УДК 519.87

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ ПРИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ СВОЙСТВАХ ПАРЕТОВСКИХ СЛОЕВ

***С. В. ЧЕБАКОВ*[1]*, Л. В. СЕРЕБРЯНАЯ*[2), 3)]**

[1)]*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,*
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь
[2)]*БИП – университет права и социально-информационных технологий,*
ул. Короля, 3, 220004, г. Минск, Беларусь
[3)]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,*
ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Беларусь

Разработан алгоритм решения задачи о ранце на основе предложенной многокритериальной модели. Представлена структура допустимых подмножеств при глубине недоминирования паретовского слоя, равной нулю, и сумме значений ресурса элементов этого слоя, большей величины объема ранца либо равной ей. На основе данной структуры определен вид оптимального допустимого подмножества с максимальным суммарным значением веса его элементов. Показано, что на определенном этапе предложенный алгоритм включает в себя решение подзадач о ранце с объемами ранцев, меньшими, чем объемы ранца в первоначальной задаче с множеством начальных данных. Введено определение избыточности множества начальных данных, а также условие существования избыточности при заданном значении глубины недоминирования паретовского слоя.

Ключевые слова: задача о ранце; многокритериальная оптимизация; множество Парето; паретовский слой.

Образец цитирования:
Чебаков СВ, Серебряная ЛВ. Алгоритм решения задачи о ранце при определенных свойствах паретовских слоев. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:54–66.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-54-66

For citation:
Chebakov SV, Serebryanaya LV. Algorithm for solving the knapsack problem with certain properties of Pareto layers. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;3:54–66. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-54-66

Авторы:
Сергей Викторович Чебаков – кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник отдела технологий цифровой трансформации.
Лия Валентиновна Серебряная – кандидат технических наук, доцент; заведующий кафедрой информационных технологий и математики экономико-правового факультета[2)], доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий факультета компьютерных систем и сетей[3)].

Authors:
Sergey V. Chebakov, PhD (physics and mathematics); senior researcher at the department of computing networks.
info@chebakov.com
Liya V. Serebryanaya, PhD (engineering), docent; head of the department of information technology and mathematics, faculty of economics and law[b], and associate professor at the department of software for information technologies, faculty of computer systems and networks[c].
l_silver@mail.ru

ALGORITHM FOR SOLVING THE KNAPSACK PROBLEM WITH CERTAIN PROPERTIES OF PARETO LAYERS

S. V. CHEBAKOV[a], *L. V. SEREBRYANAYA*[b, c]

[a]*United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus, 6 Surhanava Street, Minsk 220012, Belarus*
[b]*BIP – University of Law and Social-Information Technologies, 3 Karalia Street, Minsk 220004, Belarus*
[c]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 6 P. Broŭki Street, Minsk 220013, Belarus*
Corresponding author: L. V. Serebryanaya (l_silver@mail.ru)

An algorithm for solving the knapsack problem based on the proposed multicriteria model has been developed. The structure of admissible subsets is presented for the value of the non-dominance depth of the Pareto layer equal to zero. The sum of the resource of the elements of this layer is greater than or equal to the value of the volume of the knapsack. Based on the structure, the form of the optimal admissible subset with the maximum total value of the weight of its elements is determined. It is shown that at a certain stage the developed algorithm includes the solution of a number of knapsack subtasks. Their knapsack volumes are smaller than in the original problem with input data sets. The definition of the redundancy of the set of initial data and the condition for the existence of redundancy for a given value of the depth of non-dominance of the Pareto layer are introduced.

Keywords: knapsack problem; multicriteria optimisation; Pareto set; Pareto layer.

Введение

В данной работе рассмотрена задача о ранце с множеством объектов N и заданным объемом T. Любому элементу n_i из множества начальных данных соответствуют две характеристики – величина используемого ресурса t_i и вес w_i. Допустимым будет такое подмножество элементов из N, чья суммарная величина ресурса не превосходит объем ранца T, но при добавлении в подмножество любого элемента из N становится больше T. Среди всех допустимых подмножеств требуется найти оптимальное подмножество Q с максимальным суммарным значением веса элементов w_i. Пусть число элементов в множестве N равно r. Тогда формальное описание задачи о ранце можно представить следующим образом:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} w_i x_i \to \max, \ \sum_{i=1}^{r} t_i x_i \le T, \ x_i \in \{0, 1\},$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_r), \ w_i > 0, \ 0 < t_i \le T, \ i = 1, \ldots, r.$$

Методы решения указанной оптимизационной задачи представлены в работах [1; 2]. Предложенные в них способы основаны на различных алгоритмах перебора элементов множества начальных данных.

