

УДК 511.36

СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Н.В. Бударина, Д. Диккинсон, В. И. Берник

Владимирский государственный педагогический университет, Россия

Университет г. Мейнуса, Ирландия

Институт математики НАН Беларуси

e-mail: Natalia.Budarina@maths.nuim.ie, ddickinson@maths.nuim.ie, bernik@im.bas-net.by

Поступила 15.03.2007

Пусть $P_n(t)$ — полином с целыми коэффициентами вида

$$P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, \quad (1)$$
$$a_j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad H = H(P) = \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|.$$

Величину H называют высотой многочлена, а корни многочлена $P(t)$ — алгебраическими числами. В 1932 году К. Малер [1] построил классификацию действительных и комплексных чисел в зависимости от того, насколько малыми в точках $t = x \in \mathbb{R}$ и $t = z \in \mathbb{C}$ могут оказаться модули многочленов $|P(x)|$ и $|P(z)|$ при изменении многочленов $P(t)$. По классификации Малера возникло много проблем. Одна из них состояла в определении меры тех значений $x \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{C}$, для которых неравенства

$$|P(x)| < H^{-w}, \quad w > 0; \quad |P(z)| < H^{-v}, \quad v > 0, \quad (2)$$

имеют бесконечное число решений в $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Эти проблемы в окончательном виде решены В. Спринджуком [2], который показал, что при $w > 0$ и $v > (n-1)/2$ неравенства разрешимы для бесконечного числа полиномов только для множеств нулевой меры Лебега μ_1 на прямой и μ_2 на плоскости соответственно. Вскоре эти результаты были доведены до уровня классической теоремы Хинчина [3].

Пусть $\Psi(x)$ — монотонно убывающая функция, определенная для $x > 0$, I — некоторый интервал, $I \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $y \in I$, для которых неравенство

$$|P_n(y)| < H^{-n+1} \Psi(H) \quad (3)$$

имеет бесконечное число решений в $P_n(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Теорема Хинчина. При указанных выше обозначениях имеет место равенство

$$\mu \mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu I, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases} \quad (4)$$

В работах [4–7] равенства вида (4) были получены в полях действительных, комплексных и p -адических чисел для многочленов произвольной степени, при этом неравенства типа (3) имели вид

$$|P_n(x)| < H^{-n+1}\Psi(H), \quad |P_n(z)| < H^{-(n-2)/2}\Psi^{1/2}(H), \quad |P_n(w)|_p < H^{-n}\Psi(H) \quad (5)$$

соответственно. В (5) выражение $|a|_p$ означает p -адическую норму $a \in \mathbb{Q}_p$.

Трансцендентные числа можно также классифицировать в зависимости от порядка их аппроксимации алгебраическими числами. Такую классификацию предложил Ф. Коксма [8]. Длительное время считалось, что показатели аппроксимации в классификациях совпадают. Однако В. Шмидт [9], а затем Я. Буже [10] показали, что это не так. В упомянутых работах разница в классификациях наблюдалась на таких действительных числах, в которых одновременно были малы модули многочлена и его производной, причем показатель степени w в (2) превышал n^3 . В работе [11] проанализировано аналогичное множество действительных чисел при показателях w порядка n .

Теорема 1. Пусть $\Psi(x)$ — монотонно убывающая функция положительного аргумента x такая, что ряд $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H)$ сходится, постоянная $v \in (0, 1/4]$ и $\mathcal{L}_n(\Psi)$ — множество действительных чисел некоторого интервала I , для которых система неравенств

$$|P(x)| < H^{-n+v+1}\Psi(H), \quad |P'(x)| < H^{1-v} \quad (6)$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах $P(x)$ степени n и высоты $H = H(P)$. Тогда множество $\mathcal{L}_n(\Psi)$ имеет нулевую меру Лебега.

В данной работе мы получаем обобщение теоремы 1 на случай совместных приближений в $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ с мерой $\mu = \mu_1\mu_2$, функция $\Psi(x)$ та же, что и в теореме 1, S — некоторый круг в $\mathbb{C}$.

