ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ань Хоанг Тхи Киеу

Белорусский государственный университет, г. Минск;
kieuanhhoang86@gmail.com;
науч. рук. - П. П. Матус, член-корреспондент НАН Беларуси,
д-р физ.-мат. наук, проф.

В этой работе для одномерного уравнения Клейна-Гордона с переменными коэффициентами исследуются компактные разностные схемы 4-го порядка аппроксимации по пространству и 2-го по времени. При изучении устойчивости этих схем по начальным данным и правой части в сеточных нормах используется метод энергетических неравенств. В результате получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в сеточных нормах. Кроме этого, предложены новые компактные схемы для одного типа квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка.

Ключевые слова: компактная разностная схема; одномерное уравнение; уравнение Клейна-Гордона; априорные оценки; устойчивость; сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

Повышение точности вычислительного метода для решения задач математической физики на минимальных шаблонах всегда было актуальной проблемой. Среди различных разностных схем повышенного порядка аппроксимации особое место занимают так называемые компактные схемы, которые пишутся на шаблоне, несущественно отличающемся от традиционных для данного уравнения [1 - 3]. Компактные разностные схемы строятся и изучаются, например, для классических уравнений математической физики с самосопряженным эллиптическим оператора в работах А. А. Самарского [4, 5], для волнового уравнения в работах В. И. Паасонена [6, 7]. Что же касается уравнения Клейна - Гордона, то оно играет важную роль в математической физике. Это уравнение, в частности, используется при изучении солитонов и в физике конденсированного вещества. Компактные схемы 4-го порядка точности для уравнения этого типа в нелинейном случае с правой части строятся в работе Yueshen Luo, Xiale Li, и Cui Guo [8].

В этой работе для одномерного уравнения Клейна-Гордона с переменными коэффициентами на обычном трехточечном шаблоне исследуются компактные разностные схемы 4-го порядка аппроксимации по пространству и 2-го по времени. При изучении устойчивости компактной разностной схемы по начальным данным и правой части в сеточных нормах $L_2(\omega_h), W_2^1(\omega_h), C(\bar{\omega}_h)$ используется метод энергетических неравенств. В результате получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в сеточных нормах при предположении $h \le h_0, h_0 = const, \tau \ge h$. На примере вычислительного эксперимента показывается, как использовать правило Рунге для определения разных порядков скорости сходимости решения разностной схема в случае двух независимых переменных. Кроме этого, предложены новые компактные схемы для одного типа квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка (следствие системы уравнений газовой динамики).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области $\bar{Q}_T = \{(x,t): 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - mu + f(x,t), \quad m = const > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \bar{v}_0(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \tag{3}$$

где $0 < k_1 \le k(x,t) \le k_2$, $u(x,t) \in C^{4,6}(\bar{Q}_T)$, $p \in C^{0,1}(\bar{Q}_T)$, $f \in C^{0,2}(\bar{Q}_T)$.

Здесь и далее относительно решения дифференциальной задачи будем предполагать, что оно существует, единственно и обладает всеми непрерывными в $\bar{Q}_T$ производными, необходимыми по ходу изложения.

На стандартной равномерной сетке узлов $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_n) \in \bar{Q}_T\}$, $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih,\ 0 \le i \le N,\ h = l/N\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau,\ 0 \le n \le N_0,\ \tau = T/N_0\} = \omega_\tau \cup \{t_{N_0} = T\}$ заменим дифференциальную задачу (1) - (3) разностной задачей:

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda y^{(\sigma,\sigma)} - \frac{h^2}{12}\Lambda\left(p y_{\bar{t}t}\right) - m\left[y^{(\sigma,\sigma)} + \frac{h^2}{12}\Lambda\left(p y^{(\sigma,\sigma)}\right)\right] + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{4}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{5}$$

$$y(0,t) = \mu_1(t), \quad y(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in \omega_\tau. \tag{6}$$

