

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

 О.И. Прохоренко

«20» декабря 2022 г.

Регистрационный № УД – 11433/уч.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направления специальности:

1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)

2022 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021, типового учебного плана №G 31-1-011/пр. тип. от 31.03.2021, учебного плана № G 31-1-004/уч. от 25.05.2021.

СОСТАВИТЕЛИ:

Н.В. Бровка, заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор;

В.Г. Кротов, профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук;

А.Г. Вопнярская, старший преподаватель кафедры теории функций Белорусского государственного университета;

Н.И. Карпович, старший преподаватель кафедры теории функций Белорусского государственного университета.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Е.А. Баркова, заведующий кафедрой высшей математики УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», кандидат физико-математических наук, доцент;

И.Н. Катковская, доцент кафедры общей и медицинской физики Международного государственного экологического института им. А.Д. Сахарова, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой теории функций Белорусского государственного университета (протокол № 8 от 05.12.2022);

Научно-методическим Советом Белорусского государственного университета (протокол № 3 от 15.12.2022).

Заведующая кафедрой теории функций



Н.В. Бровка

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного» – создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики.

Образовательная цель: изложение основ комплексного анализа и возможностей его использования в моделях классического и современного естествознания.

Развивающая цель: формирование у студентов умений использования технических возможностей комплексного анализа, самостоятельного построения и исследования математических моделей.

Задачи учебной дисциплины:

- освоение важнейших понятий теории функций комплексного переменного (предел, непрерывность, дифференцируемость);
- знакомство с понятием многозначных функций комплексного переменного и понятием аналитического продолжения;
- изучение основ теории интегрирования и освоение специальных приемов интегрирования функций комплексного переменного, в том числе различных аспектов теории вычетов;
- изучение основ геометрической теории функций комплексного переменного и отработка навыков построения специальных отображений элементарными функциями;
- разработка элементов теории рядов в комплексной области и классификация особых точек однозначного характера.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Теория функций комплексного переменного» относится к модулю «Математический анализ 2» компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная дисциплина «Теория функций комплексного переменного» тесно связана с такими дисциплинами как «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики». В рамках дисциплины «Теория функций комплексного переменного» на случай комплексных переменных переносятся теория функциональных рядов и теория интегрирования, рассматриваемые при изучении дисциплины «Математический анализ». С другой стороны, аналитические методы, разрабатываемые на основе базовых понятий дисциплины «Теория функций комплексного переменного», используются при изучении учебной дисциплины «Уравнения математической физики». На базе теории функций комплексного переменного строятся примеры, иллюстрирующие основные элементы теории метрических, нормированных

и гильбертовых пространств (дисциплина «Функциональный анализ»). Свойства функций комплексного переменного используются при построении спектральной теории операторов и теории разрешимости некоторых классов интегральных уравнений (дисциплины «Функциональный анализ» и «Интегральные уравнения»).

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

Универсальные компетенции:

УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации.

УК-5. Быть способным к саморазвитию и самосовершенствованию в профессиональной деятельности.

УК-6. Проявлять инициативу и быть адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности.

Специализированные компетенции:

СК-3. Применять основные алгоритмы компьютерной геометрии и современные математические средства визуализации изображений и анимации.

СК-4. Анализировать основные закономерности случайных явлений, разрабатывать вероятно-статистические модели для прикладных задач.

Базовые профессиональные компетенции:

БПК-2. Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира.

БПК-4. Применять теоретические знания и навыки в самостоятельной исследовательской деятельности.