Теорема 2. Пусть $v \in (0, 1/4]$ и $\mathcal{L}_v(\Psi)$ — множество точек $\bar{w} = (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ некоторого цилиндра $T = I \times S$, для которых система неравенств

$$\max(|P(x)|, |P(z)|) < H^{-(n-3)/3+v}\Psi^{1/3}(H), \quad \max(|P'(x)|, |P'(z)|) < H^{1-v} \quad (7)$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Тогда при сходимости ряда $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H)$ имеем $\mu\mathcal{L}_v(\Psi) = 0$.

Как обычно в задачах метрической теории трансцендентных чисел, переходим от множества всех многочленов к множеству неприводимых многочленов:

$$\mathcal{P}_n(H) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P = n, a_n = H(P)\}. \quad (8)$$

Объединение всех таких классов обозначим как

$$\mathcal{P}_n = \prod_{H=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(H). \quad (9)$$

Для фиксированного достаточно малого $\delta > 0$ на комплексной плоскости вырежем полосу ширины δ , в которой лежат комплексные числа z , с условием $|\operatorname{Im} z| < \delta/2$. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_{t_1}$ — действительные корни $P(t) \in \mathcal{P}_n(H)$, а $\beta_1, \dots, \beta_{t_2}$ — комплексные корни, лежащие в верхней полуплоскости и не лежащие в вырезанной полоске. Ясно, что $t_1 + 2t_2 \leq n$. Для каждого из корней α_i, β_j произведем упорядочивание остальных корней следующим образом, считая, не умаляя общности, $i = j = 1$:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_{t_1}|, \quad (10)$$

$$|\beta_1 - \beta_2| \leq |\beta_1 - \beta_3| \leq \dots \leq |\beta_1 - \beta_{t_2}|. \quad (11)$$

Определим числа ρ_i и μ_j как решения уравнений

$$|\alpha_1 - \alpha_i| \leq H^{-\rho_i}, \quad |\beta_1 - \beta_j| \leq H^{-\mu_j}. \quad (12)$$

Для $\varepsilon > 0$ положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{d(n)}$ и $T = [\varepsilon_1]^{-1}$, где $d(n)$ — достаточно большое число. Найдем целые числа k_i и l_j из неравенств

$$\frac{k_i - 1}{T} \leq \rho_i < \frac{k_i}{T}, \quad \frac{l_j - 1}{T} \leq \mu_j < \frac{l_j}{T}. \quad (13)$$

Затем положим

$$r_i = T^{-1} \sum_{m=i+1}^{t_1} k_m, \quad s_j = T^{-1} \sum_{m=j+1}^{t_2} l_m$$

и обозначим $\bar{k} = (k_2, \dots, k_{t_1})$, $\bar{s} = (l_2, \dots, l_{t_2})$. Нетрудно показать, что число векторов $\bar{k}$ и $\bar{s}$ конечно, т.е. далее рассматриваем систему неравенств (7) при фиксированных векторах $\bar{k}$, $\bar{s}$. Обозначим

$$S(\alpha_1) = \{x \in I : \min_i |x - \alpha_i| = |x - \alpha_1|\},$$

$$S(\beta_1) = \{z \in S : \min_j |z - \beta_j| = |z - \beta_1|\}.$$

Лемма 1. Пусть $x \in S(\alpha_1)$. Тогда

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1} |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1}, \quad (14)$$

$$|x - \alpha_1| < (2^{n-2} |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1} |\alpha_1 - \alpha_2|)^{1/2}. \quad (15)$$

Лемма 1 доказана во многих работах, например в [2]. Точно такие же неравенства выполняются и для $|z - \beta_1|$ при $z \in S(\beta_1)$.