Здесь

$$\Lambda y = \left(a(x,t_n) y_{\bar{x}}\right)_x, \quad \sigma = 0.5, \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12}\Lambda(pf), \quad p(x,t) = \frac{1}{k(x,t)},$$

$$a(x,t) = 6\left[p(x-h,t) + 4p(x-\frac{h}{2},t) + p(x,t)\right]^{-1}, \quad 0 < c_1 \le a(x,t) \le c_2,$$

$$u_1(x) = \bar{v}_0(x) + \frac{\tau}{2}\left[\left(k(x,0)u'(x,0)\right)' - mu(x,0) + f(x,0)\right], \quad x \in \omega_h.$$

При указанных параметрах эта схема имеют порядок погрешности аппроксимации равный 4-ом по пространству и 2-ом по времени

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ И ПРАВОЙ ЧАСТИ

Теорема 1. *Пусть выполнено следующее условие* $\tau \geq max\left\{1, \sqrt{\dfrac{2}{3k_1}}\right\}h.$

Тогда имеет место оценка

$$\| \tilde{y}^{n+1} - y^{n+1} \|_C^2 \leq M_1\{\| \tilde{u}_1 - u_1 \|^2 + \frac{c_2}{2}\left(3\| \tilde{u}_{0\bar{x}} - u_{0\bar{x}}]|^2 + 2\tau^2 \| \tilde{u}_{1\bar{x}} - u_{1\bar{x}}]|^2\right) +$$

$$+\frac{m}{2}\left(3\| \tilde{u}_0 - u_0 \|^2 + 2\tau^2 \| \tilde{u}_1 - u_1 \|^2\right) + c\sum_{k=1}^{n} \tau \| \tilde{\varphi}^k - \varphi^k \|^2\}.$$

выражающая $\rho -$ *устойчивость решения разностной схемы (4)-(6) по начальным данным, правой части в сеточных нормах* $L_2(\omega_h), W_2^1(\omega_h), C(\bar{\omega}_h)$.

СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В СЕТОЧНОЙ НОРМЕ

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда решение разностной схемы (4) - (6) сходится к точному решению дифференциальной задачи (1) - (3) в сеточной норме* $C(\bar{\omega}_h)$ *и для её решения имеет место оценка точности*

$$\| y^n - u^n \|_C \leq M_2(h^4 + \tau^2), \quad \forall n = 0,1,...,N_0, \quad M_2 = const > 0.$$

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

В этом пункте посмотрим начально-краевую задачу для одного типа квазилинейного уравнения Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2} - mf_1(u) + f(x,t), \quad m = const > 0, \tag{7}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \bar{u}_0(x), \tag{8}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(l,t) = \mu_2(t), \tag{9}$$

с условием $\phi_u' = k(u) \geq k_1 > 0$.

Недостатком предложенных А.А. Самарским компактных разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами является невозможность их обобщения на случай квазилинейных уравнений, так как соответствующий шаблонный функционал должен вычисляться в полуцелой точке, которая не существует для квазилинейного случая. Но если квазилинейное уравнение может переписать в виде (7), тогда для его можно строить компактные схемы четвертого порядка аппроксимации по пространству и второго по времени, аналогичные схемам для случая постоянных коэффициентов. Соответствующие разностные схемы для задачи (7) - (9) имеет вид:

$$y_{\bar{t}t} = \left[\phi(y)\right]_{\bar{x}x}^{(\sigma,\sigma)} - m\bar{f}_1(y) + \bar{f} - \frac{h^2}{12} y_{\bar{t}t\bar{x}x}, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau,$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h,$$

$$y(0,t) = \mu_1(t), \quad y(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in \omega_\tau,$$

