

Белорусский государственный университет

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«02» декабря 2022 г.

Регистрационный № УД – 11371/уч.



Функциональный анализ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

направления специальностей:

1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность)

2022 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021 типового учебного плана по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям) № G 31-1-011/пр-тип. от 31.03.2021, учебного плана № G31-1-018 уч. от 25.05.2021

СОСТАВИТЕЛИ:

Антоневич А.Б., профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета; доктор физико-математических наук, профессор;

Пономарева С.В., доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Ромашенко Г.С., доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Штин С.Л., доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Чесалин В.И., доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Пыжкова Ольга Николаевна, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики
(протокол № 5 от 25.11.2022);

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 2 от 29.11.2022)

Заведующий кафедрой _____



Лебедев А.В.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины «Функциональный анализ»

Цель учебной дисциплины – освоение студентами языка современной математики, владение общими конструкциями и умение их применять в теоретических и прикладных задачах.

Задачи учебной дисциплины:

1. Применение принципа сжимающих отображений к различным задачам.
2. Изучение основных свойств нормированных и гильбертовых пространств.
3. Изучение линейных ограниченных, в частности, интегральных, операторов.
4. Изучение альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений в пространствах $L_2[a, b]$ и $C[a, b]$.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Анализ» компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Данная дисциплина наиболее тесно связана со следующими дисциплинами: «Математический анализ», «Уравнения математической физики», «Экстремальные задачи», «Численные методы».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Функциональный анализ» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции:**

БПК-2. Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия и результаты теории меры и интеграла Лебега;
- основные понятия и результаты теории нормированных пространств и операторов в них;
- методы доказательств и алгоритмы решения задач функционального анализа;

уметь:

- выявлять конструкции функционального анализа в конкретных задачах;
- устанавливать свойства отображений в функциональных пространствах;
- применять результаты функционального анализа для решения теоретических и прикладных задач;

владеть:

- основными методами вычисления интегралов Лебега;
- методами доказательств и аналитического исследования отображений на непрерывность, равномерную непрерывность, выполнение условия Липшица;
- методами исследования разрешимости и нахождения решения операторных уравнений;
- навыками самообразования и способами использования аппарата функционального анализа для проведения теоретических и прикладных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 4 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ» отведено:

- для очной формы получения высшего образования – 102 часа, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Метрические пространства и их отображения

Тема 1.1. Метрические пространства. Определение и основные примеры функциональных метрических пространств. Топология метрических пространств. Полные метрические пространства. Пополнение метрических пространств. Компактные метрические пространства.

Тема 1.2. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения. Определения и свойства. Теорема о продолжении. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.

Раздел 2. Нормированные и гильбертовы пространства

Тема 2.1. Нормированные пространства. Векторные пространства, нормированные пространства. Непрерывность операций сложения и умножения на число. Банаховы пространства. Пополнение нормированных пространств. Критерий конечномерности нормированного пространства.

Тема 2.2. Гильбертовы пространства. Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье.

Раздел 3. Линейные операторы

Тема 3.1. Линейные операторы в нормированных пространствах. Связь ограниченности с непрерывностью для линейных операторов. Норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Различные виды сходимости линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Обратные операторы. Теорема Банаха об обратном операторе. Обратимость оператора, близкого к единичному. Открытость множества обратимых операторов. Теорема Банаха об обратном операторе.

Тема 3.2. Линейные непрерывные функционалы. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала. Общий вид линейных непрерывных функционалов в конкретных пространствах. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства.

Тема 3.3. Компактные операторы. Определения и свойства. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах. Альтернатива Фредгольма для интегральных операторов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Метрические пространства и их отображения							
1.1	Метрические пространства. Определение и основные примеры функциональных метрических пространств. Топология метрических пространств. Полные метрические пространства. Пополнение метрических пространств. Компактные метрические пространства.	4	4					Отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой. Контрольная работа
1.2	Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения. Определения и свойства. Теорема о продолжении. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.	4	4					Отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой. Контрольная работа.
2	Нормированные и гильбертовы пространства							
2.1	Нормированные пространства	4	4					Отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
2.2	Гильбертовы пространства.	4	4				2	Отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их

								устной защитой. Контрольная работа.
3	Линейные операторы							
3.1	Линейные операторы в нормированных пространствах	6	4				2	Отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой. Контрольная работа.
3.2	Линейные непрерывные функционалы	6	4					Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой
3.3	Компактные операторы.	6	6					Отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой. Контрольная работа.
	Всего	34	30				4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Антоневи́ч, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по мат. спец. / А. Б. Антоневи́ч, М. Х. Мазель, Я. В. Радыно. - Минск : БГУ, 2011. – 319 с. – <http://elib.bsu.by/handle/123456789/14907>.
2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - Изд. 7-е. - Москва : Физматлит, 2012. - 570 с.
3. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 272 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — <https://e.lanbook.com/book/210290>.
4. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 560 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — <https://e.lanbook.com/book/189430>.
5. Филимо́ненко́ва, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимо́ненко́ва. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 176 с.— Текст : электронный // Лань : электронно-библио-течная система — URL: — <https://e.lanbook.com/book/212048>.
6. Филимо́ненко́ва, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимо́ненко́ва. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 240 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — <https://e.lanbook.com/book/212057>.
7. Радыно, Я. В. Задачи и упражнения по курсу "Функциональный анализ" : учеб.-метод. пособие для студ. мех.-мат. фак. / Я. В. Радыно, В. И. Чесалин, А. Г. Яблонская ; БГУ, Мех.-мат. фак., Каф. функционального анализа. - Минск : БГУ, 2013. - 40 с. — <http://elib.bsu.by/handle/123456789/57562>.

