чисел множества $\{1, 2, \dots, n\}$, имеется биективное соответствие.
2. Доказать, что гамильтоново замыкание $cl(G)$ графа G не зависит от порядка добавляемых в процессе его построения ребер, т.е. гамильтоново замыкание графа определено однозначно.

Форма контроля – контрольная работа № 1 по разделу 1.

Раздел 2. Экстремальные задачи на графах

Примерный перечень заданий

1. Пусть в сети G кроме пропускных способностей дуг также заданы пропускные способности некоторых выделенных вершин. Требуется решить задачу о максимальном потоке, учитывая, что суммарный поток на дугах, входящих в каждую выделенную вершину (а также выходящих из каждой выделенной вершины), не может превышать пропускной способности этой вершины. Как следует преобразовать сеть G , чтобы в модифицированной сети указанная задача решалась с помощью алгоритма Форда–Фалкерсона.

Форма контроля – контрольная работа № 2 по разделу 2.

Примерная тематика контрольных работ

- Контрольная работа № 1. «Элементы теории графов: изоморфизм графов; подграфы; связный граф; связь между числами вершин, ребер и связных компонент графа; двудольные графы; соотношения между различными параметрами дерева; свойства остовов; обходы в графах».

- Контрольная работа № 2. «Экстремальные задачи на графах: построение остовного дерева минимального веса с помощью алгоритма Краскала; алгоритм Дейкстры для решения задачи нахождения путей минимального веса от фиксированной вершины до всех остальных в ориентированном графе; нахождение максимального потока и минимального разреза в сети с помощью алгоритма Форда–Фалкерсона».

Примерная тематика практических занятий

1. Разбор первоначальных понятий теории графов. Решение задач на использование леммы о рукопожатиях.
2. Решение задач на изоморфизм графов.
3. Нахождение различных типов подграфов графа.
4. Решение задач на существование определенных маршрутов в графах.
5. Решение задач, связанных с понятиями связность, связная компонента.
6. Нахождение графов с максимальным (минимальным) числом ребер при фиксированных числах вершин и связных компонент.
7. Распознавание двудольных графов.
8. Решение задач на использование эквивалентных определений дерева.
9. Решение задач с использованием свойств остовов графа.
10. Распознавание эйлеровости графа.
11. Распознавание гамильтоновых графов, применение достаточных условий гамильтоновости.
12. Использование алгоритма Краскала для построения остовного дерева минимального веса в связном взвешенном графе.
13. Решение задачи нахождения путей минимального веса от фиксированной вершины до всех остальных в ориентированном графе с помощью алгоритма Дейкстры.
14. Нахождение максимального потока и минимального разреза в сети с помощью алгоритма Форда–Фалкерсона.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает:

- осуществление студентами лично-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;

- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

Наиболее эффективной предполагается следующая форма реализации эвристического подхода: доказательства громоздких теорем, а также решения сложных задач разбиваются на этапы, после чего обучаемые подводятся к самостоятельному определению действий на этапах.

При организации образовательного процесса используется также *практико-ориентированный подход*, который предполагает:

- освоение содержания образования через решение практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по индивидуально заданной теме дисциплины;
- выполнение домашнего задания;
- проведение научно-исследовательских работ;
- подготовка к участию в научных и научно-практических конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Графы и способы их задания (аналитический, графический, матричный).
2. Окружение и степень вершины графа. Лемма о рукопожатиях.
3. Изоморфизм графов. Помеченный граф.
4. Операции над графами.
5. Подграфы, их типы.
6. Маршруты, их типы и основные свойства.
7. Связная компонента графа. Число связных компонент в графе, получающемся из заданного связного графа удалением ребра.
8. Число ребер в графе с фиксированными числами вершин и связных компонент.

9. Двудольные графы. Критерий двудольности Кёнига.
10. Деревья: эквивалентные определения.
11. Остов графа и его свойства.
12. Эйлеров цикл. Критерий эйлеровости графа.
13. Гамильтонов цикл. Достаточные условия гамильтоновости графа.
14. Остовное дерево минимального веса в связном взвешенном графе.
Пример практического применения.
15. Алгоритм Краскала построения остовного дерева минимального веса в связном взвешенном графе.
16. Ориентированные графы, основные понятия и обозначения.
17. Задача нахождения путей минимального веса от фиксированной вершины до всех остальных в ориентированном взвешенном графе. Алгоритм Дейкстры.
18. Потоки и разрезы в сетях. Соотношение между величиной потока и пропускной способностью разреза.
19. Теорема Форда–Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе в сети.
20. Алгоритм Форда–Фалкерсона нахождения максимального потока и минимального разреза в сети.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
на ____ / ____ учебный год

№№ ПП	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры математической кибернетики (протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой
доктор физ.-мат. наук, профессор

А.Л. Гладков

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
доктор физ.-мат. наук, доцент

С.М. Босяков