Доклады Национальной Академии Наук Беларуси. **46** (2002), N4, 13-15.
Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi, **46** (2002), no. 4, 13-15

В.В.Бересневич, В.И.Берник, Э.И.Ковалевская

МЕТРИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ О ПРИБЛИЖЕНИИ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ ОГРАНИЧЕННОЙ СТЕПЕНИ

(Представлено академиком Н.А.Изобовым)

Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ – многочлен с целыми коэффициентами степени n и $H(P) = \max_{0\le i\le n} |a_i|$ – высота $P(x)$. Обозначим через $|A|$ и μB меру Лебега множества $A \subset R^n$ и меру Хаара множества $B \subset Q_p$ соответственно, а через $|\omega|_p$ – p-адическую норму $\omega \in Q_p$. Для монотонно убывающей функции ψ: $R \to R_+$ через $L_n(\Psi)$ и $M_n(\Psi)$ будем обозначать множество тех $x \in R$ и $\omega \in Q_p$, для которых неравенства

$$|P(x)| < H^{-n+1}\Psi(H), \tag{1}$$

$$|P(\omega)| < H^{-n}\Psi(H), \tag{2}$$

имеют бесконечное число решений в полиномах $P \in Z[x]$, $\deg P \le n$.

В.Г.Спринджук [1] доказал, что для любого $\varepsilon > 0$ имеем $|L_n(\Psi)| = 0$ и $\mu M_n(\Psi) = 0$ при $\Psi(x) = x^{-1-\varepsilon}$, решив тем самым проблему Малера о множестве $L_n(x^{-1-\varepsilon})$. Окончательно результат, при $n = 1$ совпадающий с теоремой Хинчина [2], дает следующее утверждение:

$$\left|L_n(\psi)\right| = \begin{cases} 0 \quad \textit{при} \quad \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \textit{полная} \quad \textit{при} \quad \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Случай сходимости доказан в 1989 году в [3], а случай расходимости — в 1998 году в [4].

В настоящей статье будет дана схема доказательства двух теорем, дающих полное обобщение утверждения (3) на поле p-адических чисел. Далее K – некоторый круг в Q_p.

Т е о р е м а 1. *Пусть $S_n(\Psi)$ — множество $\omega \in K$, для которых неравенство*

$$|\omega - \xi|_p < H^{-n}\Psi(H) \tag{4}$$

имеет бесконечное число решений в алгебраических p-*адических числах $\xi \in Q_p$, $\deg \xi \le n$. Тогда*

$$\mu S_n(\Psi) = \begin{cases} 0, \text{если} & \sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu K, \text{если} & \sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases}$$

Т е о р е м а 2. *При сделанных выше предположениях верно следующее равенство*

$$\mu M_n(\Psi) = \begin{cases} 0, \text{если} & \sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty \\ \text{полная}, \text{если} & \sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty \end{cases}$$

Заметим, что случай сходимости в теореме 1 несложен. Он доказывается непосредственным подсчетом меры $\omega \in Q_p$ удовлетворяющих (4) и суммированием этих мер по всем $P \in Z[x]$ с использованием леммы Бореля–Кантелли. Краткое изложение случая сходимости в теореме 2 опубликовано в [5]. Оно разбивается на ряд случаев в зависимости от величины производной в корне многочлена и использования оценок результантов двух многочленов без общих корней.

Следующее простое замечание состоит в том, что случай расходимости в теореме 2 легко следует из доказательства случая расходимости в теореме 1. Для этого достаточно разложить в ряд многочлен P(x) в окрестности корня ξ для которого выполняется оценка (4). Поэтому нам осталось привести обоснование случая расходимости в теореме 1. Это можно сделать с помощью построения наилучшей регулярной системы и метода, изложенного в [6].

Пусть Γ – множество p-адических чисел и $N : \Gamma \to R^+$ – некоторая функция. Пара (Γ, N) называется регулярной системой точек в круге $K_0 \subset Q_p$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого круга $K \subset K_0$ найдется $T_0 > 0$, что для всех $T > T_0$ найдется набор $\gamma_1, \ldots, \gamma_t \in \Gamma \cap K$, удовлетворяющий условиям $N(\gamma_l) \leq T$ $(1 \leq i \leq t)$, $|\gamma_i - \gamma_j|_p > T^{-1}$ $(1 \leq i < j \leq t)$, $t > CT\mu K$.