Лемма 2 [12]. Пусть $P_1(t)$ и $P_2(t)$ — многочлены без общих корней,

$$\max(\deg P_1, \deg P_2) \leq s, \quad \max(H(P_1), H(P_2)) \leq K$$

и для некоторого цилиндра S , $\mu_1 I = K^{-\eta_1}$, $\eta_1 > 0$, $r(S) = K^{-\eta_2}$, $\eta_2 > 0$, для всех $x \in I$ и всех $z \in S$ выполняются неравенства

$$|P_j(x)| < K^{-\tau_1}, \quad |P_j(z)| < K^{-\tau_2}, \quad 1 \leq j \leq 2.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ при $K > K_0(\delta)$ верно неравенство

$$\tau_1 + 1 + 2 \max(\tau_1 + 1 - \eta_1, 0) + 2(\tau_2 + 1) + 4 \max(\tau_2 - 1 - \eta_2, 0) < 2s + \delta. \quad (16)$$

Лемма 3 [13]. Имеют место неравенства

$$c(n)H^{1-r_1} < |P'(\alpha_1)| < c(n)H^{1-r_1+(n-1)\varepsilon_1}, \quad (17)$$

$$c(n)H^{1-r_k} < |P^{(k)}(\alpha_1)| < c(n)H^{1-r_k+(n-k)\varepsilon_1}, \quad k \geq 2.$$

Аналогичные (17) неравенства выполняются и для $|P'(\beta_1)|$, $|P^{(k)}(\beta_k)|$.

Доказательство. От системы неравенств (7), пользуясь тем, что $v \leq 1/4$, можно перейти к системе неравенств

$$\max(|P(x)|, |P(z)|) < H^{-(n-3)/3+v} \Psi^{1/3}(H), \quad \max(|P'(\alpha_1)|, |P'(\beta_1)|) < c(n)H^{1-v}. \quad (18)$$

Заменяем $\Psi(H)$ на $c(n)H^{-1}$, что возможно, поскольку ряд сходится и функция монотонна. Дальнейшие рассуждения будут существенно зависеть от величин $r_1 + k_2T^{-1}$ и $s_1 + l_2T^{-1}$. Пользуясь леммами 1 и 3, оценим разности $|x - \alpha_1|$ и $|z - \beta_2|$ сверху. Проделаем это только для $|z - \beta_2|$:

$$|z - \beta_2| < c(n)H^{-(n-3)/3+v-1/3-1+S_1} = c(n)H^{-(n+1)/3+v+s_1}, \quad (19)$$

$$|z - \beta_2| < c(n)H^{-(n-3)/6+v/2-2/6-1/2+S_2/2} = c(n)H^{-(n+1)/6+v/2+s_2/2}. \quad (20)$$

Оценка (20) окажется лучше оценки (19), если

$$l_2T^{-1} + s_1 > \frac{n+1}{3} - v. \quad (21)$$

Такой случай будем называть нелинейным и присвоим ему индекс 1. При выполнении противоположного (21) неравенства случай назовем линейным и присвоим ему индекс 0. Аналогичные (19) и (20) неравенства можно выписать и для разности $|x - \alpha_1|$ при выполнении условия

$$k_2T^{-1} + rs_1 > \frac{n+1}{3} - v, \quad (22)$$

второе неравенство окажется сильнее первого. Опять присвоим в зависимости от выполнения и невыполнения неравенства (22) индексы 1 и 0 соответственно. Получим 4 случая, для которых надо доказать теорему: (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0).

Предложение 1. Теорема 2 справедлива в случае (1, 1).

