

СТРАТЕГИЯ С ЗАМЫКАНИЕМ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В MPC

Д. А. Костюкевич

Белорусский государственный университет, г. Минск;

kostukDA@bsu.by;

науч. рук. – Н. М. Димитрук, канд. физ.-мат. наук, доц.

Рассматривается задача оптимального управления линейной дискретной системой с неизвестными ограниченными возмущениями, которую требуется за конечное время перевести с гарантией на терминальное множество, обеспечивая при этом минимум гарантированного значения заданного критерия качества. Определяется оптимальная стратегия управления, учитывающая информацию об одном будущем состоянии объекта, и на ее основе предлагается алгоритм управления по прогнозирующей модели (Model Predictive Control – MPC) [1].

Ключевые слова: оптимальное гарантированное управление, стратегия управления, управление по прогнозирующей модели.

Для дискретной линейной стационарной системы с возмущением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (1)$$

рассматривается задача минимизации гарантированного значения критерия качества

$$J(u) = \max_w \sum_{t=0}^{T-1} (\|Qx(t)\|_\infty + \|Ru(t)\|_\infty) + \|Px(T)\|_\infty, \quad (2)$$

при условии попадания траектории на заданное терминальное множество $X_T = \{x \in \mathbf{R}^n : Hx \leq g\}$. Здесь $x(t) \in \mathbf{R}^n$ — состояние, $u(t) \in U \subset \mathbf{R}^r$ — управление, $w(t) \in W \subset \mathbf{R}^p$ — неизвестное возмущение; $A, Q, P \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times r}$, $M \in \mathbf{R}^{n \times p}$, $R \in \mathbf{R}^{r \times r}$, $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $g \in \mathbf{R}^m$; $U = \{u \in \mathbf{R}^r : \|u\|_\infty \leq u_{\max}\}$, $W = \{w \in \mathbf{R}^p : \|w\|_\infty \leq w_{\max}\}$, где норма $\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$. Задача в приведенной формулировке непосредственно используется для построения стабилизирующей обратной связи в схеме MPC [5]. В данной работе предлагается новый подход к определению стратегии управления для (1).

Пусть $T_1 \in \{1, 2, \dots, T-1\}$ — некоторый момент времени (называемый моментом замыкания системы (1), согласно [2, 3]), который разбивает промежуток управления на $\Delta_0 = \{0, 1, \dots, T_1-1\}$ и $\Delta_1 = \{T_1, T_1+1, \dots, T-1\}$.

Для промежутков $\Delta_k, k = 0, 1$, определим: $u_k(\cdot) = (u_k(t) \in U, t \in \Delta_k)$, $w_k(\cdot) = (w_k(t) \in W, t \in \Delta_k)$ — управление и возмущение, $U_k = \{u_k(\cdot) : u_k(t) \in U, t \in \Delta_k\}$, $W_k = \{w_k(\cdot) : w_k(t) \in W, t \in \Delta_k\}$ — множество

доступных управлений и возмущений на k -ом промежутке;
 $X(T_1 | x_0, u_0(\cdot)) = \{x \in \mathbf{R}^n : x = x(T_1 | x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot)), w_0(\cdot) \in W_0\}$,
 $X(T | x_1, u_1(\cdot)) = \{x \in \mathbf{R}^n : x = x(T | x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot)), w_1(\cdot) \in W_1\}$ — множества всех состояний в моменты времени T_1 и T , где $x(t | x_k, u_k(\cdot), w_k(\cdot))$ — состояние системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0$ или $x(T_1) = x_1$ под действием управления $u_k(\cdot)$ и возмущения $w_k(\cdot)$.

Предположение 1. До начала процесса управления известно, что в момент T_1 будет измерено текущее состояние $x_1 = x(T_1 | x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot))$, с учетом которого можно будет выбрать новое управляющее воздействие $u_1(\cdot) = u_k(\cdot | x_1)$ на Δ_1 .

