Математические заметки

том 50 выпуск 2 август 1991

ДВУМЕРНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ СОВМЕСТНО ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В. И. Берник, Э. И. Ковалевская

1. Методом существенных и несущественных областей, введенным В. Г. Спринджуком [1] и развитым в [2], доказана общая индуктивная теорема об экстремальности двумерных поверхностей, заданных гладкими функциями двух переменных, частные производные первого порядка которых образуют совместно экстремальные многообразия. Понятие совместно экстремальных многообразий введено в [3].

Условимся в обозначениях: пусть n — натуральное число,

$$\mathbf{K}^2 = [\alpha_1, \beta_1) \to [\alpha_2, \beta_2), \quad \mathbf{E}^2 = [0, 1) \to [0, 1),$$

$\varepsilon > 0$ — произвольно малое действительное число, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$, $a = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \neq 0$, $\|\alpha\|$ — расстояние от действительного числа α до ближайшего целого. В качестве меры берем меру Лебега в $\mathbf{R}^2$; $|A|$ — мера измеримого множества A. Пусть $f_{1j}(x, y)$, $f_{2j}(x, y)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — функции действительных переменных x, y, определенные в $\mathbf{K}^2$. Многообразия $F_i = (f_{i1}(x, y), \ldots, f_{in}(x, y)) \in \mathbf{R}^n$ $(i = 1, 2)$ называются совместно экстремальными, если для любого $\varepsilon > 0$ система неравенств

$$\begin{aligned} &\| a_1 f_{11}(x, y) + \ldots + a_n f_{1n}(x, y) \| < a^{-n/2-\varepsilon}, \\ &\| a_1 f_{21}(x, y) + \ldots + a_n f_{2n}(x, y) \| < a^{-n/2-\varepsilon} \end{aligned} \tag{1}$$

имеет только конечное число целых решений $(a_1, \ldots, a_n)$ для почти всех $(x, y) \in \mathbf{K}^2$.

Любую двумерную поверхность $F(x, y) \subset \mathbf{R}^n$ можно представить в виде $F(x, y) = (x, y, f_3(x, y), \ldots, f_n(x, y))$.

Доказана

ТЕОРЕМА. *Пусть $n \geqslant 3$, $f_3(x, y), \ldots, f_n(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые в $\mathbf{K}^2$ функции, линейно независимые вместе с 1 над $\mathbf{Q}$. Двумерная поверхность $F(x, y)$ экстремальна,* *если*: 1) *поверхности*

$$\frac{\partial F_k}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y), \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial x}(x, y)\right),$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y), \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial y}(x, y)\right)$$

совместно экстремальны для всех k $(3 \leqslant k \leqslant n)$; 2) *при любых фиксированных* $a_1, \ldots, a_n$, $(x_0, y_0) \in \mathbf{K}^2$ *любые интервалы* $I(x_0) \subseteq [\alpha_2, \beta_2)$, $I(y_0) \subseteq [\alpha_1, \beta_1)$ *конечной длины можно разбить на конечное, не зависящее от* $a_1, \ldots, a_n$ *число подынтервалов, в каждом из которых функции* $a_1 x_0 + a_2 y + a_3 f_3(x_0, y) + \ldots + a_n f_n(x_0, y)$, $a_1 x + a_2 y_0 + a_3 f_3(x, y_0) + \ldots + a_n f_n(x, y_0)$ *монотонны*.

Теорему можно рассматривать как двумерное обобщение результата из [2], где одним из существенных условий было разделение переменных для всех функций в определении $F(x, y)$.

Нетрудно привести примеры многообразий, экстремальность которых устанавливается с помощью теоремы. Например, при $k + l = n$ можно положить $f_3(x, y) = x^2, \ldots, f_{k+1}(x, y) = x^k$, $f_{k+2}(x, y) = y^2, \ldots, f_n(x, y) = y^{n-k}$. Экстремальность этой поверхности ранее была получена Берником в [2], Виноградовым и Чудновским в [4]. Более содержательные примеры экстремальных поверхностей требуют детального исследования системы вида (1) для $\partial F_k/\partial y$ $(3 \leqslant k \leqslant n)$.

2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. *Пусть* $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ — *действительные числа*, $g(x)$ — *дифференцируемая функция действительной переменной* x, *определенная в интервале* I, *монотонная на каждом подынтервале* $I_j \subseteq I$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $I = \Sigma I_j$ *и* $|g'(x)| > \delta$ *для* $x \in I_j$. *Тогда* $|\{x \in I\colon |g(x)| < \delta_1\}| \leqslant 2n\delta^{-1}\delta_1$.