В статьях [3–5] авторы рассмотрели различные аспекты создания двухкритериальной модели решения задачи о ранце. Основная идея этих работ – гипотеза о возможности разработки алгоритмов, реализующих упорядочивание элементов начального множества N по приоритету их вхождения в оптимальное подмножество. В этом случае ставится задача определить условия избыточности множества начальных данных, т. е. существование в нем элементов, которые при заданном значении объема ранца не могут быть включены в оптимальное подмножество. Множество начальных данных N может содержать достаточно большое число элементов, но при их упорядочивании по указанному приоритету возможна следующая ситуация. Начиная с некоторой группы, все оставшиеся элементы из множества N могут не рассматриваться при формировании оптимального подмножества. Построение модели задачи о ранце выполнялось на основе двух характеристик каждого элемента из множества начальных данных N – ресурса и веса. Эти характеристики можно считать значениями критериев в двухкритериальном пространстве предпочтений. Введение отношения доминируемости в работе [3] между элементами множества N позволило в последующих исследованиях [4; 5] определить структуру оптимального подмножества. В настоящей работе предложен алгоритм нахождения набора допустимых подмножеств при глубине недоминирования заданного паретовского слоя, равной нулю, а также представлен вид оптимального подмножества.

Построение допустимого подмножества при глубине недоминирования слоя *S*, равной нулю

В работе [3] между любыми двумя элементами $n_1 = (t_1, w_1)$ и $n_2 = (t_2, w_2)$ из множества N введено транзитивное отношение доминирования, сформулированное следующим образом.

Определение 1. Элемент n_1 доминирует элемент n_2 тогда и только тогда, когда $t_1 \le t_2$, $w_1 \ge w_2$, $(t_1, w_1) \ne (t_2, w_2)$.

Определение 2. Паретовский слой с номером m, $m > 1$ (обозначим его через P_m), представляет собой совокупность недоминируемых элементов на множестве $N^{m-1} = N \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} P_i$, где P_i – паретовский слой с номером i. Множество Парето, определенное на всем множестве N, является первым паретовским слоем P_1.

Таким образом, для каждого элемента, входящего во второй и последующие паретовские слои, существует хотя бы один элемент из предыдущего слоя, который его доминирует.

В работе [5] представлена структура оптимального подмножества в задаче о ранце, имеющая следующий вид:

$$Q = \bigcup_{j=1}^{g} P_j \cup Q_{j+1}, \tag{1}$$

где P_j – набор первых паретовских слоев, на которые разбивается множество начальных данных N в двухкритериальном пространстве. Число паретовских слоев в (1) зависит от величины ранца T и отношения доминируемости между элементами соседних паретовских слоев. Следующий $g + 1$ паретовский слой не может быть включен в оптимальное подмножество, поскольку сумма ресурса элементов заданной группы паретовских слоев, начиная со слоя P_{g+1}, больше либо равна

$$T_{\text{ост}} = T - \sum_{(t_k, w_k) \in \bigcup_{j=1}^{g} P_j} t_k.$$

Координатами каждого элемента n_i в пространстве предпочтений являются ресурс t_i и вес w_i, P_1 – множество Парето на множестве начальных данных N. Множество Q_{g+1} представляет собой решение задачи о ранце Z_{g+1} с множеством начальных данных N_s, которое включает в себя элементы всех паретовских слоев, начиная со слоя S, имеющего номер $g + 1$. Паретовский слой S представляет собой множество Парето на множестве N_s. Объем ранца в задаче Z_{g+1} равен величине $T_{\text{ост}}$.

Далее будем использовать введенное в работе [5] понятие величины глубины недоминирования паретовского слоя S, показывающее число f последующих паретовских слоев $S + 1, \ldots, S + f$, которые содержат элементы, находящиеся в паретовском отношении хотя бы с одним элементом слоя S. Если эта величина равна 0, то во всех последующих слоях не существует элементов, находящихся в паретовском отношении с элементами слоя S.

