Доклады Национальной Академии Наук Беларуси. **46** (2002), N6, 18-20.
Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi, **46** (2002), no. 6, 18-20

В.В.БЕРЕСНЕВИЧ, В.И. БЕРНИК, М.М. ДОДСОН

О РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА МНОЖЕСТВ ХОРОШО ПРИБЛИЖАЕМЫХ ТОЧЕК НА НЕВЫРОЖЕННЫХ КРИВЫХ

(*Представлено академиком Н. А. Изобовым*)

Пусть S — некоторое множество действительных чисел и $\delta > 0$. Пусть множество интервалов $I_1, I_2, \ldots$ образует покрытие множества S. Если длины интервалов покрытия не превосходят δ, то говорят, что диаметр покрытия не превосходит δ. Для некоторого $\rho \in [0,1]$ определим величину $H^{\rho}_{\delta}(S) = \inf \sum\limits_{j=1}^{\infty} |I_j|^{\rho}$, где инфимум берется по всем счетным покрытиям $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ из интервалов множества S диаметра $\leq \delta$. Величина $H^{\rho}_{\delta}(S)$ не возрастает, когда δ убывает, оставаясь при этом положительной (возможно, равной бесконечности). Поэтому существует предел $H^{\rho}(S) = \lim_{\delta \to 0,\, \delta > 0} H^{\rho}_{\delta}(S)$, называемый *внешней* ρ*-мерой Хаусдорфа* множества S. Легко проверяется, что существует единственное число $\rho_0 \in [0,1]$ такое, что для всех ρ, $0 \leq \rho < \rho_0$ верно $H^{\rho}(S) = \infty$, в то время как для всех ρ, $\rho_0 < \rho \leq 1$ верно $H^{\rho}(S) = 0$. Это число называется размерностью Хаусдорфа множества S и обозначается $\dim S$.

Обозначим через $L_1(w)$ множество действительных чисел x, для которых неравенство

$$|x - p/q| < q^{-w-1} \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в целых числах p и $q > 0$. Хорошо известно, что $L_1(w) = \mathbf{R}$ при любом $w \leq 1$ и мера Лебега этого множества равна нулю при $w > 1$. Ярник [1] и Безикович [2] доказали, что $\dim L_1(w) = 2/(w+1)$ при $w > 1$.

Выражения под знаком модуля в (1), записанные в виде $xq - p$, являются многочленами первой степени относительно x и их значения в точке x характеризуют так называемую меру иррациональности числа x. Меру трансцендентности действительного числа x характеризуют значения в этой точке многочленов

$$\begin{gathered} P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \\ a_j \in \mathbf{Z}, 0 \leq j \leq n; H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|. \end{gathered} \tag{2}$$

Обозначим через $L_n(w)$ множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H(P)^{-w}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P \in \mathbf{Z}[x]$, $\deg P \leq n$. В [3, 4] было получено равенство $\dim L_n(w) = (n+1)/(w+1)$ при $w > n$, которое выявляет структуру кривой $V_n = \{(x, \ldots, x^n) : x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n$ по степени их приближаемости.

Пусть теперь $\Gamma_n = \{(f_1(x), \ldots, f_n(x)) : x \in [a,b]\} \subset \mathbf{R}^n$ —- кривая, где $f_j(x) \in C^{(n)}[a,b]$ — функции такие, что вронскиан $W(x) = \det(f_j^{(i)}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ отличен от нуля для почти всех $x \in [a,b]$. В дальнейшем аналогично (2) $F(x)$ будет обозначать ненулевую линейную форму с целыми коэффициентами вида $a_n f_n(x) + a_{n-1} f_{n-1}(x) + ... + a_1 f_1(x) + a_0$, где $a_j \in \mathbf{Z}, 0 \le j \le n$, $H = H(F) = \max_{1\le j\le n} |a_j|$. Пусть $M_n(w)$ — множество $x \in [a,b]$, для которых неравенство

