

# Белорусский государственный университет

Белорусский государственный университет

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«01» декабря 2022 г.

Регистрационный № УД – 11390/уч.

## *Теория функций действительного переменного*

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

направления специальностей:

1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность)

2022 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021, типового учебного плана 1-31 03 01 Математика (по направлениям) № G 31-1-011 / пр-тип. от 31.03.2021, учебного плана № G31-1-018 уч. от 25.05.2021

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Антоневич А.Б.**, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Лебедев А.В.**, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Пономарева С.В.**, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**Чесалин В.И.**, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**Штин С.Л.**, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**Пыжкова Ольга Николаевна**, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики

(протокол № 5 от 25.11.2022);

Научно-методическим Советом БГУ

(протокол № 2 от 29.11.2022)

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_



Лебедев А.В.

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### **Цели и задачи учебной дисциплины «Теория функций действительного переменного»**

**Цель** учебной дисциплины – освоение студентами языка современной математики, владение общими конструкциями и умение их применять в теоретических и прикладных задачах.

#### **Задачи учебной дисциплины:**

1. Формирование у студентов понятия меры и интеграла Лебега.
2. Изучение непрерывных, равномерно непрерывных отображений и отображений, удовлетворяющих условию Липшица, в функциональных пространствах.
3. Изучение основных свойств нормированных и гильбертовых пространств.
4. Изучение линейных ограниченных, в частности, интегральных, операторов.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к «Дополнительным видам обучения» компонента учреждения высшего образования

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Данная дисциплина наиболее тесно связана со следующими дисциплинами: «Математический анализ», «Уравнения математической физики», «Функциональный анализ», «Численные методы».

#### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Теория функций действительного переменного» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции:**

БПК-2 Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира (указать код и наименование компетенции в соответствии с планом)

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

**знать:**

– основные понятия и результаты теории меры и интеграла Лебега;

– основные понятия и результаты теории нормированных пространств и операторов в них;

– методы доказательств и алгоритмы решения задач функционального анализа;

**уметь:**

– выявлять конструкции функционального анализа в конкретных задачах;

– устанавливать свойства отображений в функциональных пространствах;

– применять результаты функционального анализа для решения теоретических и прикладных задач;

**владеть:**

– основными методами вычисления интегралов Лебега;

– методами доказательств и аналитического исследования отображений на непрерывность, равномерную непрерывность, выполнение условия Липшица;

– методами исследования разрешимости и нахождения решения операторных уравнений;

– навыками самообразования и способами использования аппарата функционального анализа для проведения теоретических и прикладных исследований.

### **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 4 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Теория функций действительного переменного» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Форма текущей аттестации – зачет.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### Раздел 1. Теория меры

**Тема 1.1.** Системы множеств. Кольца множеств, полукольца, алгебры, сигма-кольца и сигма-алгебры, борелевские множества. Общее понятие меры. Сигма-аддитивная мера.

**Тема 1.2**Продолжение меры по Лебегу. Внешняя мера, измеримые множества, множества меры нуль, основная теорема теории меры. Мера Лебега на прямой. Мера Лебега-Стилтьеса.

### Раздел 2. Интеграл Лебега

**Тема 2.1.** Измеримые функции, простые функции, интеграл от простой функции, интеграл Лебега от измеримой функции и его простейшие свойства.

**Тема 2.2.** Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Произведение мер, теорема Фубини.

**Тема 2.3.** Пространства Лебега интегрируемых функций.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>1</b>	<b>Теория меры</b>							
1.1	Системы множеств. Кольца множеств, полукольца, алгебры, сигма-кольца и сигма-алгебры, борелевские множества. Общее понятие меры. Сигма-аддитивная мера.	12	10					Отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
1.2	Продолжение меры по Лебегу. Внешняя мера, измеримые множества, множества меры нуль, основная теорема теории меры. Мера Лебега на прямой. Мера Лебега-Стилтьеса.	12	10					Отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
<b>2</b>	<b>Интеграл Лебега</b>							
2.1	Измеримые функции, простые функции, интеграл от простой функции, интеграл Лебега от измеримой функции и его простейшие свойства.	4	4				2	Отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой. Контрольная работа
2.2	Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Произведение мер, теорема Фубини.	4	4					Отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой. Коллоквиум
2.3	Пространства Лебега интегрируемых функций.	2	2				2	Контрольная работа.
	<b>Всего</b>	<b>34</b>	<b>30</b>				<b>4</b>	



## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Антоневи́ч, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по мат. спец. / А. Б. Антоневи́ч, М. Х. Мазель, Я. В. Радыно. - Минск : БГУ, 2011. – 319 с. – <http://elib.bsu.by/handle/123456789/14907>.
2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - Изд. 7-е. - Москва : Физматлит, 2012. - 570 с.
3. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 272 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — <https://e.lanbook.com/book/210290>.
4. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 560 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — <https://e.lanbook.com/book/189430>.
5. Филимо́ненко́ва, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимо́ненко́ва. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 176 с.— Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система — URL: — <https://e.lanbook.com/book/212048>.
6. Филимо́ненко́ва, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимо́ненко́ва. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 240 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — <https://e.lanbook.com/book/212057>.
7. Радыно, Я. В. Задачи и упражнения по курсу "Функциональный анализ" : учеб.-метод. пособие для студ. мех.-мат. фак. / Я. В. Радыно, В. И. Чесалин, А. Г. Яблонская ; БГУ, Мех.-мат. фак., Каф. функционального анализа. - Минск : БГУ, 2013. - 40 с. — <http://elib.bsu.by/handle/123456789/57562>.