Величину F определим как сумму координаты t_i всех элементов паретовских слоев $S, S + 1, \ldots, S + f$. Далее будем считать, что значение $F \ge T_{\text{ост}}$ при любом значении глубины недоминирования слоя S [5]. В данной работе представлен алгоритм нахождения оптимального подмножества Q_{g+1} в задаче о ранце Z_{g+1} в частном случае, когда глубина недоминирования слоя S равна 0. В соответствии с (1) это позволяет определить решение первоначальной задачи о ранце с множеством объектов N и заданным объемом ранца T. При глубине недоминирования слоя S, равной нулю, величина F представляет собой сумму ресурса t элементов только слоя S, и эта сумма больше либо равна $T_{\text{ост}}$.

В работе [4] показано, что существует набор допустимых подмножеств (обозначим его через W), включающий в себя оптимальное подмножество задачи Z_{g+1} и удовлетворяющий следующему требованию. При построении любого подмножества H_j из W, $j = 1, 2, \ldots, h$, где h – число допустимых подмножеств в W, должно выполняться следующее условие. На каждом очередном k-м шаге построения всех подмножеств H_j выбор его очередного элемента должен осуществляться произвольным образом из соответствующего множества $X_{j,k}$, которое представляет собой множество Парето на наборе начальных данных $N_s'' = N_s \setminus Y$, где Y – набор уже включенных в H_j элементов из N_s. Следовательно, при выборе первого элемента любого H_j из W множеством $X_{j,1}$ является слой S, представляющий собой множество Парето на множестве начальных данных N_s. Тогда первый элемент каждого из допустимого подмножества H_j должен принадлежать только слою S. В данной работе представлен алгоритм построения множества всех допустимых подмножеств, первым элементом которых является каждый элемент слоя S. Тогда $W = \bigcup_{i=1}^{s} A_i$, где s – число элементов в слое S, а A_i – множество допустимых подмножеств, первым элементом которых является определенный i-й элемент слоя S. Предложен способ нахождения оптимального подмножества Q_{g+1} в задаче о ранце Z_{g+1}, которое принадлежит W.

Из элементов слоя S формируется последовательность G путем их упорядочивания по неубыванию ресурса t_i. Каждый его элемент r_i имеет номер i, изменяющийся от 1 до s. Пусть в допустимых подмножествах первым элементом является r_1 с наименьшим значением ресурса t_i. По предположению сумма ресурсов элементов слоя S больше или равна $T_{\text{ост}}$.

Утверждение 1. Если элемент r_1 последовательности G больше величины $T_{\text{ост}}$, то все элементы больше величины объема ранца $T_{\text{ост}}$, и никакое допустимое подмножество в задачи Z_{i+1} не может быть построено.

Доказательство. Из упорядоченности элементов слоя S по возрастанию ресурса t следует, что все его элементы, начиная со второго, превосходят первый элемент или равны ему, а также превышают величину $T_{\text{ост}}$. Если элемента с ресурсом t, меньшего величины $T_{\text{ост}}$ либо равного ей, в слое S не существует, то ни один элемент слоя S не может войти в допустимое множество. Поскольку глубина недоминирования слоя S равна 0, любой элемент слоя S доминирует все элементы слоя $S + 1$, а также по транзитивности отношения предпочтения и определению паретовских слоев доминирует элементы последующих слоев, на которые разбивается N_s. Тогда элементы слоев, начиная с $S + 1$, имеют большее значение ресурса t, чем величина $T_{\text{ост}}$. Следовательно, ни одно допустимое подмножество в задаче Z_{g+1} не может быть построено. Утверждение доказано.

Таким образом, при выполнении условий утверждения 1 множество Q_{g+1} пусто и оптимальное подмножество Q в задаче о ранце с множеством начальных данных N и объемом ранца T представляет собой в соответствии с (1) объединение паретовских слоев.