Доказательство. Пусть на некотором фиксированном подынтервале $I_j = [a_j, b_j]$ функция $g(x)$, например, убывает. Пусть $[\alpha_j, \beta_j] \in I_j$, $|g(x)| \leqslant \delta_1$ для $x \in [\alpha_j, \beta_j]$. Пусть $g(\alpha_j) = \delta_1$, $g(\beta_j) = -\delta_1$. Если $|g(x)| < \delta_1$ для $x \in I_j$, то положим $\alpha_j = a_j$, $\beta_j = b_j$. По формуле Лагранжа $g(\beta_j) - g(\alpha_j) = g'(\xi)(\beta_j - \alpha_j)$, где $\alpha_j < \xi < \beta_j$. Следовательно, $|\beta_j - \alpha_j| \leqslant 2\delta_1\delta^{-1}$, откуда получаем требуемое.

ЛЕММА 2. *Пусть* $c \geqslant 0$ — *действительное число*, $f(x) \geqslant 0$ — *непрерывная функция положительной переменной* x, $xf^2(x)$ *монотонно стремится к нулю при* $x \to \infty$. *Тогда неравенство* $\max(\|xq\|, \|yq\|) < f(q)$ *имеет для почти всех* (x, y) *не более конечного числа целых решений* $q > 0$, *если*

$$\int_c^\infty f^2(x)\,dx < \infty.$$

Доказательство см. в [7] или [5, с. 32—33].

Следствие. *В силу принципа переноса Хинчина* [6] *или* [8, с. 100] *заключение леммы* 2 *верно для неравенства* $\| a_1x + a_2y \| < a^{-2-\varepsilon}$, *где* $a = \max_{i=1,2} | a_i | \neq 0$, $f(q) = q^{-1-0{,}5\varepsilon}$.

ЛЕММА 3. *Пусть* D — *измеримое множество на прямой*, $| D | < \varepsilon$, *и пусть дана система* $\Lambda = \bigcup_{s=1}^{\infty} \lambda_s$ *ограниченных интервалов* λ_s *с условием*

$$| \lambda_s \cap D | \geqslant 0{,}5 \, | \lambda_s | \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Тогда $| \Lambda | < 4\varepsilon$.

Доказательство см. в [1, с. 26—28].

3. Доказательство теоремы. Напомним [5, с. 65], что поверхность $F(x, y)$ называется экстремальной, если при любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\| a_1x + a_2y + a_3f_3(x, y) + \ldots + a_nf_n(x, y)\| < a^{-n-\varepsilon} \qquad (2)$$

имеет бесконечно много целых решений $(a_1, \ldots, a_n)$ только для (x, y) из множества нулевой меры.

Теорему будем доказывать по индукции. Базой индукции служит утверждение, полученное А. Я. Хинчиным в 1925 г. и сформулированное в следствии к лемме 2. Сделаем индуктивное предположение о справедливости теоремы для неравенства (2) при $(n - 1)$ слагаемых и докажем теорему для n слагаемых.

Рассмотрим $(x, y) \in \mathbf{K}^2$, для которых выполняется (2) при фиксированном $\varepsilon > 0$ для бесконечно многих $(a_1, \ldots, a_n)$. Тогда по крайней мере для одного j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ неравенство (2) имеет бесконечно много решений по координате a_j. Зафиксируем такое j и обозначим через $F(a_j)$ класс функций

$$F_a(x, y) = a_1x + a_2y + a_3f_3(x, y) + \ldots + a_nf_n(x, y), \quad a = | a_j |. \qquad (3)$$

Произведем разбиение на подклассы: для целого $t \geqslant 0$ положим $F(a_j, t) = U_{2^t \leqslant a < 2^{t+1}} F(a_j)$. Дальше рассмотрим $\bigcup_{t \geqslant 0} F(a_j, t)$. Обозначим через $F_l(a_j, t)$ подкласс из $F(a_j, t)$ при фиксированном a_l, $l \neq j$ $(3 \leqslant l \leqslant n)$. Ясно, что $| a_l | < 2^{t+1}$.

Возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$. По условию 1) теоремы система неравенств

$$\begin{aligned} &\| a_3\partial f_3/\partial x(x, y) + \ldots + a_n\partial f_n/\partial x(x, y)\| < a^{-n/2+1-\varepsilon_1}, \\ &\| a_3\partial f_3/\partial y(x, y) + \ldots + a_n\partial f_n/\partial y(x, y)\| < a^{-n/2+1-\varepsilon_1} \end{aligned} \qquad (4)$$

имеет бесконечно много целых решений $(a_1, \ldots, a_n)$ только для (x, y) из множества M нулевой меры. Следовательно, применяя соображения теории меры, как в [5, с. 85], с учетом условия 2) теоремы достаточно ограничиться рассмотрением неравенств (2), (4) на множествах $\mathbf{E}^2$ и M соответственно, $M \subset \mathbf{E}^2$, $| M | = 0$.

Зафиксируем $\varepsilon_2 > 0$ и рассмотрим ε_2-разбиение $\mathbf{E}^2$ на квадраты со стороной длины ε_2: $\mathbf{E}^2 = \sum E_i$, $| E_i | \leqslant \varepsilon_2^2$. Теперь зафиксируем i и проведем рассуждение для одного E_i. При фиксированных l, j, t в классе $F_l(a_j, t)$ имеем $| a_l | \leqslant a$, $2^t \leqslant a < 2^{t+1}$.

Разобьем E_i на квадраты со стороной длины

$$2^{-t(n/2+2\varepsilon_1)} < \varepsilon_2, \tag{5}$$

где $t \geqslant t_0(n, \varepsilon, \varepsilon_2) = t_0$ выбрано так, что выполняется (5). Выделим из них квадраты E_{ij}^*, в которых существуют точки (x, y), удовлетворяющие (4) для поверхностей $\partial F_n/\partial x$, $\partial F_n/\partial y$ при бесконечно многих целых $(a_1, \ldots, a_n)$. Рассмотрим такие E_{ij}^*, для которых $|M \cap E_{ij}^*| \geqslant 0{,}5\,|E_{ij}^*|$. Множество индексов j, соответствующих таким E_{ij}^*, обозначим через J. Тогда $\sum_{j\in J}|E_{ij}^*| \leqslant 2|M| = 0$.

В каждом из оставшихся квадратов E_{ij}^*, $j \notin J$, имеем $|M \cap E_{ij}^*| < 0{,}5\,|E_{ij}^*|$. В силу обозначения (3) и определения класса $F_l(a_j, t)$ в каждом из них существует точка (α_j, β_j):

$$\left|\frac{\partial f_a}{\partial x}(\alpha_j, \beta_j)\right| > 2^{-t(n/2-1+\varepsilon_1)} \tag{6}$$

или

$$\left|\frac{\partial f_a}{\partial y}(\alpha_j, \beta_j)\right| > 2^{-t(n/2-1+\varepsilon_1)} \tag{7}$$

при $t \geqslant t_0$.

Пусть выполняется (7). Тогда из (3), (5), (7) и разложения в E_{ij}^*

$$\frac{\partial f_a}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_a}{\partial y}(\alpha_j, \beta_j) + \frac{\partial^2 f_a}{\partial y \partial x}(\theta_{1j}, \theta_{2j})(x - \alpha_j) + \frac{\partial^2 f_a}{\partial y^2}(\theta_{1j}, \theta_{2j})(y - \beta_j),$$

где $(\theta_{1j}, \theta_{2j}) \in E_{ij}^*$, при $t > (2\varepsilon_1)^{-1} = t_1$ получим

$$|\partial f_a/\partial y\,(x, y)| > 2^{-t(n/2-1+\varepsilon_1)-1}\quad (x, y) \in E_{ij}^*,\ j \notin J. \tag{8}$$

Аналогично рассуждая в случае (6), получим такую же оценку для $\partial f_a/\partial x\,(x, y)$, когда $(x, y) \in E_{ij}^*$, $j \notin J$. Зафиксируем некоторую функцию $f_A \in F_l(a_j, t)$ $(3 \leqslant l \leqslant n,\ l \neq j)$ при $a = A$. Произведем сечение F_{ij}^* при $x = x_0$. В силу условия 2) теоремы дальше достаточно рассматривать один интервал монотонности функции $f_A(x_0, y)$. Обозначим его через $I_{ij}(x_0)$. Введем интервалы $I_1(f_A) = \{y \in I_{ij}(x_0), j \notin J,$ для которых выполняется $(2)\}$, $I_2(f_A) = \{y \in I_{ij}(x_0),\ j \notin J\colon\ \|f_A(x_0, y\| < 2^{-t(n-1+3\varepsilon_1)}\}$. Заметим, что если $(x_0, y) \in I_1(f_A)$, то $(x_0, y) \in I_2(f_A)$. По лемме 1 при $t > 2t_1$ получим

