Алгебраические точки на плоскости

В. В. ЛЕБЕДЬ
Институт математики
Академии наук Республики Беларусь
e-mail: vvv_vikki@tut.by

В. И. БЕРНИК
Институт математики
Академии наук Республики Беларусь
e-mail: bernik@im.bas-net.by

УДК 511.36

Ключевые слова: распределение точек, алгебраические точки, количественные оценки меры.

Аннотация

В статье получены количественные оценки для меры точек (x, y) заданного прямоугольника, для которых можно построить многочлены $P(t)$ с малыми (относительно высоты многочлена) значениями $P(x)$ и $P(y)$. Обсуждаются возможности использования этих оценок в задачах о распределении алгебраических точек на плоскости.

Abstract

V. V. Lebed, V. I. Bernik, Algebraic points on the plain, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 73—80.

The article contains quantitative estimates for the measure of points (x, y) of a given rectangle admitting the construction of polynomials $P(t)$ with small (with respect to the height of the polynomial) values of $P(x)$ and $P(y)$. Such estimates can be used in the problem of distribution of algebraic points on the plane.

В последние 15 лет в метрической теории диофантовых приближений было получено несколько результатов, близких к окончательным. Классическая теорема Хинчина о приближении действительных чисел рациональными была обобщена вначале на целочисленные многочлены [4,7], а затем на произвольные невырожденные кривые и многообразия [2, 5, 9]. Одним из основных моментов доказательства этих результатов стало изучение распределения действительных алгебраических чисел ограниченной степени и нулей целочисленных комбинаций линейно независимых над $\mathbb{Q}$ функций. Удалось доказать, что они распределены приблизительно так же, как рациональные числа.

Задачи о количестве целых точек в определённых фигурах и телах являются классическими в теории чисел. В последнее время появились работы по распределению рациональных точек с ограниченными знаменателями в узких фигурах, например вблизи гладких кривых [1, 10]. В устной беседе со вторым из авторов профессор Вирзинг поставил задачу о распределении алгебраических точек на

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 6, с. 73—80.

плоскости. Под такими точками будем понимать точки вида $M = (\alpha, \beta)$, где α и β — действительные алгебраические числа. Если β никак не связано с α, то задача сразу же превращается в две одномерные и самостоятельного интереса не представляет. Так, в случае рациональных точек рассматриваются точки вида $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right)$, обе координаты которых суть корни многочленов первой степени с одним и тем же старшим коэффициентом. В данной статье под алгебраической точкой будем понимать точку $M = (\alpha, \beta)$, где α и β — действительные корни одного и того же многочлена $P(x)$, $\deg(P) \leqslant n$.

В одномерном случае большое количество действительных алгебраических чисел получается из конструкции целочисленных многочленов $P(x)$ с малым значением при данном x и большим значением $|P'(x)|$. Построить такие многочлены удаётся не для всех x, но если I — некоторый интервал, то для множества B с мерой $\mu B \geqslant \frac{1}{2}\mu I$ это можно сделать. Последний результат есть следствие одной непростой метрической теоремы. Если мы хотим изучать распределение алгебраических точек в узких областях, то качественного факта о большой мере множества B недостаточно. Нужны количественные оценки. Данная работа и посвящена получению таких оценок. Доказательство будет существенно зависеть от величины некоторого параметра, который можно конструктивно вычислить для каждого многочлена.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}$, $\tilde{\delta} > 0$. Через $c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать величины, зависящие только от n. Будем использовать символ Виноградова: $f \ll g$ будет означать, что $f \leqslant c_1 g$, а $f \asymp g$ — что $g \ll f \ll g$. Все используемые далее константы могут быть вычислены конструктивно.

Возьмём некоторое достаточно малое $\varepsilon > 0$ и положим $T = [n\varepsilon^{-1}] + 1$, так что $nT^{-1} < \varepsilon$.

