

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО МАГНИТОЖИДКОСТНОГО ЭКРАНА

А. А. Александрова

Белорусский государственный университет, г. Минск;

hanna.aliaksandrava@gmail.com;

науч. рук. – О. А. Лаврова, к. физ.-мат. наук, доц.

Данная работа посвящена численному моделированию сферического магнито-жидкостного экрана. Объектом исследования является задача об экранировании внешнего однородного магнитного поля слоем магнитной жидкости, покрывающим сферу. Математическая модель представляет собой уравнения Максвелла для структуры магнитного поля внутри магнито-жидкостного слоя и в окружающей воздушной среде. Математическая модель численно решается с помощью метода конечных элементов средствами PDEToolbox MATLAB. Вычисление коэффициента эффективности экранирования осуществляется для различных параметров магнитной жидкости.

Ключевые слова: магнитная жидкость; сферический экран; метод конечных элементов; PDE Toolbox MATLAB; коэффициент эффективности экранирования.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D_1 обозначает внутреннюю шарообразную область с центром в начале системы координат, заполненную воздухом, D_2 – область магнито-жидкостного экрана, покрывающего D_1 , D_3 – внешнюю область, заполненную воздухом. Определим расчетную область $D = \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2 \cup \bar{D}_3$, где $D_i \cap D_j = \emptyset \forall i, j = \overline{1,3}, i \neq j$. Определим размер экранирующего слоя как $\delta = R_2/R_1$, где R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы области D_2 , соответственно.

Уравнения Максвелла для непроводящих сред в стационарном случае имеют вид: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ в D , где $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ – векторы магнитного поля и магнитной индукции, соответственно, см. [1]. Магнитная индукция $\mathbf{B}$ связана с магнитным полем $\mathbf{H}$ и вектором намагниченности $\mathbf{M}$ соотношением $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, где μ_0 – константа проводимости в воздухе. Намагниченность магнитной жидкости $\mathbf{M}$ параллельна магнитному полю $\mathbf{H}$: $\mathbf{M} = M(H) \frac{\mathbf{H}}{H}$, где $M(H)$ задает закон намагничивания и $H = |\mathbf{H}|$. Закон намагничивания определяем соотношением Ланжевена

$$M(H) = M_s \left(\coth(\gamma H) - \frac{1}{\gamma H} \right), \quad \gamma = \frac{3\chi_L}{M_s},$$

где χ_L – начальная восприимчивость Ланжевена, M_s – намагниченность насыщения магнитной жидкости. Намагниченность воздуха равна 0.

Магнитное поле $\mathbf{H}$ выразим в терминах магнитостатического потенциала u соотношением $\mathbf{H} = -\nabla u$ как внутри магнитной жидкости, так и вне ее.

Так как области D_i инвариантны относительно вращения вокруг оси Oz , опишем их двухмерными меридиональными областями Ω_i : $D_i = \{(r, \theta, z) \mid (r, z) \in \Omega_i, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $\forall i = \overline{1,3}$, где (r, θ, z) – цилиндрические координаты. Обозначим через γ_1 и γ_2 , внутреннюю и внешнюю границы области экрана Ω_2 , соответственно. В силу осевой симметрии относительно оси Oz и симметрии относительно плоскости $z = 0$ трехмерная расчетная область D может быть описана как двухмерная при $r \geq 0, z \geq 0$. Введем безразмерные переменные

$$\tilde{r} = \frac{r}{R_1}, \tilde{z} = \frac{z}{R_1}, \tilde{H} = \frac{H}{H_0}; \quad \tilde{\nabla} = R_1 \nabla, \tilde{u} = \frac{u}{H_0 R_1},$$

где H_0 – интенсивность приложенного на бесконечности магнитного поля, направленного вдоль оси Oz . Геометрия задачи в безразмерных переменных (опустим тильду в обозначениях) представлена на рисунке 1.