в которой

$$\bar{v} = v + \frac{h^2}{12} v_{\bar{x}x} = \frac{5}{6} v + \frac{1}{12}(v_{+1} + v_{-1}), \; 0 < \sigma \le 1,$$

$$u_1(x) = \bar{u}_0(x) + \frac{\tau}{2}\left[\phi''(u_0(x)) - mf_1(u_0(x)) + f(x,0)\right], \quad x \in \omega_h.$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В этом пункте приводятся результаты численных расчетов при решении начально-краевой задачи (1) - (3) с коэффициентом $k(x) = 2x + 3,$ правой частью $f(x,t) = -5e^{\sqrt{2}x}(\cos 2t + \sin 2t)(4x + 7 + 2\sqrt{2})$ и выбранными параметрами $m = 3,\ l = 2,\ T = 10.$ Начальные и краевые условия определяются из точного решения $u(x,t) = 5e^{\sqrt{2}x}(\cos 2t + \sin 2t)$. Порядок сходимости по временной и пространственной переменным в норме $L_\infty = C$ определяется по следующим формулам:

$$p_\infty^h = \log_2 \frac{\| z(2h,\tau) \|_{L_\infty}}{\| z(h,\tau) \|_{L_\infty}}, \quad p_\infty^\tau = \log_2 \frac{\| z(h,2\tau) \|_{L_\infty}}{\| z(h,\tau) \|_{L_\infty}}.$$

Таблица 1

Скорость сходимости по h

h	τ	$\|\|z\|\|_{L\infty}$	$p_{L\infty}^h$	$\|\|z\|\|_{L2}$	p_{L2}^h
$h_0 = 0.125$	$\tau_0 = 0.015625$	5.49E-03	-	3.94E-03	-
$h_0/2^1$	$\tau_0/4^1$	3.65E-04	3.91055	2.74E-04	3.84501
$h_0/2^2$	$\tau_0/4^2$	2.31E-05	3.98547	1.73E-05	3.98513
$h_0/2^3$	$\tau_0/4^3$	1.45E-06	3.99283	1.09E-06	3.99744

Таблица 2

Скорость сходимости по τ

h	τ	$\|\|z\|\|_{L\infty}$	p_∞^τ	$\|\|z\|\|_{L2}$	p_{L2}^τ
$h_0 = 0.015625$	$\tau_0 = 0.0078125$	1.42E-03	-	1.06E-03	-
h_0	$\tau_0/2^1$	3.63E-04	1.97285	2.70E-04	1.9671
h_0	$\tau_0/2^2$	9.10E-05	1.99606	6.81E-05	1.98902
h_0	$\tau_0/2^3$	2.28E-05	1.99651	1.71E-05	1.99493

Отсюда видно, что построенная разностная схема имеет четвертый порядок точности по пространственной переменной и второй по временной.

Библиографические ссылки

1. *П. П. Матус, Х. Т. К. Ань.* Компактные разностные схемы для уравнения Клейна-Гордона // Доклады НАН Беларуси. 2020. Т. 64, № 5. С. 526–533.
2. *П. П. Матус, Х. Т. К. Ань*. Компактные разностные схемы для уравнения Клейна-Гордона с переменными коэффициентами // Доклады НАН Беларуси. 2021. Т. 65, № 1. С. 25–32.
3. *П. П. Матус, Х. Т. К. Ань*. Компактные разностные схемы на трехточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 7 (в печати).
4. *А. А. Самарский*. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3, № 5. С. 812–840.
5. *А. А. Самарский*. Теория разностных схем. М., 1989. 616 с.
6. *В.И. Паасонен*. Компактные схемы для систем уравнений второго порядка с конвективными членами // Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск. 1998. Т. 3, № 1. С. 55–66.
7. *В.И. Паасонен*. Диссипативные асимметричные компактные схемы для уравнения колебаний // Вычислительные технологии. Специальный выпуск. 2001. Т. 6. № 2. С. 475–479.
8. *Luo Y., Li X., Guo C*. Fourth-order compact and energy conservative scheme for solving nonlinear Klein-Gordon equation// Numer. Methods Partial Differential Equations. 2017. Vol 33. P. 1283–1304.