Зафиксируем также прямоугольник $R \subset [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Для прямоугольника $S \subset R$, $S = S_x \times S_y$, такого что для $(x, y) \in S$ справедливо $|x - y| \geqslant \tilde{\delta}$, и для произвольных действительных $\nu_x \geqslant -1$, $\nu_y \geqslant -1$, $Q > Q_0(n, \tilde{\delta}, R)$ обозначим через $B_{n,S}(\nu_x, \nu_y, Q)$ множество тех $(x, y) \in S$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| \leqslant Q^{-\nu_x}, \\ |P(y)| \leqslant Q^{-\nu_y}, \\ H(P) \leqslant Q \end{cases} \tag{1}$$

разрешима в многочленах $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $\deg(P) \leqslant n$. (Здесь и далее через $H(P)$ обозначаем высоту многочлена $P(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$, $H(P) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$.) Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *При* $\nu_x + \nu_y \geqslant n - 1$

$$\mu B_{n,S}(\nu_x, \nu_y, Q) \leqslant c_1 \max\Bigl(Q^{n-1-\nu_x-\nu_y}|S|, Q^{-\frac{1}{8}}\Bigr). \tag{2}$$

Пусть далее

$$P(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0 = a_n(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n),$$

$a_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{0, n}$, $H = H(P)$.

Для случая $n \leqslant 2$ утверждение доказывается непосредственно, так что далее считаем $n \geqslant 3$.

Теорему будем доказывать для неприводимых многочленов. На приводимые многочлены она распространяется следующим образом. Разобьём все приводимые многочлены $P(t)$, $\deg(P) \leqslant n$, $H(P) \leqslant Q$, на конечное число классов, обозначаемых $(k, n_1, \ldots, n_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, где $2 \leqslant k \leqslant n$ — количество неприводимых сомножителей $P_i(t)$, $n_i = \deg(P_i)$ — их степени, $\lambda_i = [\mu_i T]$, $0 \leqslant \lambda_i \leqslant [T]$, где $H(P_i) = Q^{\mu_i}$. (Здесь и далее пользуемся известным свойством: если $P(t) = P_1(t)\ldots P_k(t)$, $P(t), P_1(t), \ldots, P_k(t) \in \mathbb{Z}[t]$, то $H(P) \asymp H(P_1)\ldots H(P_k)$, см., например, [3].) Рассмотрим случай $k = 2$, так как обобщение на произвольный случай трудностей не представляет. Итак,

$$\begin{gathered}
P(t) = P_1(t)P_2(t),\\
\deg(P_1) = n_1, \quad \deg(P_2) = n - n_1,\\
Q^{\frac{\lambda}{T}} \leqslant H(P_1) \leqslant Q^{\frac{\lambda+1}{T}}, \quad Q^{1-\frac{\lambda+1}{T}} \ll H(P_2) \ll Q^{1-\frac{\lambda}{T}}.
\end{gathered}$$

Не нарушая общности, будем считать $n_1 \leqslant n/2$.

Пусть $|P(x)| \leqslant \varepsilon_x = Q^{-\nu_x}$ для $x \in \sigma_x(P)$. Найдём такое $\tilde{\varepsilon}_x$, что $|P_1(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon}_x$ для $x \in \tilde{\sigma}_x(P)$, $\mu\tilde{\sigma}_x(P) < 1/2\mu\sigma_x(P)$, но $|P_1(x)| \leqslant 2\tilde{\varepsilon}_x$ для $x \in \bar{\sigma}_x(P)$, $\mu\bar{\sigma}_x(P) > 1/2\mu\sigma_x(P)$. Согласно [8, лемма 2] $|P_1(x)| \ll \tilde{\varepsilon}_x$ и $|P_2(x)| \ll \varepsilon_x/\tilde{\varepsilon}_x$ на всём $\sigma_x(P)$. Аналогично, $|P_1(y)| \ll \tilde{\varepsilon}_y$ и $|P_2(y)| \ll \varepsilon_y/\tilde{\varepsilon}_y$ на всём $\sigma_y(P)$. По индукции (с базой $n \leqslant 2$) имеем