Доказательство. Случай (1, 1) означает одновременное выполнение неравенств (21) и (22). Перепишем первое неравенство (18) в виде

$$\max(|P(x)|, |P(z)|) \ll H^{-(n-2)/3+v}. \quad (23)$$

Класс многочленов $P_n(H)$ с одинаковыми векторами $\bar{k}$ и $\bar{s}$ обозначим через $P_n(H, \bar{k}, \bar{s})$. Далее

$$\mathcal{P}_t(\bar{k}, \bar{s}) = \bigcup_{2^t \leq H < 2^{t+1}} P_n(H, \bar{k}, \bar{s}).$$

Поделим интервал I и круг S на меньшие интервалы I_j длины

$$2^{t(-(n-2)/6+(v-1+r_2)/2+\gamma)}, \quad \gamma > 0,$$

и круги M_i радиуса

$$r(M_i) = 2^{t(-(n-2)/6+(v-1+s_2)/2+\gamma)}.$$

Будем говорить, что многочлен $P(f)$ принадлежит цилиндру $T_{ij} = I_j \times M_i$, если существует точка $(x, z) \in I_j \times M_i$, для которой выполняется (23).

1. Рассмотрим вначале такие цилиндры T_{ij} , которым принадлежит не более одного многочлена. Тогда мера множества тех (x, z) , для которых верно (23) при $P(f) \in \mathcal{P}_t(\bar{k}, \bar{s})$, не превосходит

$$c(n)2^{t(-(n-2)/3+v-1+r_2)/2}2^{t(-(n-2)/3+v-1+s_2)} = c(n)2^{t(-(n-2)/2-3/2+3v/2+r_2/2+s_2)}. \quad (24)$$

Просуммируем (24) по всем цилиндрам T_{ij} , количество которых не превышает

$$c(n)2^{t((n-2)/2-3(v-1)/2-r_2/2-s_2+3/2-3\gamma)}.$$

Получим $c(n)2^{-3\gamma t}$. Ряд по t с таким общим членом сходится. Применение леммы Бореля–Кантелли завершает доказательство п. 1.

2. Рассмотрим теперь цилиндры T_{ij} , которым принадлежит не менее двух многочленов. Возьмем такие $P_1(f)$ и $P_2(f)$ из $\mathcal{P}_t(\bar{k}, \bar{s})$. Сказанное означает, что существуют точки (x_1, z_1) и (x_2, z_2) из T_{ji} , для которых выполняются неравенства

$$\max(|P_1(x_1)|, |P_2(x_2)|) \ll 2^{t(-(n-2)/3+v)}, \quad (25)$$

$$\max(|P'_1(x_1)|, |P'_2(x_2)|) \ll 2^{t(1-v)}. \quad (26)$$

Разложим функции $P_1(f)$ и $P_2(f)$ в ряд Тэйлора на цилиндре T_{ij} и затем оценим модули значений сверху. Проведем здесь вычисления только на интервале I_j . Получим

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{P^{(j)}(\alpha_1(P_i))}{j!} (x - \alpha_1(P_i))^j, \quad j = 1, 2.$$

Из оценок и (22), (25) имеем

$$\begin{aligned} |x - \alpha_1(P_i)| &\leq |x - x_1| + |x_1 - \alpha_1(P_i)| \ll 2^{t(-(n+1)/6+v/2+k_2/2+\gamma/2)}, \\ |P_i^{(j)}(\alpha_1(P_i))(x - \alpha_1(P_i))^j| &\ll 2^{t(1-r_2+(n-1)\varepsilon_1-(n+1)/3+v+k_2)} \ll \\ &\ll 2^{t(-(n-2)/3+v+(n-1)\varepsilon_1)}, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (27)$$

откуда получим

$$|P_i(x)| \ll 2^{t(-(n-2)/3+v+(n-1)\varepsilon_1+\gamma)}. \quad (28)$$

Аналогичные (27) и (28) оценки получим и для значений $P_i(z)$ в круге S_i , используя (26) и (21):

