Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 322, 2005 г.

В. И. Берник, О. С. Куксо

МНОГОЧЛЕНЫ С МАЛЫМИ ДИСКРИМИНАНТАМИ И РЕГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Трансцендентные числа естественным образом классифицируются по величине значений целочисленных полиномов в этих числах (классификация Малера [1]), или по степени их приближения алгебраическими числами (классификация Коксмы [2]).

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \ P(x) \in \mathbb{Z}[x], \ H = H(P) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|. \quad (1)$$

Определим ω как точную верхнюю грань w, для которых неравенство

$$|P(x)| < H(P)^{-w} \quad (2)$$

имеет бесконечно много решений в $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, а ω_1 как точную верхнюю грань w_1, для которых неравенство

$$|x - \xi| < H(\xi)^{-w_1 - 1} \quad (3)$$

имеет бесконечное число решений в алгебраических числах ξ степени не более n. Здесь $H(\xi)$ – высота минимального полинома ξ. Длительное время считалось, что $\omega = \omega_1$, однако Шмидт показал, что это не так, а Буже усилил его результат. Подробнее об этом написано в недавней монографии Буже [3]. Различие величин ω и ω_1 происходит в точках x, в малой окрестности которых есть алгебраические числа, в которых относительно мала производная минимального полинома, или мало значение дискриминанта минимального полинома. Для таких же точек пока не удается доказать и известную гипотезу Вирзина [4].

Все это делает задачу исследования неравенств (2) и (3) в полиномах с малыми дискриминантами весьма актуальной. В данной работе мы найдем распределение таких специфических алгебраических чисел и укажем на возможные применения этого результата.

В. Г. Спринджук [5] доказал, что мера Лебега множества тех x, для которых неравенство (2) при $\omega > n$ имеет бесконечное число решений, равна нулю. Затем А. Бейкер [6] усилил его результат и высказал гипотезу, что в неравенствах типа (2) и (3) должен действовать аналог теоремы А. Я. Хинчина [7] о приближении действительных чисел рациональными. Случай сходимости в этой гипотезе был доказан В. И. Берником [8], а расходимости – В. В. Бересневичем [9]. Относительно специальных полиномов известно следующее, В. Н. Борбат [10] доказал, что система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < H^{-n+v} \\ |P'(x)| < H^{1-v-\varepsilon}, \ 0 \leqslant v < 1 \end{cases} \tag{4}$$

при любом $\varepsilon > 0$ имеет бесконечное число решений в $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ только для множества нулевой меры. Из его результата уже можно получить информацию о распределении специальных алгебраических чисел, однако ее недостаточно для получения аналога теоремы Хинчина для систем неравенств вида (4).

В данной работе мы докажем, что действительные алгебраические числа с заданным значением в них производной, образуют оптимальную регулярную систему. В конце статьи мы укажем возможные приложения этого результата.

Определение 1. *Пусть Γ – счетное множество действительных чисел и $N : \Gamma \to \mathbb{R}$ некоторая положительная функция. Назовем пару (Γ, N) регулярной системой, если существует постоянная $c_1 = c_1(\Gamma, N) > 0$ такая, что для любого интервала I существует достаточно большое число $T_0 = T_0(\Gamma, N, I) > 0$, что при $T \geqslant T_0$ найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ из $\Gamma \cap I$, для которых верны три неравенства*

$$\begin{gathered} N(\alpha_i) \leqslant T, \ 1 \leqslant i \leqslant t, \\ |\alpha_i - \alpha_j| \geqslant T^{-1}, \ 1 \leqslant i < j \leqslant t, \\ t \geqslant c_1 |I| T. \end{gathered} \tag{5}$$

А. Бейкер и В. Шмидт [6] доказали, что множество действительных алгебраических чисел α с функцией $N(\alpha)^{n+1}(\ln H(\alpha))^{-3n^2}$ образуют регулярную систему. Этот результат был улучшен первым из авторов, а В. В. Бересневич [9] получил регулярную систему с функцией $N(\alpha) = H(\alpha)^{n+1}$. Нетрудно убедиться, что этот результат наилучший из возможных. Регулярные системы такого типа будем называть оптимальными.

