ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ К ЭКОНОМИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

К. О. Хиневич

Белорусский государственный университет, г. Минск;
kseniyakhin@gmail.com;
науч. рук. – М. В. Дубатовская, канд. физ.-мат. наук, доц.

Данная статья посвящена изложению основ теории массового обслуживания, применению этой теории для построения и анализа некоторых экономико-математических моделей.

Ключевые слова: случайные процессы; теория массового обслуживания; цепи Маркова; многоканальная система массового обслуживания; НМ-сети.

Актуальность данной работы связана с тем, что статистические методы и, в частности, аппарат теории массового обслуживания и цепей Маркова, а также их современные модификации, находят широкое применение в моделировании экономических процессов.

Теория массового обслуживания (или теория очередей) – раздел теории вероятностей и математической статистики, который изучает системы массового обслуживания (СМО), которые характеризуются основными элементами: источник требований, входящий поток требований, наличие очереди и принципы ее организации, каналы обслуживания, выходящий поток требований [1]. Объект обслуживания называется требованием или заявкой. Под требованием (заявкой) обычно понимают запрос на удовлетворение какой-либо потребности клиента, покупателя. В роли каналов обслуживания выступают, например, мастера по ремонту какого-либо оборудования, кассиры, колл-менеджеры, процессоры компьютеров и т. д.

Задачей теории массового обслуживания является установление зависимостей между характером потока заявок, количеством обслуживающих устройств, производительностью отдельного устройства и эффективным обслуживанием с целью нахождения наиболее рациональных путей управления процессами, которые моделируют с помощью систем массового обслуживания.

В СМО поступает входящий поток заявок, а результатом является выходящий поток заявок. Цель клиента (требования, заявки) – потратить минимальное время на ожидание в очереди и на обслуживание каналами в системе. Обслуживающая система должна удовлетворить требования клиента и как можно меньше времени находиться в состоянии вынужденных простоев. Цель анализа СМО: достигнуть компромисса между требованиями клиентов и работоспособностью обслуживающей системы. В результате анализа можно прийти к выводам о сокращении числа каналов (численности обслуживающего персонала), уменьшении норматива времени обслуживания одного требования в системе и т.д.

В зависимости от типа СМО рассчитывают ее характеристики и делают соответствующие практические выводы (см., например, [2]).

Моделирование с помощью методов теории массового обслуживания широко применяется для решения различных экономических задач [3], поскольку в экономических системах можно наблюдать возникновение массовых запросов (требований) на обслуживание и удовлетворение этих требований соответствующими структурами. В качестве примеров можно привести организацию торговли, работы терминалов аэропортов, проблемы нормировки труда в организациях, задачи оптимизации в логистических схемах.

Например, М.А.Маталыцким была предложена модель марковской цепи, состояниями в которой выступают СМО, и переход от одной системы к другой приносит некоторый доход. Это так называемые НМ-сети, названные по именам авторов, их предложивших (Howard-Matalytski) (см., например, [4, 5]). Такие модели можно применить, в частности, для решения задач оптимизации транспортных логистических систем. В моделях функционирования таких систем можно выделить структурные элементы, характерные для СМО: транспортные потоки, требующие обслуживания в случайные моменты времени, временные интервалы обслуживания, имеющие случайную длину, взаимосвязь различных производителей, складов и потребителей. Использование техники НМ-сетей позволяет прогнозировать доходы от перевозок, обеспечиваемых логистической транспортной системой.

Рассмотрим пример применения указанной теории: Система ПВО имеет две пусковые установки и устройства слежения, которые реализуют контроль за самолетами, попавшими в зону обстрела в момент, с который пусковые установки обстреливают самолеты, попавшие в зону ранее. Как только освобождается одна из установок, устройство слежения сообщает о самолете при условии, что тот еще находится в зоне обстрела. Нужно определить основные характеристики работы описанной СМО, если интенсивность, с которой каждая установка обстреливает самолет, равна одному самолету в минуту, а интенсивность, с которой самолеты влетают в зону, равно 0,8 самолетов в минуту. Среднее время нахождения самолета в зоне до начала обстрела - 2 минуты.

Решение: Система моделируется многоканальной СМО с «нетерпеливыми» заявками. Вычислим ее параметры.