Следуя работам [3, 4], будем искать решение рассматриваемой задачи в виде *стратегии управления* с моментом замыкания T_1

$$\pi_1 = \pi_1(0, x_0) = \{u_0(\cdot | x_0); u_1(\cdot | x_1), x_1 \in X(T_1 | x_0, u_0(\cdot | x_0))\}.$$

Определение 1. Стратегия π_1 называется *допустимой стратегией управления с моментом замыкания T_1* , если

$$X(T | x_1, u_1(\cdot | x_1)) \subseteq X_T \quad \forall x_1 \in X(T_1 | x_0, u_0(\cdot | x_0)).$$

Оптимальную стратегию управления определим как

$$\pi_1^0 = \pi_1^0(0, x_0) = \{u_0^0(\cdot | x_0); u_1^0(\cdot | x_1), x_1 \in X(T_1 | x_0, u_0^0(\cdot | x_0))\}, \quad (3)$$

где $u_0^0(\cdot | x_0)$ будем называть оптимальной начальной программой.

Задача управления на промежутке Δ_1 заключается в отыскании оптимальной гарантирующей программы $u_1^0(\cdot | x_1)$, как решения задачи

$$J_1(x_1) = \min_{u_1(\cdot) \in U_1} \max_{w_1(\cdot) \in W_1} \left\{ \sum_{t \in \Delta_1} (\|Qx(t | x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot))\|_\infty + \right. \quad (4)$$

$$\left. + \|Ru_1(t)\|_\infty) + \|Px(T | x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot))\|_\infty \right\},$$

при условии $x(T | x_1, u_1(\cdot | x_1), w_1(\cdot)) \in X_T \quad \forall w_1(\cdot) \in W_1$. Если задача (4) не имеет решения, полагаем $J_1(x_1) = +\infty$.

Предположение 2. Параметры задачи таковы, что непусто множество $X_1 = \{x_1 : J_1(x_1) < +\infty\}$ и $\exists u_0(\cdot | x_0)$, обеспечивающее включение $X(T_1 | x_0, u_0(\cdot | x_0)) \subseteq X_1$.

В предположении 2 стратегия $\pi_1 = \{u_0(\cdot | x_0); u_1^0(\cdot | x_1), x_1 \in X(T_1 | x_0, u_0(\cdot | x_0))\}$ допустима. Тогда оптимальная начальная программа $u_0^0(\cdot | x_0)$ на промежутке Δ_0 существует и является решением минимаксной задачи

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0(\cdot) \in U_0} \max_{w_0(\cdot) \in W_0} \left\{ \sum_{t \in \Delta_0} (\|Qx(t)\|_\infty + \|Ru_0(t)\|_\infty) + J_1(x(T_1)) \right\}, \quad (5)$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t), \quad x(0) = x_0, \quad u_0(t) \in U_0, \quad t \in \Delta_0, \\ x(T_1) \in X_1 \quad \forall w_0(\cdot) \in W_0.$$

Определение 2. Стратегия управления (3) оптимальна, если $u_0^0(\cdot | x_0)$ — решение задачи (5), а $u_1^0(\cdot | x_1)$ — решения задач (4) для состояний $x_1 \in X(T_1 | x_0, u_0^0(\cdot | x_0))$.

Для начала процесса управления необходимо знать лишь оптимальную начальную программу $u_0^0(\cdot | x_0)$, а оптимальные гарантирующие программы $u_1^0(\cdot | x_1)$ для промежутка Δ_1 строятся в процессе управления.

Перепишем задачу (5) в эквивалентном виде

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0, \alpha} \max_{w_0} \left\{ \sum_{t \in \Delta_0} (\|Qx(t)\|_\infty + \|Ru_0(t)\|_\infty) + \alpha \right\}, \quad (6)$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t), \quad x(0) = x_0, \quad u_0(t) \in U_0, \quad t \in \Delta_0, \\ x(T_1) \in X_1(\alpha) = \{x_1 \in X_1 : J_1(x_1) \leq \alpha\} \quad \forall w(\cdot) \in W_0.$$