Теорема 1. *Множество действительных алгебраических чисел* α, $|P'(\alpha)| < H(\alpha)^{1-v}$, $0 \leqslant v < 0,5$, *с функцией* $N(\alpha) = H(\alpha)^{n+1-2v}$ *образуют оптимальную регулярную систему.*

Основу доказательства теоремы 1 составляет некоторое утверждение, которое мы выделяем в теорему 2.

Теорема 2. *Пусть* I – *некоторый интервал,* $x \in I$, $0 \leqslant v < 0,5$. *Тогда мера множества тех* x, *для которых система неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n+v} \\ |P'(x)| < 2^{-2n-13}Q^{1-v}, \ Q \in \mathbb{R}, \ Q > Q_0(I,n) \\ |a_j| \leqslant Q, \ 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \tag{6}$$

имеет хотя бы одно решение в многочленах $P(x)$, *удовлетворяющих* (6), *не превосходит* $0,5|I|$.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего во втором неравенстве (6) заменим $P'(x)$ на $P'(\alpha)$, где α – ближайший к x корень. Это можно на основании представления $P'(x)$ в виде

$$P'(x) = P'(\alpha) + P''(\xi_1)(x-\alpha), \ \xi_1 \in (\alpha, x)$$

и известных оценок для $|x-\alpha|$, например

$$|x-\alpha| < c_2 Q^{-1-\frac{1-v}{n}}.$$

Поэтому при достаточно больших Q имеем $0,5|P'(x)| < |P'(\alpha)| < 2|P'(x)|$ и систему (6) можно переписать так

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n+v} \\ |P'(\alpha)| < 2^{-2n-12}Q^{1-v} \\ |a_j| \leqslant Q. \end{cases} \tag{7}$$

Теперь обозначим через $\mathcal{L}_n(v)$ множество решений системы (7), а через $\mathcal{L}'_n(v)$ – множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n+v} \\ Q^{1-v-\frac{1}{5}} < |P'(\alpha)| < 2^{-2n-12}Q^{1-v} \\ |a_j| \leqslant Q. \end{cases} \tag{8}$$

Докажем, что $\mu\mathcal{L}'_n(v) < \frac{3}{8}|I|$. Воспользуемся известной [7] оценкой для $|x-\alpha|$:

$$|x-\alpha| < 2^{n-1}\frac{|P(x)|}{|P'(\alpha)|} < 2^{n-1}Q^{-n+v}|P'(\alpha)|^{-1}. \tag{9}$$

Заметим, что α может быть комплексным числом и множество $x \in I$, удовлетворяющих (9) может быть пустым. Тогда оценкой меры является нуль. Если же это множество непусто, то обозначим его через $\sigma(P)$ (а это интервал) и через $|\sigma(P)|$ его длину. Наряду с интервалом $\sigma(P)$ рассмотрим интервал $\sigma_1(P)$, состоящий из решений неравенства

$$|x-\alpha| < 2^{2n+3}Q^{v-1}|P'(\alpha)|^{-1}. \tag{10}$$

Очевидно, что отношение длин интервалов $\sigma(P)$ и $\sigma_1(P)$ удовлетворяет неравенству

$$|\sigma(P)||\sigma_1(P)|^{-1} < 2^{-n-4}Q^{-n+1}. \tag{11}$$

Если $x \in \sigma_1(P)$, то из записи

$$|P(x)| = |P'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{1}{2}P''(\xi_1)(x-\alpha)^2, \xi_1 \in (\alpha, x)$$

и оценок

$$|P'(\alpha)(x-\alpha)| < 2^{2n+3}Q^{v-1},\ |\frac{1}{2}P''(\xi_1)(x-\alpha)|^2| < c_2Q^{2v-0,6}$$

при

$$3v < 1,6 \tag{12}$$

и достаточно большом Q следует

$$|P(x)| < 2^{2n+4}Q^{v-1},\ x \in \sigma_1(P). \tag{13}$$

Аналогично поступим при $x \in \sigma_1(P)$, $\xi_2 \in (\alpha, x)$ и с $P'(x)$

$$P'(x) = P'(\alpha) + P''(\xi_2)(x-\alpha). \tag{14}$$

Из (14) при выполнении неравенства (12) следует при $Q > Q_0(I,n)$

$$0,5|P'(\alpha)| < |P'(x)| < 2|P'(\alpha)|. \tag{15}$$

Далее зафиксируем вектор $\overline{b} = (a_n, \ldots, a_2)$ коэффициентов полинома $P(x)$ и все полиномы с таким вектором $\overline{b}$ объединим в класс $\mathcal{P}(\overline{b})$.