$$|I_2(f_A)| \leqslant 2^{-t(n/2+\varepsilon_1)}. \tag{9}$$

Если существует такая функция $f_B \in F_l(a_j, t)$, $f_B \neq f_A$, что $|I_2(f_A) \cap I_2(f_B)| \geqslant |I_2(f(A))|/2$, то на интервале $I_2(f_A) \cap I_2(f_B)$ для функции $r(x_0, y) = f_A(x_0, y) - f_B(x_0, y) = b_1x_0 + b_2y + \ldots + b_{l-1}f_{l-1}(x_0, y) + b_{l+1}f_{l+1}(x_0, y) + \ldots + b_nf_n(x_0, y)$ выполняется неравенство

$$\|r(x_0, y)\| < 4a^{-n+1-\varepsilon\varepsilon_1} < 8b^{-n+1-\varepsilon\varepsilon_1},\quad b = \max_{i\neq l}|b_i|. \tag{10}$$

Возьмем произвольно малое $\gamma > 0$. Обозначим через $D(\gamma)$ множество тех (x_0, y), для которых (10) имеет бесконечно много целых решений $(b_1, \ldots, b_{l-1}, b_{l+1}, \ldots, b_n)$ при $a \geqslant a(\gamma)$. За счет выбора достаточно большого $a(\gamma)$, т. е. выбора $t > t_1(\gamma)$ для $n = 3$ в силу следствия из леммы 2 и для $n > 3$ по индуктивному предположению, получим $|D(\gamma)| < \gamma/4$. Положим $\Lambda(\gamma) = \bigcup_{f_A}(I_2(f_A))$, где $I_2(f_A)$: $|I_2(f_A) \cap I_2(f_B)| \geqslant 0{,}5\,|I_2(f_A)|$ при $a > a(\gamma)$. Тогда $|I_2(f_A) \cap D(\gamma)| \geqslant 0{,}5\,|I_2(f_A)|$ и по лемме 3 $|\Lambda(\gamma)| < \gamma$.

Осталось рассмотреть такие $I_2(f_A)$, что при любой функции $f_B \in F_l(a_j, t)$ выполняется неравенство

$$|I_2(f_A) \cap I_2(f_B)| < 0{,}5\,|I_2(f_A)|. \tag{11}$$

В силу (11) каждая точка из $I_2(f_A)$ покрывается не более чем двумя интервалами вида $I_2(f_A)$. Следовательно, суммируя по всем целым a_j $(1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq l)$, где $2^t \leqslant a < 2^{t+1}$, $t > \max(t_0, 2t_1, t_1(\gamma))$, величины l и a_l фиксированы, $3 \leqslant l \leqslant n$, получим

$$\sum I_2(f_a) \leqslant 2\varepsilon_2. \tag{12}$$

Переходим к оценке меры $I_1(f_a)$. Возьмем точки y_0, y из $I_2(f_a)$: $y_0 \in I_1(f_a)$, y — такая концевая точка интервала $I_2(f_a)$, что $|y - y_0| > |I_2(f_a)|/3$. Тогда

$$|y - y_0| = \theta\,|I_2(f_a)|, \quad {}^1/_3 < \theta \leqslant 1. \tag{13}$$

На $I_2(f_a)$ рассмотрим представление в ряд Тейлора при $0 < |\theta_1| < 1$

$$f_a(x_0, y) = f_a(x_0, y_0) + (y - y_0)\left[\frac{\partial f_a}{\partial y}(x_0, y_0) + (y - y_0)\cdot\right. \tag{14}$$
$$\left.\cdot\frac{\partial^2 f_a}{\partial y^2}(x_0, y_0 + \theta_1(y - y_0))\right] = f_a(x_0, y_0) + (y - y_0)\,\Phi(a, x_0, y_0, y, \theta_1).$$

Положим

$$\max_{(x, y) \in E_{ij}} |\partial^2 f_a/\partial y^2\,(x, y)| = \alpha_{ij}. \tag{15}$$

