

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
О.Г. Прохоренко

«08» июля 2022 г.

Регистрационный № УД – 11389/уч.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направление специальности

1-31 03 01 04 Математика (научно-конструкторская деятельность)

2022 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021, типового учебного плана по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям) № G 31-1-011/пр-тип. от 31.03.2021, учебного плана № G31-1-018/уч. от 25.05.2021

СОСТАВИТЕЛИ:

Иванишко Ия Александровна, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского Государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Трубников Юрий Валентинович, профессор кафедры инженерной физики факультета математики и информационных технологий Витебского государственного университета имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, профессор.

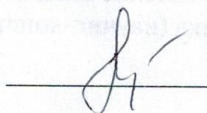
РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 13 от 12.05.2022);

Научно-методическим Советом БГУ

(протокол № 6 от 29.06.2022)

Заведующий кафедрой



А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – «Экстремальные задачи»: повышение уровня профессиональной компетентности в решении проблем оптимизации в различных сферах трудовой деятельности, изучение повышение уровня профессиональной компетентности в исследовании проблем оптимизации сложной организационной деятельности, расширение математического кругозора, знакомство с новыми методами доказательств, усвоение новых алгоритмов решения задач оптимизации.

Задачи учебной дисциплины:

1. анализ оптимизационных алгоритмов экстремальных задач;
2. практическое использование алгоритмов при моделировании сложных технологических процессов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к «Дополнительным видам обучения» компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Изучение дисциплины базируется на знаниях дисциплины «Математический анализ».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Экстремальные задачи» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции:**

БПК-2. Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия и теоремы и теории графов;
- основные понятия и теоремы дискретных задач оптимизации.

уметь:

- применять экстремальную теорию графов методы для решения практических задач;
- составлять и оптимизировать сетевые модели.

владеть:

- методами решения экстремальных задач теории графов;
- методами исследования сетевых моделей.

Структура учебной дисциплины

Учебная дисциплина изучается в 3 семестре очной формы получения образования.

Всего на изучение дисциплины отводится 108 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Форма текущей аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА¹

Тема 1. Примеры экстремальных задач на графах.

1.1. Задача о кенигсбергских мостах, задача коммивояжера, сетевое планирование.

Тема 2. Неориентированные графы.

2.1. Определение графа, ребра, вершины, порядок графа, полный граф, маршруты, цепи, простые цепи, циклы.

Тема 3. Эйлеровы циклы.

3.1. Определение, лемма о рукопожатиях, критерий существования эйлерова цикла.

Тема 4. Леса и деревья.

4.1. Определение, эквивалентные формулировки. Висячие, ветвящиеся вершины, уровни, корень дерева.

Тема 5. Ориентированные графы.

5.1. Определение, дуги, маршруты, цепи, простые, цепи, контуры, плотность графа.

Тема 6. Алгоритм Дейкстры.

6.1. Задача о поиске кратчайшего пути от заданной вершины до остальных, корректность алгоритма. Модифицированный алгоритм Дейкстры.

Тема 7. Алгоритм Флойда.

7.1. Задача о поиске кратчайшего пути между любой парой вершин в графе, рекурсивный поиск кратчайших путей, циклы отрицательной длины, корректность алгоритма.

Тема 8. Модификации алгоритма Флойда.

8.1. Задача об “узких” местах. Задача о мостах.

Тема 9. Сети, потоки, разрезы.

9.1. Определения, мощность потока, (s,t) -пути, насыщающие (s,t) -пути, пропускная способность разреза, взаимосвязь потока максимальной величины и разреза минимальной пропускной способности.

Тема 10. Сети с ограниченными пропускными способностями дуг и допустимые потоки.

10.1. Определения, прямые и обратные дуги.

Тема 11. Задача о нахождении допустимого потока максимальной мощности.

11.1. Алгоритм Форда–Фалкерсона. Взаимосвязь потока максимальной величины и разреза минимальной пропускной способности, доказательство корректности алгоритма.

Тема 12. Задача о построении потока минимальной стоимости.

12.1. Критерий оптимальности. Алгоритмы Басакера-Гоуэна и Клейна. Граф модифицированных стоимостей, взаимосвязь с исходной сетью и потоком. Доказательство корректности алгоритмов.

Тема 13. Задача коммивояжера.

13.1. Алгоритм Литтла.

13.2. Метод ветвей и границ, оценки для разбиения, процесс выращивания дерева, рекорд.

Тема 14. Календарное планирование.

14.1. Построение сетевой модели, работы, события, критическое время, критический путь, наиболее ранние возможные и наиболее поздние допустимые сроки наступления событий.