Интервал $\sigma_1(P_1)$, $P_1 \in \mathcal{P}(\overline{b})$ будем называть несущественным, если существует интервал $\sigma_1(P_2)$, $P_2 \in \mathcal{P}(\overline{b})$ такой, что

$$|\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)| \geqslant 0,5|\sigma_1(P_1)|. \tag{16}$$

Если же такого интервала не найдется, т.е. для любого интервала $\sigma_1(P_2)$ выполняется неравенство

$$|\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)| < 0,5|\sigma_1(P_1)|, \tag{17}$$

то интервал $\sigma_1(P_1)$ назовем существенным. Множество многочленов $P(x) \in \mathcal{P}(\overline{b})$ с существенными интервалами $\sigma_1(P)$ обозначим через $\mathcal{P}_1(\overline{b})$, а с несущественными – $\mathcal{P}_2(\overline{b})$.

a). Рассмотрим класс $\mathcal{P}_1(\overline{b})$. Тогда каждая точка $x \in I$ может принадлежать не более двум интервалам $\sigma_1(P)$. Поэтому для любого вектора $\overline{b}$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_1(\overline{b})} |\sigma_1(P)| \leqslant 2|I|. \tag{18}$$

Учитывая (11) из (18) получаем, оценивая количество $\overline{b}$ как $(2Q+1)^{n-1}$

$$\sum_{\overline{b}, |a_j| \leqslant Q} \sum_{P \in \mathcal{P}_1(\overline{b})} |\sigma(P)| < 2|I| 2^{-n-3} Q^{-n+1} (2Q+1)^{n-1} < 2^{-2}|I|. \tag{19}$$

b). Рассмотрим класс $\mathcal{P}_2(\overline{b})$. На пересечении $\sigma_1(P_1, P_2)$ интервалов $\sigma_1(P_1)$ и $\sigma_1(P_2)$ и для P_1 и для P_2 выполняются неравенства (13) и (15)

$$|P_j(x)| < 2^{2n+4} Q^{v-1}, \ j = 1, 2 \tag{20}$$

$$0,5|P'(\alpha_j)| < |P_j'(\alpha_j)| < 2|P'(\alpha_j)|, P_1(\alpha_1) = 0, \ P_2(\alpha_2) = 0. \tag{21}$$

Тогда многочлен $K(x) = P_2(x) - P_1(x)$, не равный тождественно нулю, имеет вид $K(x) = b_1 x + b_0$. С учетом (20) и (21) можно записать

$$|b_1 x + b_0| < 2^{2n+5} Q^{v-1} \tag{22}$$

$$|b_1| = |K'(x)| < 2 \max(|P_1'(\alpha_1)|, |P_2'(\alpha_2)|) < 2^{-2n-11} Q^{1-v} \tag{23}$$

При фиксированных b_0 и b_1 мера тех $x \in I$, для которых выполняется неравенство (22) не превосходит $2^{2n+6}|b_1|^{-1} Q^{v-1}$. Из $x \in I$ и (22) следует, что b_0 может принимать не более $2|I||b_1|$ значений.

Поэтому мера всех x, попадающих в несущественные интервалы не превосходит

$$2|I||b_1|2^{2n+6}|b_1|^{-1}Q^{v-1}2^{-2n-10}Q^{1-v} = 2^{-3}|I|. \qquad (24)$$

Из неравенств (19) и (24) имеем

$$\mu\mathcal{L}'_n(v) < \frac{3}{8}|I|. \qquad (25)$$

Обозначим через $\mathcal{L}''_n(v)$ множество $\mathcal{L}_n(v)\setminus\mathcal{L}'_n(v)$. Тогда для всех $x \in \mathcal{L}''_n(v)$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n+v} \\ |P'(x)| < Q^{1-v-0,2} \\ |a_j| \leqslant Q. \end{cases}$$

Применим к этой системе теорему 1.4 [11]. Получим $\mu\mathcal{L}''_n(v) < c_3 Q^{-\frac{0,2}{n+1}}|I|$, что при $Q > Q_0(n, c_3, I)$ не превосходит $\frac{1}{8}|I|$. Это неравенство вместе с (25) доказывает теорему 2.