Л е м м а 1. *Пара* $\Gamma = \{ \gamma \in Q_p\colon \exists P \in P[x],\ P(\gamma) = 0 \}$ *и* $N(\gamma) = \min\limits_{P \in P[x],\, P(\gamma) = 0} H(P)^{n+1}$ *является регулярной системой точек в* K_0 .

Ключевым моментом при доказывании леммы 1 является следующая лемма, имеющая самостоятельный интерес.

Л е м м а 2. *Пусть* $F(Q) = \{ P \in P[x]\colon H(P) \leq Q \}$, $\varepsilon \geq 0$ *и* $\Delta(K, Q, \varepsilon) = \{ x \in K\colon \exists P \in F(Q),\ |P(x)|_p < \varepsilon Q^{-n-1} \}$, *где* $K \in K_0$ *— некоторый круг,* $Q \geq 1$, $\varepsilon > 0$. *Тогда существует абсолютная постоянная* $C_1 > 0$ *такая, что* $\mu\Delta(K, Q, \varepsilon) < C_1 \varepsilon$ *для всех* $Q > Q_0(K, \varepsilon)$.

Доказательство леммы 2 проводится с использованием двух различных методов в зависимости от величины первой производной в точке x, в которой $|P(x)|_p < \varepsilon Q^{-n-1}$. Если $|P'(x)|_p \geq H^{-1/2}(P)$, то используется приём, введённый В.Г. Спринджуком [1] при доказательстве проблемы Малера. Если выполняется противоположное неравенство $|P'(x)|_p < H^{-1/2}(P)$, то доказательство разбивается ещё на несколько случаев, связанных со значением производной и расстоянием между ближайшими корнями Р (х). Существенным моментом доказательства является переход к неприводимым многочленам и оценки результантов.

Оказывается, что точная регулярная система обеспечивает расходимость, что показано в [7] для случая приближения действительных чисел алгебраическими. В данной работе всё решает достаточно общая

Л е м м а 3 [8]. *Пусть* (Γ, N) *— регулярная система точек в круге* $K_0 \subset Q_p$, $\varphi : R^+ \to R^+$ *— монотонно убывающая функция такая, что* $\sum_{h=1}^{\infty} \varphi(h) = \infty$. *Тогда множество* Γ_φ, *состоящее из точек* $x \in K_0$ *таких, что неравенство*

$$| x - \gamma |_p < \varphi(N(\gamma)) \tag{5}$$

имеет бесконечное число решений $\gamma \in \Gamma$, *имеет полную меру Хаара, т.е. равную* μK_0.

Лемма 3 доказывается в два этапа. Вначале устанавливается, что множество точек, для которых выполняется неравенство (5) имеет положительную меру, для чего используется лемма из [9, стр.23]. Затем используется несложная, но весьма общая лемма Кноппа, которая позволяет от множества положительной меры перейти к множеству полной меры.

Работа выполнена в Институте математики Национальной академии наук Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические структуры» при финансовой поддержке Республиканского фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (договор Ф00-249).

Summary

A complete analogue of the metric Khinchine theorem for polynomials of arbitrary degree over the p-adic field is proved.

Литература

1. Спринджук В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Мн., 1967.
2. Khintchine A. // Math. Ann. 1924. Vol.92. P.115-125.
3. Берник В.И. // Acta Arithm. 1989. Vol.53. P.17-28.
4. Beresnevich V. // Acta Arithm. 1999. Vol. 90. №3. P.97-112.
5. Ковалевская Э.И. // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т.43.№5. с.34-36.
6. Бересневич В.В. // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2000. №1. с.35-39.
7. Beresnevich V., Bernik V. // Acta Arithm. 1996. Vol. 57. №3. P.219-233.
8. Бересневич В.В., Ковалевская Э.И. // Препринт / Ин-т математики НАН Беларуси : 2 (556). 2000. 19 с.
9. Спринджук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.

Институт математики НАН Беларуси