Далее сформируем допустимые подмножества, первым элементом которых является r_1. Пусть у элемента r_1 последовательности G значение ресурса $t_1 \le T_{\text{ост}}$. Элемент r_1 включается в формируемое допустимое подмножество $H_{1,1}$, и определяется величина $T_1 = T_{\text{ост}} - t_1$. Первый индекс в обозначении допустимого подмножества указывает на то, что оно относится к группе подмножеств, первым элементом которых является r_1. Второй индекс обозначает порядковый номер подмножеств, формируемых внутри данной группы. Выбор второго элемента подмножества $H_{1,1}$ осуществляется из упорядоченного множества $X_{1,2}^{1}$, которое представляет собой паретовские элементы на множестве начальных данных $N_s \backslash \{r_1\}$. Первый нижний индекс множества $X_{1,2}^{1}$ совпадает со значением второго индекса в обозначении допустимых подмножеств, второй нижний индекс – номер шага, который требуется совершить при формировании конкретного подмножества. Верхний индекс совпадает с первым индексом. По условию глубина недоминирования слоя S равна 0 и каждый элемент слоя S доминирует любой элемент из последующих паретовских слоев. Тогда $X_{1,2}^{1}$ включает в себя все элементы слоя S, кроме r_1, и является упорядоченным по неубыванию ресурса t входящих в него элементов. Если ресурс второго элемента r_2 последовательности G имеет значение, меньшее либо равное T_1, то он включается в $H_{1,1}$, после чего определяется новое значение T_2. На данном шаге множества $X_{1,3}^{1}$ представляют собой все элементы последовательности G, начиная с третьего элемента r_3. Выбирается следующий элемент r_3, и если его ресурс меньше либо равен T_2, то элемент включается в формируемое подмножество.

Утверждение 2. При последовательном включении элементов G в формируемое подмножество $H_{1,1}$ в слое S существует элемент r_i, ресурс которого на i-м шаге будет больше значения соответствующей величины T_{i-1} либо равен ему. Тогда никакие элементы последующих слоев не могут быть включены в $H_{1,1}$ и $H_{1,1} = \{r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}\}$ представляет собой допустимое подмножество в задаче Z_{g+1}.

Доказательство. По условию сумма всех элементов слоя S по критерию ресурса t не меньше $T_{\text{ост}}$. При последовательном включении элементов G в подмножество $H_{1,1}$ такой элемент r_i обязательно существует. Требуется показать, что все остальные элементы множества N_s не могут дополнить подмножество $H_{1,1}$. Пусть элемент $r_i \ge T_{i-1}$. Если $r_i = T_{i-1}$, то r_i включается в $H_{1,1}$, объем ранца полностью исчерпан и построение $H_{1,1}$ закончено. Пусть $r_i > T_{i-1}$. По условию глубина доминирования слоя S равна 0. Тогда каждый элемент слоя S доминирует как элементы слоя $S + 1$, так и элементы всех последующих паретовских слоев. Вследствие упорядоченности оставшиеся элементы последовательности G, если такие существуют, а также элементы всех последующих слоев имеют большее значение ресурса t, чем величина T_{i-1}. Тогда ни один из них не может быть включен в $H_{1,1}$, и его построение закончено. Утверждение доказано.

Пусть r_s – последний элемент последовательности G. Предположим, что значение ресурса t_s элемента r_s является равным величине T_{i-1}. Следовательно, формирование подмножества $H_{1,1}$ заканчивается добавлением элемента r_s. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Допустимое подмножество $H_{1,1}$, включающее в себя все элементы слоя S, является решением задачи о ранце Z_{g+1}.

Доказательство. Элемент r_s является последним добавленным элементом подмножества $H_{1,1}$. Объем ранца $T_{\text{ост}}$ после включения r_s в $H_{1,1}$ оказался полностью исчерпанным, и никакой элемент последующих слоев не может войти в это подмножество. Тогда $H_{1,1}$ содержит все элементы слоя S и является единственным подмножеством, которое включает в себя элементы только этого слоя. Формирование допустимого подмножества из элементов слоя $S+1$ не является необходимым, так как оптимальное подмножество Q_{g+1} принадлежит набору подмножеств W и его формирование должно начинаться с элемента слоя S. Формирование новых допустимых подмножеств путем замены некоторого элемента в $H_{1,1}$ на элемент r_k из последующих паретовских слоев возможно, если ресурс t элемента r_k не превосходит ресурс заменяемого элемента подмножества $H_{1,1}$. Поскольку глубина недоминирования слоя S равна 0, по определению 1 такой элемент r_v может существовать в паретовских слоях с номерами, большими, чем S. Однако в этом случае вес w_k элемента r_k имеет строго меньшее значение, чем значение заменяемого элемента. Следовательно, любая подобная замена приводит к построению подмножества с суммарным весом, меньшим, чем вес подмножества $H_{1,1}$. Тогда $H_{1,1}$ представляет собой допустимое подмножество с максимальным суммарным значением веса. Утверждение доказано.