$$\begin{gathered}
\mu B_{n_1,S}\left(\log_Q(\tilde{\varepsilon}_x), \log_Q(\tilde{\varepsilon}_y), Q^{\frac{\lambda+1}{T}}\right) \ll \tilde{\varepsilon}_x\tilde{\varepsilon}_y Q^{(n_1-1)\frac{\lambda+1}{T}}|S|,\\
\mu B_{n-n_1,S}\left(\log_Q\left(\frac{\varepsilon_x}{\tilde{\varepsilon}_x}\right), \log_Q\left(\frac{\varepsilon_y}{\tilde{\varepsilon}_y}\right), Q^{1-\frac{\lambda}{T}}\right) \ll \frac{\varepsilon_x\varepsilon_y}{\tilde{\varepsilon}_x\tilde{\varepsilon}_y} Q^{(n-n_1-1)(1-\frac{\lambda}{T})}|S|.
\end{gathered}$$

Если одна из правых частей этих неравенств меньше $c\varepsilon_x\varepsilon_y Q^{n-1}|S| = Q^{n-1-\nu_x-\nu_y}|S|$, то утверждение теоремы доказано. В противном случае

$$\begin{cases}
\tilde{\varepsilon}_x\tilde{\varepsilon}_y Q^{(n_1-1)\frac{\lambda+1}{T}} \gg \varepsilon_x\varepsilon_y Q^{n-1},\\
\dfrac{\varepsilon_x\varepsilon_y}{\tilde{\varepsilon}_x\tilde{\varepsilon}_y} Q^{(n-n_1-1)(1-\frac{\lambda}{T})} \gg \varepsilon_x\varepsilon_y Q^{n-1},
\end{cases}$$

откуда, перемножая, получаем

$$Q^{(n_1-1)\frac{\lambda+1}{T}+(n-n_1-1)(1-\frac{\lambda}{T})} \gg \varepsilon_x\varepsilon_y Q^{2(n-1)} = Q^{2n-2-\nu_x-\nu_y} = Q^{n-1}.$$

(Считаем $\nu_x + \nu_y = n - 1$; это может только ухудшить оценку сверху.) Тогда

$$(n_1-1)\frac{\lambda+1}{T}+(n-n_1-1)\left(1-\frac{\lambda}{T}\right)\geqslant n-1,$$
$$\frac{\lambda}{T}(2n_1-n)+n_1\left(\frac{1}{T}-1\right)-\frac{1}{T}\geqslant 0.$$

Учитывая, что $\lambda\geqslant 0$, $T\geqslant 1$, $n_1\leqslant n/2$, получаем противоречие.

Потребуем также выполнения условия $|a_n|>c_2H$. Это приведёт к оценке для корней многочлена $P(t)$ вида

$$|\alpha_j|\leqslant c_3,\quad j=\overline{1,n}. \tag{3}$$

Сведение общего случая к таким многочленам достаточно громоздко; его можно провести аналогично работам [3, 6].

Выполнение первых двух неравенств в (1) для малых $Q^{-\nu_x}$, $Q^{-\nu_y}$ свидетельствует о наличии корней α_x и α_y многочлена $P(t)$, близких к x и y соответственно. Отметим, что α_x и α_y могут быть комплексными.

Для корня α многочлена $P(t)$ определим

$$S(\alpha)=\left\{t\in\mathbb{R}\colon \min_{1\leqslant j\leqslant n}|t-\alpha_j|=|t-\alpha|\right\}.$$

Зафиксируем корни α_x и α_y и будем рассматривать систему (1) для $x\in S(\alpha_x)$, $y\in S(\alpha_y)$. Ясно, что полученную при этом постоянную c_1 в оценке (2) нужно будет заменить на $c_4=n^2c_1$.