14.2. Гант-карта, оптимизация ресурсов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Примеры экстремальных задач на графах	2						
1.1.	Задача о кенигсбергских мостах, задача коммивояжера, сетевое планирование.	2						
2	Неориентированные графы.	2	1					
2.1.	Неориентированные графы. Определение графа, ребра, вершины, порядок графа, полный граф, маршруты, цепи, простые цепи, циклы.	2	1					Проверка индивидуальных заданий
3	Эйлеровы циклы	2	1					
3.1.	Определение, лемма о рукопожатиях, критерий существования эйлерова цикла.	2	1					Проверка индивидуальных заданий
4	Леса и деревья.	2	2					
4.1.	Определение, эквивалентные формулировки. Висячие, ветвящиеся вершины, уровни, корень дерева.	2	2					Проверка индивидуальных заданий

5	Ориентированные графы.	2	2					
5.1.	Определение, дуги, маршруты, цепи, простые, цепи, контуры, плотность графа.	2	2					
6	Алгоритм Дейкстры.	2	2					
6.1.	Задача о поиске кратчайшего пути от заданной вершины до остальных, корректность алгоритма. Модифицированный алгоритм Дейкстры.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
7	Алгоритм Флойда	2	2					
7.1.	Задача о поиске кратчайшего пути между любой парой вершин в графе, рекурсивный поиск кратчайших путей, циклы отрицательной длины, корректность алгоритма.	2	2					
8	Модификации алгоритма Флойда	2	2				2	
8.1.	Задача об “узких” местах. Задача о мостах.	2	2				2	Контрольная работа
9	Сети, потоки, разрезы	4	4					
9.1	Определения, мощность потока, (s,t)-пути, насыщающие (s,t)-пути, пропускная способность разреза	2	2					
9.2	Взаимосвязь потока максимальной величины и разреза минимальной пропускной способности	2	2					
10	Сети с ограниченными пропускными способностями дуг и допустимые потоки.	2	2					
10.1.	Определения, прямые и обратные дуги.	2	2					
11	Задача о нахождении допустимого потока максимальной мощности.	2	2				1	

11.1.	Алгоритм Форда–Фалкерсона. Взаимосвязь потока максимальной величины и разреза минимальной пропускной способности, доказательство корректности алгоритма.	2	2				1	Контрольная работа
12	Задача о построении потока минимальной стоимости.	4	2				1	
12.1	Критерий оптимальности. Алгоритмы Басакера-Гоуэна и Клейна. Граф модифицированных стоимостей, взаимосвязь с исходной сетью и потоком. Доказательство корректности алгоритмов.	4	2				1	Контрольная работа
13	Задача коммивояжера	4	4				1	
13.1	Алгоритм Литтла.	2	2					
13.2	Метод ветвей и границ, оценки для разбиения, процесс выращивания дерева, рекорд.	2	2				1	Контрольная работа
14	Календарное планирование	4	4				1	
14.1	Построение сетевой модели, работы, события, критическое время, критический путь, наиболее ранние возможные и наиболее поздние допустимые сроки наступления событий	2	2				1	Контрольная работа
14.2	Гант-карта, оптимизация ресурсов.	2	2					
	Всего	36	30				6	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Алгоритмы: построение и анализ : [пер. с англ.] / Томас Кормен [и др.]. - 3-е изд. - Москва; Санкт-Петербург : Вильямс, 2018. - 1323 с
2. Донкова, Ирина Адольфовна. Исследование операций и методы оптимизации : учебное пособие / И. А. Донкова ; Тюменский гос. ун-т. - Москва : ПРОСПЕКТ, 2020. – 195 с.

Перечень дополнительной литературы

3. Ху, Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху – М.: МИР, 1974. – 520 с.
4. Форд, Л.Р. Потоки в сетях. / Л.Р. Форд, Д.Р. Фалкерсон – М.: МИР, 1966. – 276 с.
5. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари – М.: МИР, 1973. – 300 с.
6. Оре, О. Теория графов / О. Оре – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 336 с.
7. Майника, Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Э. Майника – М.: Мир, 1981. – 324 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Формой текущей аттестации по дисциплине *«Экстремальные задачи»* учебным планом предусмотрен зачет.

Контроль работы студента проходит в форме контрольной работы в аудитории и проверке индивидуальных заданий. Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Зачет по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

Итоговая отметка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.).

2. Положение о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 189-ОД от 31.03.2020)

3. Критерии оценки результатов учебной деятельности обучающихся в учреждениях высшего образования по десятибалльной шкале (Письмо

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 8. Модификации алгоритма Флойда (2ч)

Студент изучает модификации алгоритма Флойда, задачу об «узких» местах, задачу о мостах.

Форма контроля – контрольная работа

Тема 11. Задача о нахождении допустимого потока максимальной мощности. (1ч)

1. Найти в сети поток максимальной величины.
2. При помощи модификации алгоритма Форда-Фалкерсона решить задачу об «узких» местах.

Форма контроля – контрольная работа

Тема 12. Задача о построении потока минимальной стоимости. (1ч)

1. При помощи алгоритма Басакера-Гоуэна построить в сети поток максимальной величины минимальной стоимости.
2. При помощи алгоритма Клейна построить в сети поток заданной величины минимальной стоимости.

Форма контроля – контрольная работа

Тема 13. Задача коммивояжера (1ч)

Студент изучает алгоритм Литтла. Метод ветвей и границ, оценки для разбиения, процесс выращивания дерева, рекорд.