Перечень дополнительной литературы

1. Антоневи́ч, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учебник для студ. мат. спец. вузов / А. Б. Антоневи́ч, Я. В. Радыно. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - Минск : БГУ, 2006. - 431 с. — <http://elib.bsu.by/handle/123456789/28955>.
2. Бородин, П. А. Задачи по функциональному анализу : учебное пособие / П. А. Бородин, А. М. Савчук, И. А. Шейпак. — Москва : МЦНМО, 2017. — 336 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — <https://e.lanbook.com/book/92693>.

3. Березанский, Ю. М. Функциональный анализ : курс лекций : учеб. пособие для студ. ун-тов, обуч. по спец. "Математика" / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. - Киев : Вища школа, 1990. - 600 с.
4. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов ; [науч. ред. А. В. Бухвалов]. - Изд. 4-е, испр. - Санкт-Петербург : Невский диалект : БХВ-Петербург, 2004. - 814 с.
5. Кириллов, А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика". - Изд. 2-е, перераб. и доп. - Москва : Наука, Главная редакция физико-математической лит., 1988.
6. Антоневиц, А. Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учеб. пособие для студ. мат. спец. вузов. — Минск : Вышэйшая школа, 1978.
7. Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / Треногин В. А. - 3-е изд. , испр. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 488 с.
8. Рид, М. Методы современной математической физики : пер. с англ. Т. 1 : Функциональный анализ. - Москва : Мир, 1977.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Формой текущей аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» учебным планом предусмотрен **экзамен**.

Контроль работы студента проходит в форме контрольной работы в аудитории, а также отчета по аудиторным и домашним практическим упражнениям с их устной защитой. Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- контрольные работы – 50 %;
- отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой – 25%;
- письменные отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой – 25 %;

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов Вес отметки по текущей успеваемости составляет 30 %, экзаменационной отметки – 70 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 2.2. Гильбертовы пространства.

Студент изучает основные понятия, связанные с гильбертовыми пространствами, в частности, определения нормы в предгильбертовом пространстве, теорему о проекции, процесс ортогонализации, понятие ряда Фурье; находит проекцию элемента на замкнутое подпространство гильбертова пространства, а также разложение функций в ряды Фурье.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 3.1. Линейные операторы в нормированных пространствах.

Студент находит область определения оператора, исследует на линейность и ограниченность операторы в нормированных пространствах, находит норму линейного ограниченного оператора.

Форма контроля – контрольная работа.

Примерная тематика практических занятий

Практическая работа № 1. Определение и основные примеры функциональных метрических пространств.

Практическая работа № 2. Топология метрических пространств.

Практическая работа № 3. Полные метрические пространства. Пополнение метрических пространств.

Практическая работа № 4. Компактные метрические пространства.

Практическая работа № 5. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.

Практическая работа № 6. Сходящиеся последовательности в метрических пространствах.

Практическая работа № 7. Нормированные векторные пространства.

Практическая работа № 8. Гильбертовы пространства.

Практическая работа № 9. Линейные непрерывные операторы в банаховых пространствах.

Практическая работа № 10. Линейные непрерывные функционалы.

Практическая работа № 11. Альтернатива Фредгольма.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса могут быть использованы следующие подходы и методы: *эвристический подход, практико-ориентированный подход, методы и приемы развития критического мышления, метод группового обучения*, которые предполагают:

- осуществление студентами значимых открытий;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;
- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

Использование указанных методов обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления, и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим занятиям;
- научно-исследовательские работы;
- подготовка и написание рефератов, докладов и презентаций на заданные темы;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Метрические пространства. Топология метрического пространства.
2. Полные метрические пространства. Принцип вложенных шаров.
3. Пополнение метрического пространства.
4. Пространство $L_1[0,1]$, $L_1[0,1]$ как пополнение пространства $C[0,1]$ с интегральной нормой.
5. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского. Пространства $L_p[0,1]$ их полнота.
6. Принцип сжимающих отображений и его варианты.
7. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям в пространствах $C[a,b]$ и $L_2(T,m)$.
8. Векторные пространства. Понятие топологического векторного пространства. Норма и полунорма. Нормированные пространства.
9. Банаховы пространства. Теорема об абсолютно сходящихся рядах.
10. Скалярное произведение. Гильбертовы пространства.
11. Теорема о проекции.
12. Разложение по ортонормированным системам в гильбертовом пространстве.
13. Линейные ограниченные операторы. Норма оператора. Интегральные операторы в пространствах $C[0,1]$ и $L_2[0,1]$
14. Пространство ограниченных линейных операторов. Теорема о полноте пространства операторов. Различные типы сходимости последовательностей операторов.
15. Теорема Банаха – Штейнгауза.
17. Обратные операторы, связь с разрешимостью уравнений $Ax = y$. Теоремы о существовании обратных.
18. Теорема Банаха об обратном операторе и ее следствия.
19. Линейные ограниченные функционалы и сопряженное пространство. Теорема Рисса об общем виде функционала на гильбертовом пространстве.
20. Теорема Хана – Банаха о продолжении ограниченного линейного функционала.
21. Сопряженный оператор к оператору в банаховых пространствах. Теорема об условиях разрешимости уравнения $Ax = y$.
22. Альтернатива Фредгольма.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Основы математической электроники	Кафедра математической кибернетики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 5 от 25.11.2022)
2. Теория вероятностей и математическая статистика	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 5 от 25.11.2022)
3. Теория функций действительного переменного	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 5 от 25.11.2022)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