Далее будем предполагать, что допустимое подмножество $H_{1,1}$ не совпадает с паретовским слоем S. Это означает, что существуют элементы в слое S, которые не могут войти в подмножество $H_{1,1}$. Тогда получаем, что величина $F > T_{\text{ост}}$.

Утверждение 4. Пусть глубина недоминирования слоя S равна 0 и $F > T_{\text{ост}}$. Тогда все допустимые подмножества из W и, следовательно, любое оптимальное решение задачи Z_{g+1} содержат только элементы слоя S.

Доказательство. На каждом шаге построения любого допустимого подмножества $H_{i,j}$ из набора W, который включает в себя оптимальное решение задачи Z_{g+1}, выбор очередного элемента осуществляется только из паретовских множеств $X_{j,k}^{i}$, где k – номер шага [5]. Каждое множество $X_{j,k}^{i}$ представляет собой множество Парето на наборе начальных данных $N_s'' = N_s \setminus Y$, где Y – набор уже включенных в формируемое подмножество элементов из N_s. Первым множеством $X_{1,1}$ (верхний индекс появляется на следующем шаге, когда из $X_{1,1}$ выбран первый элемент $H_{i,j}$) для всех допустимых подмножеств из W является слой S. По условию глубина недоминирования слоя S равна 0 и, следовательно, каждый элемент слоя S доминирует любой элемент из последующих паретовских слоев, на которые разбивается множество начальных данных N_s. Таким образом, появление на каком-либо шаге в паретовских множествах $X_{j,k}^{i}$ элементов, отличных от элементов слоя S, возможно в случае, когда все элементы этого слоя уже включены в формируемое допустимое подмножество. Согласно условию сумма ресурса t у элементов слоя S больше, чем величина $T_{\text{ост}}$. Тогда невозможно сформировать допустимое подмножество, которое включало бы в себя все элементы слоя S. Следовательно, элементы всех паретовских множеств $X_{j,k}^{i}$, которые требуются при формировании допустимых подмножеств из W, принадлежат слою S. Утверждение доказано.

Построение группы допустимых подмножеств на основе порождающего подмножества $H_{1,1}$

При формировании подмножества $H_{1,1}$ элементы паретовских множеств $X_{1,k}^{1}$ упорядочены по возрастанию ресурса t. Каждому $X_{1,k}^{1}$ на k-м шаге формирования допустимого подмножества $H_{1,1}$ соответствует величина $T_{k-1} = T_{\text{ост}} - \sum\limits_{p=1}^{k-1} t_p$, где t_p – ресурс элементов, уже включенных в $H_{1,1}$. Допустимое подмножество назовем порождающим, если на его основе могут быть построены новые допустимые подмножества, каждое из которых содержит некоторую группу его элементов. Будем формировать допустимые подмножества, включающие в себя наборы элементов из $H_{1,1}$. Построение допустимого подмножества $H_{1,1}$ представляло собой на каждом шаге в $X_{1,k}^{1}$ выбор лишь элемента с минимальным номером в множестве $X_{1,k}^{1}$. Далее предложен алгоритм построения допустимых подмножеств $H_{1,j}$, первым элементом которых является элемент r_1 из G, и представлена их структура. В соответствии с утверждением 4 все остальные элементы принадлежат слою S. Основой для реализации алгоритма является группа элементов соответствующих множеств $X_{1,k}^{1}$, элементы которых принадлежат слою S.

В случае когда число элементов в $H_{1,1}$ больше 1, рассмотрим паретовское множество $X_{1,d}^{1}$, которое формируется после включения в допустимое подмножество $H_{1,1}$ его предпоследнего элемента r_{d-1}. Исходя из определения $X_{1,d}^{1}$ и того факта, что глубина недоминируемости слоя S равна 0, $X_{1,d}^{1}$ включает в себя все элементы последовательности G после r_{d-1}. Множеству $X_{1,d}^{1}$ соответствует величина

$T_{d-1} = T_{\text{ост}} - \sum_{k=1}^{d-1} t_k$. Пусть в $X^1_{1,d}$ существует группа $V^1_{1,d}$ элементов $r_d, r_{d+1}, \ldots, r_{d+g}$, обладающих следующим свойством. Величина T_{d-1} меньше ресурса t любого элемента из этой группы или равна ему, а элемент r_{d+g+1} превосходит эту величину, либо элемент r_{d+g} является последним элементом G. Все остальные элементы множества $X^1_{1,d}$ с бóльшими номерами, если такие существуют, вследствие их упорядоченности по возрастанию ресурса t также превосходят величину T_{d-1}. Первый элемент r_d из $X^1_{1,d}$ включен в подмножество $H_{1,1}$. Ресурс этого элемента еще не превосходит величину T_{d-1}, а ресурс всех последующих элементов G уже превосходит величину T_d.