$$|P_i(z)| \ll 2^{t(-(n-2)/3+v+(n-1)\varepsilon_1+\gamma)}.$$

Применим к многочленам $P_1(f)$ и $P_2(f)$ лемму 2. Здесь

$$\begin{aligned} \tau_1 + 1 = \tau_2 + 1 &= \frac{n+1}{3} - v - (n-1)\varepsilon_1 - 2\gamma, \\ \eta_1 &= \frac{n-2}{6} - \frac{v-1+r_2}{2} - \gamma, \\ 2(\tau_1 + 1 - \eta_1) &= 2\left(\frac{n+1}{3} - v - (n-1)\varepsilon_1 - \frac{n-2}{2} + \frac{v}{2} - \frac{1}{2} + \frac{r_2}{2} - \gamma\right) = \frac{n}{3} + \frac{1}{3} - v - 2\gamma - (n-1)\varepsilon_1 + r_2, \\ \eta_2 &= \frac{nn-2}{6} - \frac{v-1+s_2}{2} - \gamma, \\ 4(\tau_2 + 1 - \eta_2) &= 4\left(\frac{n+1}{3} - v - (n-1)\varepsilon_1 - 2\gamma - \frac{n-2}{6} + \frac{v}{2} - \frac{1}{2} + \frac{s_2}{2} + \gamma\right) = \frac{2n}{3} + \frac{2}{3} - 4\gamma - 4(n-1)\varepsilon_1 + 2s_2. \end{aligned}$$

Левая часть (16) примет вид

$$n\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + 2 - v(1 + 2 + 1 + 2) - 6(n-1)\varepsilon_1 + r_2 + 2s_2 - 12\gamma.$$

Ясно, что при $6v + 6(n-1)\varepsilon_1 + 12\gamma + \delta < 1$ получим противоречие.

Докажем теорему в случае $(0, 0)$ линейности.

Предложение 2. При выполнении системы неравенств

$$k_2 T^{-1} + r_1 \leq \frac{n+1}{3} - v, \quad l_2 T^{-1} + s_1 \leq \frac{n+1}{3} - v \quad (29)$$

теорема верна.

Вначале предположим, что в системе неравенств (29) есть и нижние оценки, т.е.

$$\frac{n+0.7}{3} - v < k_2 T^{-1} + r_1 \leq \frac{n+1}{3} - v, \quad \frac{n+0.7}{3} - v < l_2 T^{-1} + s_1 \leq \frac{n+1}{3} - v. \quad (30)$$

Проведем аналогичное рассуждение, но для оценок разностей $|x - \alpha_1|$ и $|z - \beta_1|$ будем пользоваться оценкой (14) и аналогичной ей оценкой и для $|z - \beta_1|$. Вновь поделим интервал I и круг S на меньшие интервалы I_j длины

$$2^{t(-(n+1)/3+v+r_1+\gamma_1)}, \quad \gamma_1 > 0, \quad (31)$$

и круги M_i радиуса

$$r(M_i) = 2^{t(-(n+1)/3+v+s_1+\gamma_1)}. \quad (32)$$

1. Рассмотрим цилиндры T_{ij} , которым принадлежит не более одного многочлена. Оценим меру множества тех (x, z) , для которых верно (23). Получим аналогично (24)

$$c(n)2^{t(-(n+1)/3+v+r_1)}2^{t(-2(n+1)/3+2v+2s_1)} = c(n)2^{t(-n-1+3v+r_1+2s_1)}. \quad (33)$$

Просуммируем оценку (31) по всем цилиндрам T_{ji} , количество которых согласно (31) и (32) не превосходит

$$c(n)2^{t(n+1-3v-r_1-2s_1-3\gamma_1)}.$$

Получим $c(n)2^{-3\gamma_1 t}$. Применяем лемму Бореля–Кантелли.