Доказательство теоремы 1 сейчас можно провести как доказательство теоремы 3 в [9]. Возьмем $x \in B = I \setminus \mathcal{L}_n(v)$. Тогда $|B| > \frac{1}{2}|I|$ и для любого полинома $P(x)$, $|P(x)| < Q^{-n+v}$ уже верно $|P'(x)| \geqslant 2^{-2n-13}Q^{1-v}$. Применив к полиному $P(x)$ в достаточно малой окрестности x теорему Лагранжа, получим, что существует вещественный корень α полинома $P(x)$ и такой, что $|x-\alpha| < c_4 Q^{-n-1+2v}$. Оставив только такие корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ из них, что $|\alpha_i - \alpha_j| > c_5 Q^{-n-1+2v}$ мы получим оптимальную регулярную систему специальных вещественных алгебраических чисел α с функцией $N(\alpha) = H(\alpha)^{n+1-2v}$.

В качестве возможных приложений теоремы 1 укажем два следующих. По-видимому, теоремы 1 вместе с [8] достаточно, чтобы обосновать случай сходимости, а вместе с [9] случай расходимости в следующей задаче.

Пусть Ψ – монотонно убывающая функция действительного аргумента $x \in I$. Обозначим через $M(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < H^{-n+1+v}\Psi(H) \\ |P'(x)| < H^{1-v}, \ 0 \leqslant v < 0,5 \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений в $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Верно ли, что при сходимости ряда $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H)$ верно $\mu M(\Psi) = 0$, а при расходимости ряда справедливо $\mu M(\Psi) = |I|$?

В качестве второго применения теоремы 1 можно рассмотреть систему неравенств (4) при показателе степени в первом неравенстве меньшем $-n+v$. Поскольку в этом случае ряд будет сходиться, то мера множества $x \in I$, для которых новая система неравенств будет иметь бесконечное число решений равна нулю и надо привлечь размерность Хаусдорфа. Видимо теоремы 1 достаточно при $0 \leqslant v < 0,5$ для получения точного результата, т.е. точного значения размерности, а не двухсторонних оценок. Оба этих направления в настоящее время разрабатываются авторами.

Литература

1. K. Mahler, *Über das Mas der Menge aller S–Zahlen.* — Math. Ann. **106** (1932), 131–139.
2. J. Koksma, *Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen.* — Monatsh. Math. Phys. **48** (1939), 76–189.
3. Y. Bugeaud, *Approximation by Algebraic Numbers. Cambridge Tracts in Math.* 169. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2004).
4. E. Wirsing, *Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades.* — J. Reine Angew. Math. **206** (1961), 67–77.
5. V. Sprindzuk, *Mahler's Problem in the Metric Theory of numbers.* — Transl. Math. Monographs 25, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1969).
6. A. Baker, *On a theorem of Sprindzuk, Proc Roy. Soc. London Ser.* A **292** (1966), 92–104.
7. A. Khintchine, *Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approzimationen.* — Math. Ann. 92 (1924), 115 – 125.
8. V. I. Bernik, *About exact order of zero approximation by integer polynomials value.* — Acta arithmetica **53**, No. 1 (1989), 17–28.
9. V. Beresnevich, *On approximation of real numbers by real algebraic numbers.* — Acta Arith. **90**, No. 3 (1999), 97–112.
10. В. Н. Борбат, *Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных многочленов и их производных.* — Весцi АН Беларусi, сер. фiз. мат. навук No. 1 (1995), 9–16.
11. V. Bernik, D. Kleinbock, and G. A. Margulies, *Khintchine type theorems on manifolds: the convergence case for standart and multiplicative version.* — Int. Math. Res. Not. **9** (2001), 453–486.

Bernik V. I., Kukso O. S. Polynomials with small discriminants and regular systems of real algebraic numbers

In this article we research the distribution of special algebraic numbers and build optimal regular system.

Институт Математики
Бел. АН, Минск
E-mail: bernik@im.bas-net.by

Поступило 1 марта 2005 г.