БПК-5. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы для решения теоретических и прикладных математических задач.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия теории функций одной комплексного переменного;
- доказательства фактов и алгоритмы решения задач комплексного анализа;
- новейшие достижения в области теории функций комплексного переменного применительно к задачам естествознания;

уметь:

- использовать основные результаты комплексного анализа в математике;
- использовать теоретические основы теории функций комплексного переменного в практической деятельности;

владеть:

- методами теории аналитических функций;
- методами решения основных вычислительных задач теории функций комплексного переменного.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 4 и 5 семестрах дневной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного» отведено 240 часов, в том числе 140 аудиторных часов, из них:

– лекции – 68 часов, лабораторные занятия – 62 часа, управляемая самостоятельная работа (аудиторный контроль) – 10 часов;

– 4 семестр – всего: 120 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часа, управляемая самостоятельная работа (аудиторный контроль) – 4 часа.

Трудовое количество учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет

– 5 семестр – всего: 120 часов, в том числе 72 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 32 часа, управляемая самостоятельная работа (аудиторный контроль) – 6 часов.

Трудовое количество учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение в комплексный анализ

Предмет теории функций комплексного переменного.

Комплексная плоскость. Операции с комплексными числами. Поле комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрические формы записи.

Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана, стереографическая проекция, сферическое расстояние.

Топология (расширенной) плоскости, компактность, связность. Предел, непрерывность.

Кривые и области, контуры, многосвязные области.

Тема 2. Дифференцируемые функции комплексного переменного

Дифференцируемые функции комплексного переменного. Правила дифференцирования (производная и арифметические операции, производная сложной функции, производная обратной функции).

Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Конформные отображения. Однолистность. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолистности.

Тема 3. Элементарные аналитические функции

Степенная функция с натуральным показателем, полиномы.

Линейная и дробно-линейная функции. Конформность и групповое свойство. Круговое свойство. Неподвижные точки. Сохранение симметрии. Автоморфизмы единичного круга. Функция Жуковского.

Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей и о соответствии границ при конформном отображении.

Понятия многозначной аналитической функции, точки ветвления.

Показательная функция и ее свойства (групповое свойство, формула Эйлера, экспоненциальная форма записи комплексных чисел, множество значений, периодичность).

Тригонометрические функции их свойства (четность, периодичность, формулы сложения, множества значений).

Гиперболические функции и их свойства (связь с тригонометрическими функциями, формулы сложения, множества значений).

Логарифмическая функция и ее главное значение, свойства (связь с экспоненциальной функцией, групповое свойство, выделение однозначной ветви).

Степенная функция и степень ее многозначности в зависимости от показателя (случаи целого, рационального и иррационального действительного показателя).

Обратные тригонометрические и гиперболические функции (свойства, выделение однозначной ветви).

Тема 4. Интегрирование функций комплексного переменного

Пути и кривые на плоскости. Комплексные криволинейные интегралы и их свойства. Первообразная, формула Ньютона-Лейбница.

Интегральная теорема Коши для простого и составного контуров. Интегральная формула Коши.

Формула среднего значения и принцип максимума. Формула Шварца. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций, формулы Коши для производных аналитических функций. Теорема Морера.

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Сопряженные гармонические функции. Принцип максимума, теорема единственности, теорема о среднем. Интегралы Пуассона и Шварца.

Тема 5. Последовательности и ряды аналитических функций

Степенной ряд, теорема Абеля. Радиус сходимости, формула Коши – Адамара. Аналитичность суммы степенного ряда. Разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения, ряд Тейлора.

Эквивалентные описания аналитичности.

Нули аналитической функции, порядок нуля. Локальная форма единственности. Теорема единственности Вейерштрасса.

Последовательности аналитических функций. Сходимость внутри области.

Принцип счетной компактности. Теорема Витали. Теорема Вейерштрасса о последовательностях и рядах аналитических функций. Теорема Рунге.

Тема 6. Ряд Лорана и особые точки однозначного характера

Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения. Формулы для коэффициентов разложения, неравенства Коши.

Теорема об устранимой особой точке, теорема Лиувилля. Классификация изолированных особых точек однозначного характера. Полус и существенно особая точка. Случай бесконечно удаленной точки. Теорема Сохоцкого, понятие о теореме Пикара. Целые и мероморфные функции.