Упорядочим корни $P(t)$ следующим образом:

$$\tilde{\alpha_1}=\alpha_x,\quad |\alpha_x-\tilde{\alpha_2}|\leqslant|\alpha_x-\tilde{\alpha_3}|\leqslant\ldots\leqslant|\alpha_x-\tilde{\alpha_n}|$$

и обозначим $|\alpha_x-\tilde{\alpha_j}|=H^{-\mu_j}$, $l_j=[\mu_jT]+1$, $j=\overline{2,n}$. Аналогично с помощью α_y определим числа s_j, $j=\overline{2,n}$. Все l_j и s_j ограничены сверху и снизу ввиду ограниченности корней и отличия от нуля дискриминанта $P(t)$. Поэтому теорему достаточно доказать для фиксированного набора l_j и s_j, а затем оценку в (2) умножить на c_5.

Обозначим

$$p_j=\frac{l_{j+1}+\ldots+l_n}{T},\quad q_j=\frac{s_{j+1}+\ldots+s_n}{T},\quad j=\overline{1,n}.$$

При доказательстве теоремы будут использоваться следующие леммы, доказательства которых можно найти в [6, 11].

Лемма 1. *Для $x\in S(\alpha_1)$ и $j=\overline{1,n}$*

$$|x-\alpha_1|\ll Q^{\frac{-\nu_x-1+p_j}{j}}.$$

Лемма 2. *Для $x\in S(\alpha_1)$ и $j=\overline{1,n}$*

$$|P^{(j)}(\alpha_1)|\ll Q^{1-p_j+\frac{n-j}{T}}\ll Q^{1-p_j+\varepsilon}.$$

Лемма 3. *Пусть $P(t),Q(t)\in\mathbb{Z}[t]$ взаимно просты, $\max(\deg(P),\deg(Q))\leqslant n$, $\delta>0$, $H\geqslant H(\delta,n)$, $\max(H(P),H(Q))\leqslant H^{\mu}$, $\mu>0$. Пусть $I_x\times I_y$ — некоторый* *прямоугольник,* $|I_x| = H^{-\eta_x}$, $|I_y| = H^{-\eta_y}$, $\eta_x > 0$, $\eta_y > 0$, *причём для всех* $(x,y) \in I_x \times I_y$

$$\max(|P(x)|, |Q(x)|) < H^{-\tau_x}, \quad \max(|P(y)|, |Q(y)|) < H^{-\tau_y}, \quad \tau_x > 0, \quad \tau_y > 0.$$

Тогда

$$\tau_x + \tau_y + 2\mu + 2(\max(\tau_x + \mu - \eta_x, 0) + \max(\tau_y + \mu - \eta_y, 0)) < 2n\mu + \delta.$$

Будем говорить, что многочлен $P(t)$ принадлежит некоторому прямоугольнику $J_1 \subset S$, если хотя бы одно решение $(x,y) \in S(\alpha_x) \times S(\alpha_y)$ системы (1) лежит в J_1.

Доказательство теоремы разобьём на несколько случаев.

Случай 1.

$$|P'(x)| > 2|S_x|^{-1}, \quad |P'(y)| > 2|S_y|^{-1}.$$

Доказательство в этом случае полностью аналогично доказательству леммы из [4].

Случай 2.

$$\nu_x + 1 < p_1 + \frac{l_2}{T}, \quad \nu_y + 1 < q_1 + \frac{s_2}{T}.$$

Этот случай есть двумерный аналог классов второго рода Спринджука [3]. Доказательство может быть проведено как в [6].

Далее считаем $\nu_x + \nu_y = n - 1$; это может только ухудшить оценку сверху.

Введём в рассмотрение величины $\gamma \geqslant 1/8$, $\delta > 0$ — достаточно маленькое действительное число, $2\tilde{\varepsilon} = \delta + 6\varepsilon$, $d = 1/3 - \tilde{\varepsilon} - \gamma$, $\theta = \gamma + d$.