Форма контроля – контрольная работа

Тема 14. Календарное планирование (1ч)

Студент изучает алгоритм построения сетевой модели. Находит критическое время, критический путь, наиболее ранние возможные и наиболее поздние допустимые сроки наступления событий

Форма контроля – контрольная работа

ВАРИАНТ № 1

1. Найти все решения задачи коммивояжера, определяемой матрицей стоимостей

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 7 & 5 & 7 \\ 4 & \infty & 5 & 4 & 10 \\ 5 & 4 & \infty & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 5 & \infty & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

2. Построить сетевую модель, найти критический путь и построить график распределения трудовых ресурсов.

№	Каким работам предшествует	Сроки выполнения	Потребность в рабочей силе
1	2	9	6
2	—	5	9
3	6, 10, 11	7	4
4	3, 5	5	7
5	6, 11	6	5
6	2	7	5
7	6, 10, 11	8	4
8	6, 10, 11	5	3
9	1, 8	3	8
10	2	9	3
11	—	8	8

3. В условиях предыдущей задачи
- оптимизировать распределение трудовых ресурсов;
 - составить оптимальный график работ, при котором потребность в рабочей силе не превосходит 17.
4. Доказать, что если мощность потока f в сети положительна, то его можно разложить в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров и путей, ведущих из s в t .

Примерная тематика практических занятий

Практическое занятие № 1. Псевдо- и мультиграфы, смежные и инцидентные вершины и ребра, степень вершины. Лемма о четности числа вершин с нечетной степенью. Маршруты, цепи, простые цепи, циклы. Выделение из маршрута простой цепи с теми же концами. Разбиение графа на связные компоненты.

Практическое занятие № 2. Критерий существования эйлера цикла. Алгоритм построения эйлера цикла.

Практическое занятие № 3. Критерии графа быть деревом. Остовное дерево. Задача о построении остовного дерева минимального веса. Алгоритм Прима, алгоритм Краскала.

Практическое занятие № 4. Маршруты, цепи, циклы, пути, контуры. Выделение из ориентированного маршрута пути с теми же концами. Задача о нахождении кратчайшего пути между двумя заданными вершинами. Алгоритм Дейкстры.

Практическое занятие № 5. Задача о поиске всех кратчайших путей в графе. Алгоритм Флойда.

Практическое занятие № 6. Нахождение циклов отрицательной длины. Задача об узких местах.

Практическое занятие № 7. Задача о нахождении допустимого потока максимальной мощности. Алгоритм Форда–Фалкерсона.

Практическое занятие № 8. Задача о построении потока минимальной стоимости. Критерий оптимальности. Граф модифицированных стоимостей, алгоритм Басакера-Гоуэна.

Практическое занятие № 9. Задача о построении потока минимальной стоимости. Критерий оптимальности. Граф модифицированных стоимостей, алгоритм Клейна.

Практическое занятие № 10. Гамильтоновы циклы. Метод ветвей и границ.

Практическое занятие № 11. Задача коммивояжера, алгоритм Литтла для поиска хотя бы одного цикла минимальной длины.

Практическое занятие № 12. Задача коммивояжера, алгоритм Литтла для поиска хотя всех циклов минимальной длины.

Практическое занятие № 13. Календарное планирование. Постановка задачи, основные этапы решения. Построение сетевой модели.

Практическое занятие № 14. Календарное планирование. Ранжирование событий, нахождение критических путей.

Практическое занятие № 15. Календарное планирование. Гант-карта. Оптимизация времени и ресурсов.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса могут быть использованы следующие подходы и методы:

эвристический подход, который предполагает:

- осуществление студентами личностно-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

практико-ориентированный подход, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

методы и приемы развития критического мышления, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим занятиям;
- научно-исследовательские работы;
- подготовка и написание рефератов, докладов, эссе и презентаций на заданные темы;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Графы. Маршруты, цепи, циклы, связные компоненты.
2. Три леммы о неориентированных графах.
3. Эйлеровы графы. Теорема Эйлера.
4. Алгоритм построения эйлера цикла.
5. Деревья и их свойства.
6. Остовные деревья. Алгоритм Прима и его обоснование.
7. Алгоритм Краскала и его обоснование.
8. Ориентированные графы, маршруты, цепи, пути, циклы, контуры.
9. Алгоритм Дейкстры и его обоснование.
10. Алгоритм Флойда и его обоснование.
11. Нахождение контуров отрицательной длины.
12. Сети, потоки, разрезы. Леммы о дивергенции и мощности потока.
13. Элементарные потоки. Разложение циркуляции на элементарные потоки.
14. Разложение потока на элементарные потоки.
15. Допустимые потоки. Лемма о мощности допустимого потока.
16. Увеличивающие цепи и теорема Форда–Фалкерсона.
17. Алгоритм Форда–Фалкерсона.
18. Потоки минимальной стоимости. Действия над потоками в исходной сети и в графе модифицированных стоимостей.
19. Критерий оптимальности допустимого потока.
20. Метод ветвей и границ.
21. Задача коммивояжера. Алгоритм Литтла.
22. Сетевое планирование. Работы, события, алгоритм построения сетевой модели, ранжирование событий.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Функциональный анализ	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 12.05.2022)
Теория функций действительного переменного	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 12.05.2022)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 201_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