### Перечень дополнительной литературы

1. Антоневи́ч, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учебник для студ. мат. спец. вузов / А. Б. Антоневи́ч, Я. В. Радыно. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - Минск : БГУ, 2006. - 431 с. — <http://elib.bsu.by/handle/123456789/28955>.
2. Бородин, П. А. Задачи по функциональному анализу : учебное пособие / П. А. Бородин, А. М. Савчук, И. А. Шейпак. — Москва : МЦНМО, 2017. — 336 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — <https://e.lanbook.com/book/92693>.



3. Березанский, Ю. М. Функциональный анализ : курс лекций : учеб. пособие для студ. ун-тов, обуч. по спец. "Математика" / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. - Киев : Вища школа, 1990. - 600 с.
4. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов ; [науч. ред. А. В. Бухвалов]. - Изд. 4-е, испр. - Санкт-Петербург : Невский диалект : БХВ-Петербург, 2004. - 814 с.
5. Кириллов, А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика". - Изд. 2-е, перераб. и доп. - Москва : Наука, Главная редакция физико-математической лит., 1988.
6. Антоневиц, А. Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учеб. пособие для студ. мат. спец. вузов. — Минск : Вышэйшая школа, 1978.
7. Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / Треногин В. А. - 3-е изд. , испр. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 488 с.
8. Рид, М. Методы современной математической физики : пер. с англ. Т. 1 : Функциональный анализ. - Москва : Мир, 1977.

#### **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Формой текущей аттестации по дисциплине «Теория функций действительного переменного» учебным планом предусмотрен **зачет**.

Контроль работы студента проходит в форме отчета по аудиторным и домашним практическим упражнениям с их устной защитой, коллоквиума, контрольной работы. Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Зачет по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

#### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

**Тема 2.1.** *Измеримые функции, простые функции, интеграл от простой функции, интеграл Лебега от измеримой функции и его простейшие свойства.*

**Студент применяет понятия измеримой и простой функции, основные свойства интеграла Лебега для решения задач о поиске интеграла Лебега от измеримой функции.**

***Форма контроля – контрольная работа***

**Тема 2.3.** *Пространства Лебега интегрируемых функций.*

Студент изучает основные понятия, связанные с пространством Лебега интегрируемых функций, в частности, понятие интегрируемой функции и свойства заданного пространства.

***Форма контроля – контрольная работа.***

## Примерная тематика практических занятий

Практическая работа № 1. Системы подмножеств.

Практическая работа № 2. Кольца множеств, полукольца, алгебры, борелевские множества.

Практическая работа № 3. Общее понятие меры. Сигма-аддитивная мера

Практическая работа № 4. Продолжение меры по Лебегу, внешняя мера и множество меры нуль.

Практическая работа № 5. Измеримые множества, основная теорема теории меры.

Практическая работа № 6. Мера Лебега в  $\mathbb{R}$ .

Практическая работа № 7. Мера Лебега-Стилтьеса.

Практическая работа № 8. Измеримые функции, простые функции. Интеграл от простой функции.

Практическая работа № 9. Интеграл Лебега от измеримой функции и его простейшие свойства.

Практическая работа № 10. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

Практическая работа № 11. Произведение мер.

Практическая работа № 12. Теорема Фубини.

Практическая работа № 13. Пространство Лебега интегрируемых функций.

## Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса могут быть использованы следующие подходы и методы: *эвристический подход, практико-ориентированный подход, методы и приемы развития критического мышления, метод группового обучения*, которые предполагают:

- осуществление студентами значимых открытий;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлекссию собственной образовательной деятельности;
- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

Использование указанных методов обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций)

при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления, и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим и семинарским занятиям;
- научно-исследовательские работы;
- подготовка и написание рефератов, докладов и презентаций на заданные темы;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

### **Примерный перечень вопросов к зачету**

1. Множества, операции над множествами, система всех подмножеств  $P(X)$ .
2. Системы подмножеств: кольца, полукольца, алгебры,  $\sigma$ -алгебры. Борелевская алгебра.
3. Необходимость пересмотра понятия интеграла.
4. Общее понятие меры. Свойства: монотонность,  $\sigma$ -аддитивность, непрерывность, субаддитивность, полнота меры.
5.  $\sigma$ -аддитивность длины, как меры на системе полуинтервалов.
6. Конструкция продолжения меры по Лебегу: внешняя мера, измеримые множества, субаддитивность, критерий измеримости.
7. Основная теорема о продолжении меры по Лебегу.
8.  $\sigma$ -конечные меры и их продолжение по Лебегу.
9. Мера Лебега на отрезке и на прямой: конструкция, множества меры нуль, множество Кантора, неизмеримые множества, сравнение измеримых множеств с борелевскими.
10. Меры Лебега-Стилтьеса: конструкция, мера одноточечного множества, множества меры нуль.

11. Простые функции. Измеримые функции. Приближение измеримых функций простыми.
12. Интеграл Лебега от простой функции. Интегрируемые по Лебегу функции, интегральные суммы Лебега, сравнение с интегральными суммами Римана.
13. Элементарные свойства интеграла Лебега.
14. Вопрос о возможности предельного перехода под знаком интеграла.
15. Теорема Лебега о мажорированной сходимости.
16. Теорема Б.Леви.
17. Теорема Фату.
18. Теорема Радона - Никодима. Формула Ньютона-Лейбница.
19. Произведение мер. Теорема Фубини.
20. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Критерий интегрируемости по Риману.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Теория вероятностей и математическая статистика	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 5 от 25.11.2022)
2. Функциональный анализ	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 5 от 25.11.2022)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО  
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_