Тема 7. Теория вычетов и ее приложения.

Определение вычета, теорема о вычетах. Формулы для вычисления вычетов. Теорема Коши о вычетах. Вычет в бесконечно удаленной точке. Теорема о полной сумме вычетов.

Применение к вычислению интегралов (несобственные интегралы, интегралы от произведений и от тригонометрических функций).

Логарифмический вычет, принцип аргумента. Теорема Руше, теорема Гурвица. Принцип сохранения области. Принцип сохранения границ.

Тема 8. Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение произвольных функциональных элементов.

Аналитическое продолжение через области и кривые.

Элемент аналитической функции и его продолжение. Принцип симметрии Римана-Шварца.

Тема 9. Однолистные функции

Теорема о числе прообразов.

Критерий локальной однолистности.

Особые точки однолистных функций.

Последовательности однолистных функций.

Тема 10. Конформное отображение областей

Аutomорфизмы основных областей.

Теорема Римана.

Тема 11. Конформные отображения многоугольников

Эллиптические интегралы 1-го рода.

Эллиптический синус.

Формула Кристоффеля–Шварца.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСП (аудиторный контроль)	Форма контроля Знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	4 семестр							
1	Введение в комплексный анализ	2			2			
2	Дифференцируемые функции комплексного переменного	4			4			
3	Элементарные аналитические функции	8			8		2	коллоквиум
4	Интегрирование функций комплексного переменного	10			8		2	контрольная работа
5	Последовательности и ряды аналитических функций	10			8			проверка индивидуальных заданий
	Всего за 4 семестр	34			30		4	
	5 семестр							
6	Ряд Лорана и особые точки однозначного характера	10			8		2	контрольная работа
7	Теория вычетов и ее приложения	8			8		2	коллоквиум
8	Аналитическое продолжение	4			4			
9	Однолистные функции	4			4			

10	Конформное отображение областей	4					4		
11	Конформные отображения многоугольников	4					4	2	контрольная работа
	Всего за 5 семестр	34					32	6	
	Всего по дисциплине	68					62	10	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

- 1 Ганичева, А. В. Основы теории функции комплексной переменной. Операционное исчисление: учебное пособие для вузов / А. В. Ганичева. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 148 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/173082>.
- 2 Зверович, Э. И. Вещественный и комплексный анализ: учеб. пособие для студ. учреждений, обеспечивающих получение высш. образования по мат. специальностям: в 6 ч. Кн. 4: Ч. 6: Теория аналитических функций комплексного переменного / Э. И. Зверович. - Минск: Вышэйшая школа, 2008. — 320 с.
- 3 Коган, Е. А. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление: учебное пособие / Е. А. Коган, Г. С. Жукова. — Москва: ИНФРА-М, 2020. — 180 с. — Текст: электронный. — URL: <https://znanium.com/catalog/product/1058889>.
- 4 Кротов В.Г., Ровба Е.А., Старовойтов А.П., Сетько Е.А., Смотрицкий К.А. Теория функций комплексного переменного (учебное пособие) // Минск: Вышэйшая школа, 2019. — 431 с.
- 5 Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. — 3-е изд., испр. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 448 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/212138>.
- 6 Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной: учебное пособие / И. М. Петрушко, А. Г. Елисеев, В. И. Качалов, С. Ф. Кудин. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 368 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210425>.

Перечень дополнительной литературы

- 7 Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учеб. пособие для студ. вузов / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. — Изд. 4-е, перераб. — Москва: Физматлит, 2004. — 312с.
- 8 Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного: учеб. пособие для студ. ун-тов, обуч. по спец. «Математика», «Физика», «Механика» / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — Изд. 5-е, испр. — Москва: Наука, 1987. — 688 с.
- 9 Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного: учебник для студ. инженерно-физических и физико-технических спец. вузов / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. — Изд. 3-е, испр.