Так как в силу (13), (9) имеем $|y - y_0| < |I_2(f_a)| \leqslant a^{-n/2-2\varepsilon_1}$, то из (3), (8), (15) получим

$$|\partial^2 f_a/\partial y^2\,(x_0, y + \theta_1(y - y_0)^2)| < n\alpha_{ij}a^{-n/2-2\varepsilon_1} <$$
$$< na^{-n/2+1-\varepsilon_1} < 0{,}5\,|\partial f_a/\partial y\,(x_0, y_0)| \tag{16}$$

при $t > \varepsilon_1^{-1}(\ln 2n)/\ln 2 = t_2$, где t_2 выбирается так, чтобы выполнялось 3-е неравенство в (16). Следовательно,

$$|\Phi(a, x_0, y_0, y, \theta)| < {}^1/_2\,|\partial f_a/\partial y\,(x_0, y_0)|.$$

Тогда при $0 < \theta_2 < 0{,}5$ из (14) находим

$$f_a(x_0, y) - f_a(x_0, y_0) = (y - y_0)\theta_2\partial f_a/\partial y\,(x_0, y_0). \tag{17}$$

Учитывая выбор точек y, y_0, получаем, что в (17) левая часть удовлетворяет равенству

$$f_a(x_0, y) - f_a(x_0, y_0) = \theta_3 a^{-n+1-\varepsilon_3}, \quad 0 < \theta_3 < 2. \tag{18}$$

Из доказательства леммы 1 находим

$$|I_1(f_a)| \leqslant |f_a(x_0, y_0) - f_a(x_0, y)| \left|\frac{\partial f_a}{\partial y}(x_0, y_0)\right|^{-1}. \tag{19}$$

Учитывая (17), (18), (13), выбор y_0, интервал изменения a: $2^t \leqslant a < 2^{t+1}$ при $t > t_2$, из (19) получим

$$|I_1(f_a)| \leqslant |f_a(x_0, y_0) - f_a(x_0, y)| \, \theta_2 \, |y - y_0| \, 2a^{n-1+3\varepsilon_1} \leqslant$$
$$\leqslant 2a^{-n-\varepsilon} \, |I_2(f_a)| \, a^{n-1+3\varepsilon_1} < 2^{-t(1+\varepsilon/4)+1} \, |I_2(f_a)|. \tag{20}$$

Таким образом, из (20), (12) при фиксированном $x = x_0$, $t \geqslant t_3 = \max(t_0, 2t_1, t_1(\gamma), t_2)$ и условии 2) теоремы общая мера множества $(x_0, y) \in E^*_{ij}$, удовлетворяющих (2), оценивается следующим образом:

$$\sum_{t \geqslant t_3} \sum_{a_l} \sum_{a_j,\, j \neq l,} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n\, 2^t \leqslant a < 2^{t+1}} |I_1(f_a)| <$$
$$< 2c \sum_t \sum_{a_l} \sum_{a_j} |I_2(f_a)| \, 2^{-t(1+\varepsilon/4)} <$$
$$< 4\varepsilon c \sum_t \sum_{a_l} 2^{-t(1+\varepsilon/4)} < 4\varepsilon c \sum_t 2^{-t\varepsilon/4+1} = 8\varepsilon c \theta_4,$$

где $c > 0$ — граница для количества интервалов монотонности, не зависящая от $a_1, \ldots, a_n$ по условию 2) теоремы, θ_4 — абсолютная постоянная. Следовательно, мера тех $(x, y) \in E^*_{ij}$, для которых выполняется (2), не превосходит

$$\int_0^1 8\varepsilon c \theta_4 \, dx = 8\varepsilon c \theta_4$$

для любого $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Институт математики
АН БССР

Поступило
07.03.88
Переработанный вариант
21.02.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск: Наука и техника, 1967.
[2] Берник В. И. Порожденные экстремальные поверхности // Мат. сб. 1977. Т. 103 (145), № 4 (8). С. 480—489.
[3] Ковалевская Э. И. Совместно экстремальные многообразия // Математические заметки. 1987. Т. 41, вып. 1. С. 3—8.
[4] Chudnovsky G. V. Contributions to the theory of transcendental numbers. Math. surveys and monographs. Providence: Amer. Math. Soc., 1980. N 19.
[5] Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.
[6] Khintschine A. Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Perron // Math. Zeitschr. 1925. Bd 22. S. 274—284.
[7] Khintschine A. Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen // Rend. Circolo Mat. Palermo. 1926. Bd 50. S. 175—195.
[8] Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.