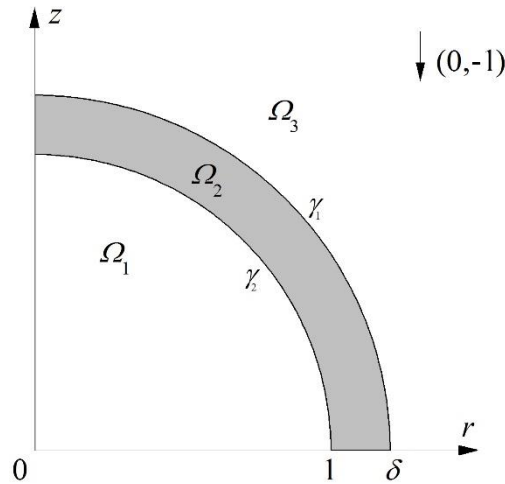


Рис. 1. Геометрия расчетной области

Обезразмеренные уравнения Максвелла в терминах магнитостатического потенциала запишутся в виде (опустим тильду в обозначениях)

$$-\nabla \cdot (\mu_i(|\nabla u_i|) \nabla u_i) = 0 \quad \text{в } \Omega_i, \quad (1)$$

$$\mu_1 = \mu_3 = 1, \mu_2(|\nabla u_2|) = 1 + 3\chi_L \frac{(\coth(\gamma|\nabla u_2|) - \frac{1}{\gamma|\nabla u_2|})}{\gamma|\nabla u_2|}, \gamma = \frac{3\chi_L H_0}{M_s}.$$

Условия перехода, граничные условия симметрии относительно оси z и плоскости $z = 0$ и условие на бесконечности записываются в виде

$$u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{на } \gamma_1, \quad u_2 = u_3, \quad \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{\partial u_3}{\partial n} \quad \text{на } \gamma_2; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = 0, \forall i = \overline{1,3} \quad \text{для } r = 0; \quad u_i = 0, \forall i = \overline{1,3} \quad \text{для } z = 0; \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_3 = z. \quad (4)$$

Задача (1)–(4) решается для магнитоэстатического потенциала внутри и вне магнитной жидкости, при различных значениях безразмерного приложенного магнитного поля γ , начальной восприимчивости Ланжевена χ_L и размера экрана δ .

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

С помощью метода конечных элементов осуществлялось численное решение математической модели (1)–(4) для ограниченной области $\Omega_3 = (0,5) \times (0,5) \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$ средствами библиотеки PDE Toolbox в MATLAB. В результате итерационного решения нелинейных уравнений была построена кусочно-линейная аппроксимация для магнитоэстатического потенциала на треугольной сетке (рис. 2). В области сферического экрана наблюдается искривление контурных линий для потенциала и изменение вертикального направления магнитного поля.

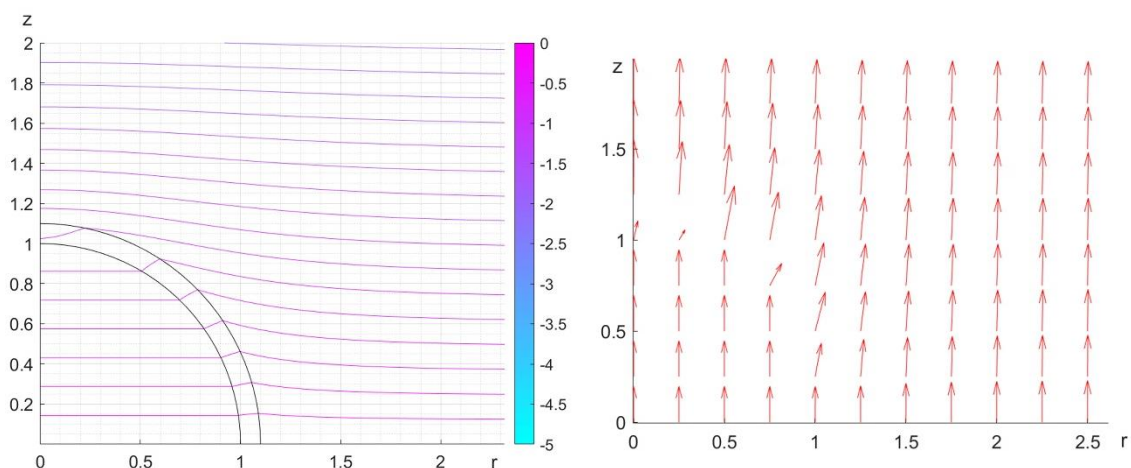


Рис. 2. Графики изолиний магнитоэстатического потенциала (слева) и градиента от потенциала (справа), для параметров $\gamma = 0.01$, $\chi_L = 4.06$, $\delta = 1.1$