$$|F(x)| < H(F)^{-w} \tag{3}$$

имеет бесконечное число решений в F (целочисленных векторах $\mathbf{a} = (a_0,..., a_n)$). Доказано, что $M_n(w)$ имеет нулевую меру Лебега при $w > n$, а также рассмотрена аналогичная задача с правой частью в (3) более общего вида (так называемая теорема хинчиновского типа) [5, 6]. Р. Бейкер [7], основываясь на результатах В. Шмидта, установил, что $\dim M_2(w) = 3/(w+1)$ при $w > 2$. Однако даже при $n = 3$ до сих пор не удавалось найти точное значение размерности Хаусдорфа множества $M_n(w)$ ни при каком $w > n$, хотя некоторые содержательные верхние оценки были получены. В то же время точная нижняя оценка была получена для задачи о размерности Хаусдорфа линейно приближаемых точек на любом экстремальном (в том числе и невырожденном) многообразии [8]. Согласно этого результата $\dim M_n(w) \ge (n+1)/(w+1)$ при любом $w > n$. Также хорошо известна гипотеза о том, что $(n+1)/(w+1)$ является верхней оценкой для $\dim M_n(w)$. В настоящей работе мы доказываем эту гипотезу для показателей аппроксимации, близких к n.

Теорема. *Пусть* $n < w < n + n/(4n^2 + 2n - 4)$ *и вронскиан* $W(x) = \det(f_j^{(i)}(x))_{1\le i,j\le n}$ отличен от нуля для всех $x \in [a,b]$ *за исключением множества размерности Хаусдорфа не более* $(n+1)/(w+1)$. Тогда *верно равенство* $\dim M_n(w) = (n+1)/(w+1)$.

В основе доказательства лежат следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(x)$ — *дважды непрерывно дифференцируемая функция на интервале* $J = [a,b]$. *Пусть система неравенств*

$$|\varphi(x)| < \varepsilon,\ |\varphi'(x)| < \delta, \tag{4}$$

где $\varepsilon, \delta > 0$, *имеет решение* $y_0 \in J$ *такое, что* $\min(y_0 - a, b - y_0) > \varepsilon / 2\delta$, *и пусть* $|\varphi''(x)| < 4\delta^2/\varepsilon$ *для всех* $x \in J$. *Тогда неравенство* $|\varphi(x)| < 2\varepsilon$ *выполнено на некотором интервале* $I \subset J$, $|I| \ge \varepsilon/\delta$.

Доказательство. Обозначим через $B(\varepsilon,\delta)$ множество решений системы неравенств (4) на интервале $(a + \varepsilon/2\delta, b - \varepsilon/2\delta)$. По условию $B(\varepsilon,\delta) \ne \varnothing$. Пусть $x_0 \in B(\varepsilon,\delta)$. Тогда интервал $I = \{x : |x - x_0| < \varepsilon/2\delta\}$ содержится в J. Из разложения по формуле Тейлора

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi''(\xi)(x - x_0)^2/2,\ x \in I,$$

и оценок $|\varphi(x_0)| < \varepsilon$, $\max(|\varphi'(x_0)(x - x_0)|, |\varphi''(x_0)(x - x_0)^2|/2) < \varepsilon/2$ получаем $|\varphi(x)| < 2\varepsilon$.

Лемма 2. *Пусть* B *есть объединение непересекающихся интервалов* I_j. *Обозначим через* I_0 *самый короткий из этих интервалов,* $|I_0| = \beta$. *Тогда, если* $\mu(B) < \varepsilon$, $\max_j |I_j| \le 1$ *и* $0 \le \rho \le 1$, *то* $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|^\rho \le 2\varepsilon/\beta^{1-\rho}$.

Доказательство. Разделим каждый интервал I_j на подинтервалы одинаковой длины $\beta_j \in [\beta/2, \beta]$. Обозначим через s_j число подинтервалов интервала I_j, полученных при этом разбиении. Ясно, что $s_j \le 2|I_j|/\beta$. Поскольку $0 \le \rho \le 1$, то

$$|I_j|^\rho = (\beta_j s_j)^\rho \le \beta_j^\rho s_j \le \beta^\rho 2|I_j|/\beta = 2|I_j|/\beta^{1-\rho}. \tag{5}$$

Суммируя (5) по всем j и учитывая, что $\sum_j |I_j| \le \varepsilon$, получаем требуемое.