- 13 – Москва: Наука, 1989. – 477с.
- 10 Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ: учебник для студ. мех-мат. спец. ун-тов: [в 2 ч.]. Ч. 1: Функции одного переменного / Б. В. Шабат. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – Москва: Наука, 1985. – 336 с.
- 11 Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968 и др. издания.
- 12 Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1974 и др. издания.
- 13 Сборник задач по теории аналитических функций / Под ред. М.А. Евграфова. М., 1972.
- 14 Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для текущего контроля качества усвоения знаний студентами по учебной дисциплине «Теория функций комплексного переменного» используется следующий диагностический инструментарий:

- коллоквиум;
- контрольная работа;
- проверка индивидуальных заданий.

Формой текущей аттестации учебным планом предусмотрен зачет и экзамен.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.).
2. Положение о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора от 31.03.2020 № 189-ОД).
3. Критерии оценки результатов учебной деятельности обучающихся в учреждениях высшего образования по десятибалльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 28.05.2013 г. № 09-10/53-ПО).

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- коллоквиум – 50 %;
- индивидуальные задания – 25 %;

– контрольная работа – 25 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости (рейтинговой системы оценки знаний) и отметки на зачете/экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей успеваемости составляет 50 %, отметки на зачете/ экзаменационной отметки – 50%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 3. Элементарные аналитические функции (2 ч)

Примерный перечень вопросов:

1. Степенная функция с натуральным показателем, полиномы.
 2. Линейная и дробно-линейная функции.
 3. Функция Жуковского. Профили Жуковского.
 4. Показательная функция и ее свойства.
 5. Тригонометрические функции и их свойства (четность, периодичность, формулы сложения, множества значений).
 6. Гиперболические функции и их свойства (связь с тригонометрическими функциями, формулы сложения, множества значений).
 7. Логарифмическая функция и ее главное значение, свойства (связь с экспоненциальной функцией, групповое свойство, выделение однозначной ветви).
 8. Степенная функция и степень ее многозначности в зависимости от показателя (случаи целого, рационального и иррационального действительного показателя).
 9. Обратные тригонометрические и гиперболические функции (свойства, выделение однозначной ветви).
- (Форма контроля – коллоквиум)*

Тема 5. Последовательности и ряды аналитических функций (2 ч)

Примерный перечень заданий:

Задание 1. Исследовать интеграл на абсолютную и условную сходимость.

Задание 2. Исследовать интеграл на равномерную сходимость на указанном множестве.

Задание 3. Разложив предварительно производную, путем почленного интегрирования получить разложение в степенной ряд функции.

Задание 4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x .

Задание 5. Найти сумму ряда.

(Форма контроля – проверка индивидуальных заданий).

Тема 6. Ряд Лорана и особые точки однозначного характера (2 ч)

Примерный перечень заданий:

Задание 1. Ряд Лорана, область его сходимости.

Задание 2. Разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения.

Задание 3. Формулы для коэффициентов разложения, неравенства Коши.

Задание 4. Теорема об устранимой особой точке, теорема Лиувилля.

Задание 5. Классификация изолированных особых точек однозначного характера.

Задание 6. Поллюс и существенно особая точка.

Задание 7. Случай бесконечно удаленной точки.

Задание 8. Теорема Сохоцкого, понятие о теореме Пикара.

(Форма контроля – контрольная работа).

Тема 7. Теория вычетов и ее приложения (2 ч)

Примерный перечень вопросов:

1. Определение вычета, теорема о вычетах. Формулы для вычисления вычетов. Применение к вычислению интегралов.
2. Логарифмический вычет, принцип аргумента.
3. Теорема Руше, теорема Гурвица. Принцип сохранения области.
4. Понятие аналитического продолжения.
5. Целые и мероморфные функции.

(Форма контроля – коллоквиум).