2. Если цилиндру T_{ji} принадлежит более двух многочленов, пусть это $P_1(f)$ и $P_2(f)$, то разложим их в ряд Тэйлора и воспользуемся оценками (25) и (26). Получим

$$|P_i(x)| \ll 2^{t(-(n+1)/3+v+(n-1)\varepsilon_1+2\gamma_1)},$$

$$|P_i(z)| \ll 2^{t(-(n+1)/3+v+(n-1)\varepsilon_1+2\gamma_1)}, \quad i = 1, 2.$$

Применим лемму 2. В данном случае имеем

$$\tau_1 + 1 = \tau_2 = \frac{n+1}{3} - v - (n-1)\varepsilon_1 - 2\gamma_1,$$

$$\eta_1 = \frac{n+1}{3} - v - r_1 - \gamma_1, \quad \eta_2 = \frac{n+1}{3} - v - s_1 - \gamma_1,$$

$$2(\tau_1 + 1 - \eta_1) = 2(r_1 - (n-1)\varepsilon_1 - \gamma_1) = 2r_1 - 2(n-1)\varepsilon_1 - 2\gamma_1,$$

$$4(\tau_2 + 1 - \eta_2) = 4s_1 - 4(n-1)\varepsilon_1 - 4\gamma_1.$$

Левая часть в неравенстве (16) примет вид

$$n+1+2r_1+4s_1-9(n-1)\varepsilon_1-10\gamma_1-3v. \quad (34)$$

Ясно, что мы можем выбрать $10\gamma_1 - 9(n-1)\varepsilon_1 < 0.1$. Из неравенства

$$2r_1+4s_1 \geq r_1+k_2 T^{-1}+2(s_2+l_2 T^{-1})$$

и (30) получаем $n+1+2r_1+4s_1 \geq 2n+1.7$. Поэтому выражение в (34) при $v < 0.25$ больше, чем 0.1, и при $\delta = 0.05$ неравенство (16) противоречиво. При $k_2 T^{-1} + r_1 < (n+0.7)/3 - v$ или $l_2 T^{-1} + s_1 < (n+0.7)/3 - v$ уже применим метод работы [4].

Если же в (29) одно неравенство верно, а второе нет, то, комбинируя рассуждения для случаев $(1, 1)$ и $(0, 0)$, также приходим к доказательству.

Литература

1. *Mahler K.* Über das Mass Menge aller S -Zahlen // Math. Ann. 1932. V. 106. P. 131–139.
2. *Sprindžuk V.* Mahler's problem in the Metric Theory of Numbers // Transl. Math. Monographs Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1969. V. 25.
3. *Khinthine A.* Einige Satze uber Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // Math. Ann. 1924. V. 92. P. 115–125.
4. *Bernik V.I.* On the exact order of approximation of zero by values of integral polynomials // Acta Arith. 1989. V. 53. P. 17–28.
5. *Beresnevich V.V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. 1999. V. 90. P. 97–112.
6. *Bernik V., Vasilyev D.* A Khinchin-type theorem for integral-valued polynomials of a complex variable // Proc. IM NAS of Belarus. 1999. № 3. P. 10–20.
7. *Ковалевская Э.И.* О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов в $\mathbb{Q}_p$. Минск, 2000 (Препринт / Ин-т математики НАН Беларуси. № 2 (556)).
8. *Koksma J.* Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplex Zahlen durch algebraische Zahlen // Mh. Math. Physik. V. 48. 1939. P. 176–189.
9. *Schmidt W.M.* Bounds for certain sums; a remark on a conjecture of Mahler // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101. P. 200–210.
10. *Bugeaud Y.* Approximation by Algebraic Numbers // Cambridge Tracts in Math. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. V. 169.
11. *Берник В.И., Куксо О.С.* Многочлены с малыми дискриминантами и регулярные системы действительных алгебраических чисел // Зап. науч. семинаров ПОМИ. Санкт-Петербург, 2005. С. 10–16.
12. *Берник В.И., Калоша Н.И.* Приближения нуля значениями целочисленных полиномов в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2004. № 1. С. 121–123.
13. *Берник В.И.* Совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. наук. 1980. Т. 44. № 1. С. 24–45.

N.V. Budarina, D. Dickinson, V. I. Bernik
Simultaneous approximations of real and complex numbers
by algebraic numbers of special kind

Summary

The paper is devoted to solving the problem about simultaneous approximation of real and complex number by special algebraic numbers. Here is given the proof of full analogue of Khintchine's theorem for convergence case.