Схема доказательства теоремы. Прежде всего заметим, что без ограничения общности можно рассмотреть произвольный сколь угодно малый отрезок кривой, не содержащий вырожденных точек. При этом мы исключаем из рассмотрения множество, размерность которого не превосходит $(n+1)/(w+1)$.

Определим класс функций $\Phi(t)=\{F(x): 2^t \le H(F) < 2^{t+1}\}$, где $F(x)$ определено ранее. Ясно, что каждая функция $F(x)$ попадает в точности в один из этих классов при $t \ge 0$. Для каждого t построим покрытие множества $M_n(w)$ интервалами малой суммарной ρ-меры. Заметим, что неравенство (3) влечет

$$|F(x)| < 2^{-tw} \tag{6}$$

для функций $F(x) \in \Phi(t)$. Пусть $B(t)$ обозначает множество чисел x таких, что выполнено (6) при некоторой $F(x) \in \Phi(t)$. Согласно результата из [9] получаем $\mu(B(t)) << 2^{-t(w-n)}$, где $<<$ — символ Виноградова. Проверив выполнимость условий леммы 1 для неравенства (6), заключаем, что вместе с любым решением неравенства (6) неравенству

$$|F(x)| < 2 \cdot 2^{-tw} \tag{7}$$

удовлетворяет целый интервал решений и длина минимального из них не менее $c(n) \cdot 2^{-t(w+1)}$. Объединение интервалов, удовлетворяющих (7) при $F(x) \in \Phi(t)$, обозначим через $B_1(t)$. Ясно, что $B(t) \subset B_1(t)$ и $\mu(B_1(t)) \le 2^{-t(w-n)}$, согласно [9]. Пусть $\rho = (n+1)/(w+1) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда, по лемме 2, ρ-мера покрытия $B_1(t)$ оценивается следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{m(t)} |I_j|^{\rho} << 2^{-t(w-n)-t(w+1)(\rho-1)} = 2^{-t(w-n)+t(w+1)((w-n)/(w+1)-\varepsilon)} = 2^{-t(w+1)\varepsilon} \to 0$$

при $t \to \infty$. Поскольку $M_n(w)$ состоит из точек, которые принадлежат бесконечному числу покрытий $B_1(t)$, то ρ-мера множества $M_n(w)$ сколь угодно мала, т.е. равна нулю при выбранном ρ. По определению размерности Хаусдорфа, получаем $\dim M_n(w) \le (n+1)/(w+1) + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и наличия точной нижней оценки получаем требуемый результат.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси при поддержке проекта БРФИИ Ф00-249 и проекта INTAS 00 – 429.

Summary

In this paper we consider the set of linearly w-approximable points ($w > n$) lying on a non-degenerate curve. For approximation exponents in the range of $n < w < n + c/n$, where $c > 0$ is an effectively computable constant close to 0.25, it is proved that the Hausdorff dimension of this set is $(n+1)/(w+1)$.

Литература

1. Jarnik V. // Prace Mat.-Fiz.1929. P.91—106.
2. Besicovich A. S. // J. Lond. Math. Soc. 1934. Vol. 9. P.126—131.
3. Baker A., Schmidt W.M.// Proc. Lond. Math. Soc. 1970. Vol. 21. P. 1—11.
4. Берник В.И. // Acta Arithmetica. 1983. Vol. 42. P.219—253.
5. Beresnevich V.V. // Acta Mathematica Hungarica. 2002. Vol. 94, № 1–2. P. 99—130.
6. Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. // International Mathematics Research Notices. 2001. № 9. P. 453—486.
7. Baker R. // Math. Proc. Cam. Phil. Soc. 1978. Vol. 83. P. 37—59.
8. Dickinson H., Dodson M. // Duke Mathematical Journal. 2000. Vol. 101, № 2. P.271—281.
9. Берник В.И. // Доклады НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 3. С. 15—17.
10. Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine approximation on manifolds. CUP, 1999.