Случай 3.

$$\nu_x + 1 \geqslant p_1 + \frac{l_2}{T}, \quad \nu_y + 1 \geqslant q_1 + \frac{s_2}{T},$$

$$p_1 + \frac{l_2}{T} + q_1 + \frac{s_2}{T} + \theta \geqslant n + 1.$$

Случай рассматривается аналогично предыдущему.

Случай 4.

$$\nu_x + 1 \geqslant p_1 + \frac{l_2}{T}, \quad \nu_y + 1 \geqslant q_1 + \frac{s_2}{T}, \tag{4}$$

$$p_1 + \frac{l_2}{T} + q_1 + \frac{s_2}{T} + \theta \geqslant 4, \tag{5}$$

$$n + 1 > p_1 + \frac{l_2}{T} + q_1 + \frac{s_2}{T} + \theta. \tag{6}$$

Обозначим

$$M_k = \{P(t) \in \mathbb{Z}[t]\colon \deg(P) \leqslant n,\ 2^k \leqslant H(P) < 2^{k+1}\}, \quad k = \overline{0, \log_2(Q)}.$$

Далее считаем $P(t) \in M_{\log_2(Q)}$, откуда $H(P) \asymp Q$. При суммировании по всем k появляется логарифмический множитель, который компенсируется небольшим увеличением γ (скажем, на $1/100$).

Положим $\eta_x = l_2/T$, $\eta_y = s_2/T$ и разобьём прямоугольник S на прямоугольники $J_1 = J_x \times J_y$ размера $Q^{-\eta_x} \times Q^{-\eta_y}$. Разложим принадлежащий J_1 многочлен $P(t)$ в окрестности корня α_x в ряд Тейлора:

$$P(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\alpha_x)(t - \alpha_x)^j.$$

Пусть точка $(x_0, y_0) \in J_1$ — решение системы (1), $(x_0, y_0) \in S(\alpha_x) \times S(\alpha_y)$. Из леммы 1 и условия (4) получаем для $t \in J_x$

$$|t - \alpha_x| \leqslant |t - x_0| + |x_0 - \alpha_x| \leqslant Q^{-\frac{l_2}{T}} + Q^{-\nu_x - 1 + p_1} \leqslant 2Q^{-\frac{l_2}{T}}.$$

Тогда из оценок

$$|P^{(j)}(\alpha_x)(t - \alpha_x)^j| \ll Q^{1 - p_j + \varepsilon} Q^{-j\frac{l_2}{T}} \ll Q^{1 - p_1 - \frac{l_2}{T} + \varepsilon}$$

получаем

$$|P(t)| \ll Q^{1 - p_1 - \frac{l_2}{T} + \varepsilon}. \qquad (7)$$

Аналогично для $t \in J_y$ получаем

$$|P(t)| \ll Q^{1 - q_1 - \frac{s_2}{T} + \varepsilon}.$$

Обозначим $\sigma = p_1 + l_2/T + q_1 + s_2/T$, $\mu_1 = \nu_x + \nu_y + 2 - \sigma - \gamma$.

На прямоугольниках J_1, которым принадлежит менее Q^{μ_1} многочленов, суммарная мера решений (1) оценивается сверху с помощью леммы 1 ($j = 1$) величиной

$$Q^{\mu_1} Q^{\frac{l_2}{T}} Q^{\frac{s_2}{T}} Q^{-\nu_x - 1 + p_1} Q^{-\nu_y - 1 + q_1} = Q^{-\gamma} \leqslant Q^{-\frac{1}{8}}.$$

Рассмотрим теперь прямоугольники J_1, которым принадлежит более Q^{μ_1} многочленов. Положим $\mu_2 = \mu_1 - d = \nu_x + \nu_y + 2 - \sigma - \theta$. Из неравенств (5) и (6) получаем, что $0 \leqslant \mu_2 \leqslant n - 3$.

Из уравнения $\{\mu_2\} = (1 - \mu_3)(n - [\mu_2] - 1)$ найдём μ_3, $0 < \mu_3 \leqslant 1$.