Тема 11. Конформные отображения многоугольников (2 ч)

Примерный перечень заданий:

1. Отобразите двуугольник $D = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2i| < 2, |z| < 2\}$ на верхнюю полуплоскость.
2. Отобразите область $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \setminus \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ на единичный круг так, чтобы выполнялись условия: $w\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \arg w'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.
3. Найдите отображение, переводящее верхнюю полуплоскость в треугольник $\left(0, 1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ так, чтобы выполнялись условия: $w(0)=0, w(1)=0, w(\infty) = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.
4. Найдите отображение, переводящее верхнюю полуплоскость на область так, чтобы выполнялись условия: $w(0)=0, w(1)=0, w(\infty)=\infty$.

(Форма контроля – контрольная работа).

Примерная тематика лабораторных занятий

Занятие 1. Основные определения и факты, связанные с комплексными числами. Расширенная комплексная плоскость.

Занятие 2. Топология (расширенной) комплексной плоскости. Предел, непрерывность.

Занятие 3. Дифференцируемые функции комплексного переменного.

Занятие 4. Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Занятие 5. Понятие о конформных отображениях.

Занятие 6. Степенная функция с натуральным показателем, полиномы.

Занятие 7. Линейная и дробно-линейная функции.

Занятие 8. Функция Жуковского. Профили Жуковского.

Занятие 9. Элементарные функции.

Занятие 10. Интегральная теорема Коши.

Занятие 11. Сходимость, равномерная сходимость внутри области. Теорема Вейерштрасса о последовательностях и рядах аналитических функций.

Занятие 12. Разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения, ряд Тейлора. Действия со степенными рядами.

Занятие 13. Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения. Формулы для коэффициентов разложения, неравенства Коши.

Занятие 14. Классификация изолированных особых точек однозначного характера.

Занятие 15. Определение вычета, теорема о вычетах. Формулы для вычисления вычетов. Применение к вычислению интегралов в области.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Теория функций комплексного переменного» используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные

материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, экзамену, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.). При составлении индивидуальных заданий по учебной дисциплине

задания располагаются в порядке возрастания их сложности: задания, формирующие достаточные знания по изученному учебному материалу на уровне узнавания; задания, формирующие компетенции на уровне воспроизведения; задания, формирующие компетенции на уровне применения полученных знаний.

Примерные задания для самостоятельной работы студентов:

Тема 3. Элементарные аналитические функции

Задание 1 (уровень узнавания).

Дайте определение аналитической функции.

Задание 2 (уровень воспроизведения).

Является ли функция аналитической?

Задание 3 (уровень применения полученных знаний).

Выделить действительную и мнимую части функции $w = f(z)$ и проверить для нее выполнение условий Коши-Римана:

$$w = \operatorname{Im} z.$$

Задание 4 (уровень применения полученных знаний).

Найти аналитическую функцию $w = U(x, y) + iV(x, y)$ по заданной действительной части при условии, что $f(0) = 0$.

Задание 5 (уровень применения полученных знаний).

Найти аналитическую функцию $w = U(x, y) + iV(x, y)$ по заданной мнимой части $V = 3x + 2xy$.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Дифференцируемые функции комплексного переменного.
2. Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
3. Степенная функция с натуральным показателем, полиномы.
4. Линейная и дробно-линейная функции.
5. Функция Жуковского. Профили Жуковского.
6. Показательная функция и ее свойства.
7. Тригонометрические функции и их свойства.
8. Гиперболические функции и их свойства.
9. Логарифмическая функция и ее главное значение, свойства.
10. Степенная функция и степень ее многозначности в зависимости от показателя.