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ЭФФЕКТИВНОСТИ ЭКРАНИРОВАНИЯ

Для оценки эффективности экранирования сферическим слоем магнитной жидкости вычисляется коэффициент эффективности экранирования K_{ef} , который оценивает уменьшение интенсивности приложенного магнитного поля H_0 при переходе во внутреннюю область, ограниченную сферическим экраном: $K_{ef} = 1/|\nabla u_1(0,0)|$.

Были проведены расчеты коэффициента K_{ef} при различных значениях параметров. Проверка вычислений осуществлялась сравнением с результатом из [2], соответствующим линейной модели при $\mu_2 = 1 + \chi_L$:

$$K_{ef,linear} = \frac{1}{9\mu_2} \left((2\mu_2 + 1)(\mu_2 + 2) - \frac{2}{\delta^3} (\mu_2 - 1)^2 \right). \quad (5)$$

В таблице 1 приведена относительная ошибка для коэффициента эффективности экранирования при сравнении (5) с результатами расчетов для нелинейной модели (1)–(4). Отметим, что с ростом приложенного поля γ ошибка растет из-за влияния нелинейности модели.

Таблица 1

Величина относительной ошибки для различных значений параметров χ_L и γ

$\chi_L \backslash \gamma$	1	10	100
4,06	0,008	0,124	0,152
7,61	0,010	0,202	0,270
9,97	0,011	0,239	0,332

На рисунке 3 видно, что наилучшая эффективность экранирования наблюдается в слабых магнитных полях. Отметим, что качественное поведение зависимости K_{ef} от приложенного поля для сферического экрана аналогично соответствующим результатам для цилиндрического экрана [3].

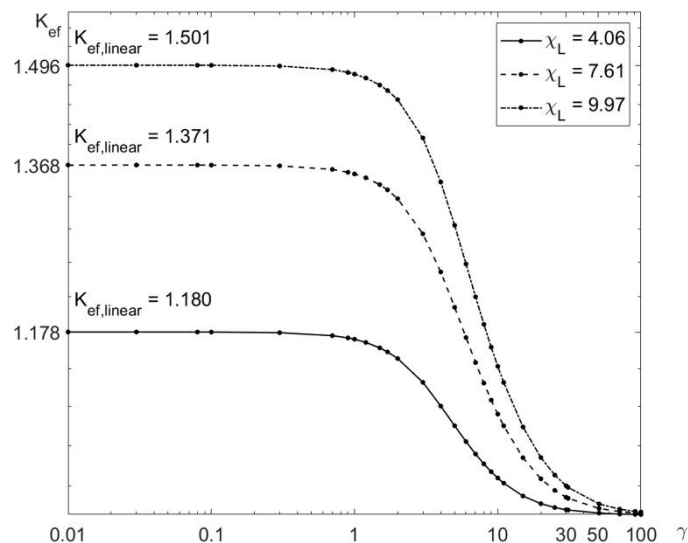


Рис. 3. Зависимость коэффициента эффективности экранирования от безразмерного приложенного поля γ и начальной восприимчивости Ланжевена χ_L

Библиографические ссылки

1. Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics. Dover Pubns, 1998.
2. Celozzi S., Araneo R., Lovat G. Electromagnetic Shielding. Wiley – IEEE Press, 2008.
3. Lavrova O., Polevikov V., Polevikov S., Numerical modeling of magnetic shielding by a cylindrical ferrofluid layer // Mathematical Modelling and Analysis, 2019. Vol. 24, no. 2. P. 155-70.