Разделим отрезок $[-Q, Q]$ на $2Q^{1-\mu_3}$ равных отрезков J_i длины Q^{μ_3}. Многочлены $P_1(t)$ и $P_2(t)$ отнесём к одному классу, если у них $[\mu_2]$ старших коэффициентов совпадают, следующие $n - 1 - [\mu_2] \geqslant 2$ коэффициентов попадают в один набор отрезков J_i, а два младших коэффициента произвольны.

Каждый из Q^{μ_1} многочленов, принадлежащих J_1, попадает в один из $(2Q+1)^{[\mu_2]}(2Q^{1-\mu_3})^{n-1-[\mu_2]} \asymp Q^{\mu_2}$ классов, откуда по принципу Дирихле в одном из классов будет не менее $Q^{\mu_1}/Q^{\mu_2} = Q^d$ многочленов $P_i(t)$.

Рассмотрим многочлены $S_i(t) = P_i(t) - P_2(t)$, $i = \overline{2, Q^d}$. Для них

$$\deg(S_i) \leqslant n - [\mu_2], \quad H(S_i) \ll Q^{\mu_3}. \qquad (8)$$

(Последняя оценка для старших коэффициентов вытекает из принадлежности $P_i(t)$ и $P_2(t)$ одному классу, а для двух младших коэффициентов из неравенств $|P_i(x_0)| < Q^{-\nu_x} < 1 < Q^{\mu_3}$, $|P_i(y_0)| < Q^{-\nu_y} < 1 < Q^{\mu_3}$, $|x_0 - y_0| > \tilde{\delta}$ для решения $(x_0, y_0) \in J_1$ системы (1).)

По (7) для любых $(x, y) \in J_1$ верно

$$|S_i(x)| \ll Q^{1-p_1-\frac{l_2}{T}+\varepsilon}, \quad |S_i(y)| \ll Q^{1-q_1-\frac{s_2}{T}+\varepsilon}. \tag{9}$$

Если хотя бы два многочлена $S_i(t)$ и $S_j(t)$ окажутся взаимно простыми, то для них применима лемма 3 при $\mu = \mu_3$, $\eta_x = l_2/T$, $\eta_y = s_2/T$, $\tau_x = 1 - p_1 - l_2/T + \varepsilon$, $\tau_y = 1 - q_1 - s_2/T + \varepsilon$:

$$3\left(1 - p_1 - \frac{l_2}{T} + \varepsilon + 1 - q_1 - \frac{s_2}{T} + \varepsilon\right) - 2\left(\frac{l_2}{T} + \frac{s_2}{T}\right) + 6\mu_3 \leqslant 2(n - [\mu_2])\mu_3 + \delta,$$

$$-6 + 3\sigma - 6\varepsilon - 2\left(\frac{l_2}{T} + \frac{s_2}{T}\right) \leqslant 2(n - [\mu_2] - 3)\left(1 - \frac{\{\mu_2\}}{n - [\mu_2] - 1}\right) + \delta =$$

$$= 2\left(n - [\mu_2] - 3 - \{\mu_2\} + 2\frac{\{\mu_2\}}{n - [\mu_2] - 1}\right) + \delta \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\nu_x + \nu_y - 2 - \mu_2 + 2\frac{\{\mu_2\}}{n - [\mu_2] - 1}\right) + \delta =$$

$$= 2\left(\sigma + \theta - 4 + 2\frac{\{\mu_2\}}{n - [\mu_2] - 1}\right) + \delta,$$

$$\sigma - 2\left(\frac{l_2}{T} + \frac{s_2}{T}\right) \leqslant -2 + 2\theta + 2\tilde{\varepsilon} + 4\frac{\{\mu_2\}}{\sigma + \theta - 2 + \{\mu_2\}},$$

$$\sigma - 2\left(\frac{l_2}{T} + \frac{s_2}{T}\right) = \left(p_1 - \frac{l_2}{T}\right) + \left(q_1 - \frac{s_2}{T}\right) \geqslant 0,$$