Число каналов обслуживания: n =2. Интенсивность входящего потока заявок: $\lambda = 0{,}8$ (самолетов в минуту). Интенсивность потока обслуживаний: $\mu = 1$ (самолетов в минуту). Среднее время, ограничивающее пребывание заявки в очереди: $\bar{t}_{\omega ait} = 2$ (минуты). Интенсивность потока уходов: $\omega = \frac{1}{\bar{t}_{\omega ait}} = 0{,}5$ (самолетов в минуту). Определяем нагрузку системы:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}8\ .$$

Теперь определяем приведенную интенсивность потока «уходов»:

$$\beta = \frac{\omega}{\mu} = 0{,}5.$$

Для определения характеристик эффективности данной СМО в предельном режиме определим вероятность простоя системы:

$$p_0 = 1/(1 + 0{,}8 + \frac{0{,}8^2}{2!} + \left(\frac{0{,}8^2}{2!}\right) * S)$$

где S - сумма сходящегося ряда:

$$S = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{0{,}8^{k-2}}{(2 + 0{,}5)(2 + 2 * 0{,}5) \dots (2 + (k-2) * 0{,}5)}$$

Найдем сумму S с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$. Для этого используем оценку, которая для числовых значений данной задачи приобретает вид:

$$(\frac{0{,}8}{0{,}5})^r * e^{\left(\frac{0{,}8}{0{,}5}\right)}/r! \leq 0{,}01$$

или

$$\frac{1{,}6^r}{r!} \leq \frac{0{,}01}{4{,}953} = 0{,}002.$$

Найдем наименьшее целое положительное $r \geq 2$, удовлетворяющее неравенству выше. Вычисленные значения отношения $\frac{1{,}6^r}{r!}$ представлены в следующей таблице:

r	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{1{,}6^r}{r!}$	1,28	0,683	0,273	0,087	0,023	0,005	0,001

Таким образом, наименьшее целое положительное $r \geq 2$, удовлетворяющее неравенству, равно 8. Поэтому в качестве приближенного значения суммы S ряда с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$ можно взять сумму S_7 первых семи его членов. Обозначим члены этого ряда через a_k. Таким образом:

$$s_7 = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9,$$

где

$a_3 = 0{,}8^{(3-2)}/(2 + 0{,}5) = 0{,}32,$

$a_4 = 0{,}8^{(4-2)}/(2 + 0{,}5)(2 + 2 * 0{,}5) = 0{,}085,$

$a_5 = 0{,}8^{(5-2)}/(2+0{,}5)(2+2*0{,}5)(2+3*0{,}5) = 0{,}020$,

$a_6 = 0{,}8^{(6-2)}/(2+0{,}5)(2+2*0{,}5)(2+3*0{,}5)(2+4*0{,}5) = 0{,}004$,

$a_7 = 0{,}8^{(7-2)}/(2+0{,}5)(2+2*0{,}5)(2+3*0{,}5)(2+4*0{,}5)(2+5*0{,}5) = 0{,}0007$,

$a_8 = 0{,}8^{(8-2)}/(2+0{,}5)(2+2*0{,}5)(2+3*0{,}5)(2+4*0{,}5)(2+5*0{,}5)(2+6*0{,}5) = 0{,}0001$,

$a_9 = 0{,}8^{(9-2)}/(2+0{,}5)(2+2*0{,}5)(2+3*0{,}5)(2+4*0{,}5)(2+5*0{,}5)(2+6*0{,}5)(2+7*0{,}5) = 0{,}00002$,

Итак,

$$s_7 = 0{,}32 + 0{,}085 + 0{,}02 + 0{,}004 + 0{,}0007 + 0{,}0001 + 0{,}00002 \approx 0{,}43.$$

Отсюда получаем:

$$p_0 = 0{,}443.$$

Зная p_0, определим p_1 по формуле (1.35):

$$p_1 = \left(\frac{0{,}8^1}{1!}\right) * 0{,}443 = 0{,}354$$

Теперь можно определить среднее число занятых каналов (или, что то же самое, среднее число заявок под обслуживанием):

$$\bar{k} = 1 * 0{,}354 + 2(1 - 0{,}443 - 0{,}354) = 0{,}76.$$

Вычисляем среднее число заявок в очереди: $\bar{r} = \frac{0{,}8-0{,}76}{0{,}5} = 0{,}08$. Среднее число заявок в системе определяется как сумма: $\bar{r} + \bar{k} = 0{,}840$. Абсолютная пропускная способность: $A = 0{,}8 - 0{,}08 * 0{,}5 = 0{,}760$. Относительная пропускная способность: $q = \frac{0{,}76}{0{,}8} = 0{,}95$.

Таким образом, при заданных параметрах 95% поступающих заявок обслуживаются в системе и только 5% «нетерпеливых» заявок покидают ее необслуженными, то есть 95% самолетов, вошедших в зону обстрела, обстреливаются пусковыми установками, а 5% самолетов выходят из зоны обстрела целыми.

Библиографические ссылки

1. *Фомин Г. П.* Математические методы и модели в коммерческой деятельности. М: Финансы и статистика, 2001.
2. *Вентцелъ Е. С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Academa, 2003.
3. *Лабскер Л. Г., Бабешко Л.О.* Теория массового обслуживания в экономической сфере. М.: Банки и биржа, 1998.
4. *Матальцкий М. А.* О некоторых задачах анализа и оптимизации НМ-сетей и их применении. Гродно: ГрГУ, 2008.
5. *Ховард Р. А.* Динамическое программирование и марковские процессы М.: Сов. радио, 1964. – 192 с