11. Обратные тригонометрические и гиперболические функции.
12. Интегральная теорема Коши для простого и составного контуров.
13. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши.
14. Гармонические функции, их связь с аналитическими.
15. Интеграл Пуассона.
16. Интеграл Шварца.
17. Функциональные последовательности и ряды.
18. Виды сходимости.
19. Сходимость, равномерная сходимость внутри области.
20. Нули аналитической функции, порядок нуля.
21. Ряд Лорана, область его сходимости.
22. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.
23. Степенной ряд. Радиус сходимости.
24. Разложение аналитической функции в степенной ряд.
25. Классификация изолированных особых точек.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Основные определения и факты, связанные с комплексными числами. Расширенная комплексная плоскость.
2. Сфера Римана, стереографическая проекция, сферическое расстояние.
Топология (расширенной) комплексной плоскости. Предел, непрерывность.
3. Дифференцируемые функции комплексного переменного. Правила дифференцирования (производная и арифметические операции, производная сложной функции, производная обратной функции).
4. Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
5. Понятие о конформных отображениях. Однолиственность. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолиственности.
6. Степенная функция с натуральным показателем, полиномы.
7. Линейная и дробно-линейная функции.
8. Конформность и групповое свойство. Круговое свойство. Неподвижные точки. Сохранение симметрии. Автоморфизмы единичного круга.
9. Понятие о теореме Римана о конформной эквивалентности односвязных областей и о соответствии границ при конформном отображении.
10. Понятие о многозначных аналитических функциях, их точках ветвления.
11. Функция Жуковского. Профили Жуковского.

12. Показательная функция и ее свойства (групповое свойство, формула Эйлера, экспоненциальная форма записи комплексных чисел, множество значений, периодичность).
13. Тригонометрические функции и их свойства (четность, периодичность, формулы сложения, множества значений).
14. Гиперболические функции и их свойства (связь с тригонометрическими функциями, формулы сложения, множества значений).
15. Логарифмическая функция и ее главное значение, свойства (связь с экспоненциальной функцией, групповое свойство, выделение однозначной ветви).
16. Степенная функция и степень ее многозначности в зависимости от показателя (случаи целого, рационального и иррационального действительного показателя).
17. Обратные тригонометрические и гиперболические функции. (свойства, выделение однозначной ветви).
18. Пути и кривые на плоскости. Комплексные криволинейные интегралы. Первообразная, формула Ньютона-Лейбница.
19. Интегральная теорема Коши для простого и составного контуров. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши.
20. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций, формулы Коши для производных аналитических функций. Теорема Морера.
21. Гармонические функции, их связь с аналитическими. Принцип максимума модуля, теорема единственности, теорема о среднем.
22. Интегралы Пуассона и Шварца.
23. Функциональные последовательности и ряды. Виды сходимости. Сходимость, равномерная сходимость внутри области. Теорема Вейерштрасса о последовательностях и рядах аналитических функций. Теорема Рунге.
24. Степенной ряд, теорема Абеля. Радиус сходимости. Формула Коши – Адамара. Аналитичность суммы степенного ряда. Разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения, ряд Тейлора. Действия со степенными рядами.
25. Нули аналитической функции, порядок нуля. Теорема единственности для аналитических функций.
26. Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения. Формулы для коэффициентов разложения, неравенства Коши.
27. Теорема об устранимой особой точке, теорема Лиувилля. Классификация изолированных особых точек однозначного характера.
28. Полос и существенно особая точка. Случай бесконечно удаленной точки.
29. Теорема Сохоцкого, понятие о теореме Пикара.
30. Определение вычета, теорема о вычетах. Формулы для вычисления вычетов. Применение к вычислению интегралов.
31. Логарифмический вычет, принцип аргумента.

- 32. Теорема Руше, теорема Гурвица. Принцип сохранения области.
- 33. Понятие аналитического продолжения.
- 34. Целые и мероморфные функции.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Функциональный анализ	кафедра функционального анализа и аналитической геометрии	Нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 8 от 05.12.2022)
2. Дифференциальные уравнения	кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	Нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 8 от 05.12.2022)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 2022 г.)

Заведующая кафедрой
Доктор педагогических наук, профессор _____ Н.В. Бровка

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
Доктор физико-математических наук, профессор _____ С.М. Босяков