а при $\theta + \tilde{\varepsilon} = 1/3$, учитывая (5), получаем, что из

$$\{\mu_2\}(1 + \theta + \tilde{\varepsilon}) < \frac{4}{3} \leqslant (\sigma + \theta - 2)(1 - \theta - \tilde{\varepsilon})$$

следует

$$2\{\mu_2\} \leqslant (\sigma + \theta - 2 + \{\mu_2\})(1 - \theta - \tilde{\varepsilon}),$$

поэтому

$$-2 + 2\theta + 2\tilde{\varepsilon} + 4\frac{\{\mu_2\}}{\sigma + \theta - 2 + \{\mu_2\}} \leqslant 0.$$

Получено противоречие.

Если все многочлены $S_i(t)$ имеют вид $lS_0(t)$, то, так как всего Q^d многочленов, у одного из них $l \geqslant Q^d$, т. е. для него

$$\deg(S_i) \leqslant n - [\mu_2], \quad H(S_i) \ll Q^{\mu_3 - d},$$
$$|S_i(x)| \ll Q^{1-p_1-\frac{l_2}{T}+\varepsilon-d}, \quad |S_i(y)| \ll Q^{1-q_1-\frac{s_2}{T}+\varepsilon-d}.$$

Здесь проходят индуктивные рассуждения по $\deg(S_i)$ и $H(S_i)$.

В оставшемся случае (когда среди многочленов $S_i(t)$ нет пары взаимно простых, но не все они имеют вид $lS_0(t)$) рассуждения такие же, как и для приводимых многочленов $P(t)$.

Случай 5.

$$\nu_x + 1 \geqslant p_1 + \frac{l_2}{T}, \quad \nu_y + 1 \geqslant q_1 + \frac{s_2}{T},$$
$$p_1 + \frac{l_2}{T} + q_1 + \frac{s_2}{T} + \theta < 4.$$

При данных условиях можно перейти к многочленам $S_i(t)$ второй степени, для которых утверждение доказывается непосредственно.

Случай 6.

$$\nu_x + 1 < p_1 + \frac{l_2}{T}, \quad \nu_y + 1 \geqslant q_1 + \frac{s_2}{T}.$$

Можно провести доказательство, комбинируя доказательства предыдущих случаев.

Литература

[1] Бересневич В. В. Распределение рациональных точек вблизи параболы // Докл. НАН Беларуси. — 2002. — Т. 46. — С. 13—15.

[2] Бересневич В., Берник В., Клейнбок Д., Маргулис Г. Метрическая теория диофантовых приближений: теорема Хинчина—Грошева для невырожденных многообразий // Moscow Math. J. — 2000. — Vol. 2, no. 2. — P. 203—225.

[3] Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967.

[4] Beresnevich V. V. On approximation of real numbers by real algebraic integers // Acta Arith. — 1999. — Vol. 90, no. 2. — P. 97—112.

[5] Beresnevich V. V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 2002. — Vol. 94, no. 1—2. — P. 99—130.

[6] Bernik V. I. A metric theorem on the simultaneous approximation of zero by the values of integral polynomials // Math. USSR-Izv. — 1981. — Vol. 16, № 1. — P. 21—40.

[7] Bernik V. I. On the exact order of approximation of zero by values of integral polynomials // Acta Arith. — 1989. — Vol. 53, no. 1. — P. 17—28.

[8] Bernik V. I., Borbat V. N. Simultaneous approximation of zero by values of integral polynomials // Proc. Steklov Inst. Math. — 1997. — Vol. 218. — P. 53—68.

[9] Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. Khinchine-type theorem on manifolds: the convergence case and multiplicative versions // Intern. Math. Research Notes. — 2001. — No. 9. — P. 453—486.

[10] Huxley M. Area, lattice points and exponential sums. — Oxford, 1996.

[11] Pereverseva N. A. Simultaneous approximation of zero by values of relatively prime integral polynomials // Izv. Akad. Nauk BSSR, Ser. Fiz.-Mat. — 1984.