Множество $X_1(\alpha)$ для дискретной системы (1) — многогранник. Пусть $p_i \in \check{Y}^n$, $i = 1, 2, \dots, m_1$, $\|p_i\| = 1$, — нормали к граням $X_1(\alpha)$ (или граням аппроксимирующего его многогранника, см. [3]) и пусть

$$g_{p_i}(\alpha) = \max_{x_1 \in X_1(\alpha)} p_i^T x_1. \quad (7)$$

Задача (7) является задачей линейного программирования, зависящей от параметра α . Функция $g_{p_i}(\alpha)$ — вогнутая, кусочно-линейная, и для нее с использованием результатов параметрического линейного программирования может быть найдено разбиение отрезка $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ допустимых значений параметра на области линейности функции. Будем считать, что указанное разбиение найдено для всех p_i , $i = 1, \dots, m_1$, после чего построено обобщающее разбиение $\alpha_{\min} = \alpha^1 < \dots < \alpha^{K+1} = \alpha_{\max}$ и найдены значения

$$q_i^k = \frac{dg_{p_i}(\alpha^k + 0)}{d\alpha}, \quad i = 1, \dots, m_1, \quad k = 1, \dots, K, \quad \text{причем для каждого } i$$

имеют место неравенства $q_i^1 > q_i^2 > \dots > q_i^{K_i} \geq 0$.

Пусть $Q_1 \in \check{Y}^{m_1 \times K}$ — матрица, элементами которой являются найденные q_i^k , $P_1 \in \check{Y}^{m_1 \times n}$ — матрица, строками которой являются p_i , $i = 1, \dots, m_1$, $g_1 = (g_{p_i}(\alpha_{\min}), i = 1, \dots, m_1)$. Тогда

$$X_1(\alpha) = \{x \in \check{Y}^n : P_1 x \leq g_1 + Q_1 \omega\},$$

где вектор $\omega \in \check{Y}^K$ построен по правилам:

$$\begin{cases} \omega_k = \alpha^{k+1} - \alpha^k, k=1, \dots, K(\alpha)-1, \\ \omega_{K(\alpha)} = \alpha - \alpha^{K(\alpha)}, \\ \omega_k = 0, k = K(\alpha)+1, \dots, K, \end{cases}$$

$K(\alpha): \alpha \in [\alpha^{K(\alpha)}, \alpha^{K(\alpha)+1})$.

Таким образом, получаем задачу

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0, \omega} \max_{w_0} \left\{ \sum_{t \in \Delta_0} (\|Qx(t)\|_\infty + \|Ru_0(t)\|_\infty) + \sum_{k=1}^K \omega_k \right\} + \alpha^1, \quad (8)$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t), \quad x(0) = x_0, \quad u_0(t) \in U_0, \quad t \in \Delta_0,$$

$$P_1 x(T_1) - Q_1 \omega \leq g_1 \quad \forall w(\cdot) \in W_0, \quad 0 \leq \omega_k \leq \alpha^{k+1} - \alpha^k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Она может быть далее сведена, как в [2,3], к задаче линейного для эффективного численного решения.

Наконец, приведем алгоритм МРС, основанный на оптимальных стратегиях π_1^0 . Прогнозирующей задачей называется задача (5) (или ее эквивалент (8)), в которой начальное состояние совпадает с текущим (в момент времени τ) состоянием объекта управления $x^*(\tau)$, т.е. начальное условие заменяется на $x(0) = x^*(\tau)$.

Алгоритм МРС состоит в следующем:

- 1) в момент времени τ измерить $x^*(\tau)$ и найти $u_0^0(t|\tau)$, $t \in \Delta_0$;
- 2) применить к объекту управляющее воздействие $u_{MPC}(\tau) = u_0^0(0|\tau)$;
- 3) перейти к следующему моменту ($\tau := \tau + 1$) и вернуться к шагу 1.

Поскольку на шаге 1 алгоритма решается задача линейного программирования (8), в отличие от работ [1, 2], управление по прогнозирующей модели на основе стратегий управления с моментом замыкания удастся применять для процессов с быстро изменяющейся динамикой.

Библиографические ссылки

1. Bemporad, A. Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems / A. Bemporad, F. Borrelli, M. Morari // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2003. – Vol. 48, №9. – P. 1600-1606.
2. Балашевич, Н.В. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью / Н.В. Балашевич, Р. Габасов Р., Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 2. – С. 265-286.
3. Дмитрук, Н.М. Оптимальная стратегия с одним моментом замыкания в линейной задаче оптимального гарантированного управления / Н.М. Дмитрук // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2018. – Т. 58, № 5. – С. 664-681.
4. Kostyukova, O. Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances / O. Kostyukova, E. Kostina // Mathematical programming. – 2006. – Vol. 107, № 1-2. – P. 131-153.