Далее рассматриваются все остальные элементы группы $V^1_{1,d}$ из $X^1_{1,d}$ после r_d. Каждый такой элемент формирует новое допустимое подмножество путем замены собой последнего элемента r_d из $H_{1,1}$ и включения в новое подмножество всех остальных элементов из $H_{1,1}$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. После замены каждым элементом из $V^1_{1,d}$, начиная с r_{d+1}, последнего элемента r_d из $H_{1,1}$ в множестве N_s не существует элемента, которым можно дополнить любое из формируемых допустимых подмножеств, и их построение закончено.

Доказательство. В каждом новом допустимом подмножестве последний элемент r_d подмножества $H_{1,1}$ заменяется на элементы множества $X^1_{1,d}$ с номерами, начиная с r_{d+1}. Тогда полученные после замены значения величин r_d станут меньше значения T_d, полученного после формирования $H_{1,1}$, либо равны ему. Из способа построения подмножества $H_{1,1}$ следует, что ресурс элемента r_{d+1} превосходит величину T_d. На следующем шаге формирования каждого из новых подмножеств соответствующие паретовские множества $X^1_{1,d+1}$ содержат элемент r_d и элементы со значением ресурса, который превосходит ресурс элемента r_{d+1} либо равен ему. Все эти элементы будут превосходить и величины T_d. Поскольку глубина недоминируемости слоя S равна 0, любой из элементов последующих паретовских слоев имеет значение ресурса, не меньшее, чем значение ресурса элементов из множества $X^1_{1,d+1}$. Следовательно, ни один из элементов из $X^1_{1,d+1}$ и всех последующих паретовских слоев не может войти ни в одно из вновь сформированных подмножеств, и их построение закончено. Утверждение доказано.

Таким образом, все допустимые подмножества, которые включают в себя первые элементы $r_1, \ldots, r_{d-1}$ из $H_{1,1}$, построены.

Предположим, что $d_{1,1}$ больше 2. Рассмотрим элемент r_{d-2} подмножества $H_{1,1}$ с номером, меньшим на единицу. В результате включения элемента r_{d-2} в $H_{1,1}$ паретовское множество $X^1_{1,d-1}$ содержит все элементы последовательности G после r_{d-2}. Этому множеству соответствует величина $T_{d-2} = T_{\text{ост}} - \sum_{k=1}^{d-2} t_k$, $k = 1, \ldots, d-2$. Как и ранее, предположим, что в $X^1_{1,d-1}$ существует набор элементов $V^1_{1,d-1}$ с номерами, бóльшими, чем номер элемента r_{d-2}. Это $r_{d-1}, r_d, r_{d+1}, \ldots, r_{d+g}$, обладающие следующим свойством. Величина T_{d-2} меньше значения ресурса t любого элемента из этого набора или равна ему, а элемент r_{d+g+1} превосходит эту величину, или элемент r_{d+g} является последним элементом последовательности G. Построение каждого из новых допустимых подмножеств, включающих в себя первые $d-2$ элемента из $H_{1,1}$, состоит в следующем. На множестве элементов $V^1_{1,d-1}$ требуется найти все его подмножества, суммарное значение ресурса t элементов которого не должно превышать величину T_{d-2}.

Процесс построения допустимых подмножеств можно представить следующим образом. Определим величину $E = T_{d-2}$. Пусть на множестве $V^1_{1,d-1}$ сформированы отдельные группы элементов, чье суммарное значение ресурса t элементов, входящих в любую из групп, не превышает величину T_{d-2}. Каждое из полученных подмножеств можно представить как допустимое подмножество в подзадаче о ранце L^1 с объемом, равным E. Множество начальных данных этой подзадачи включает в себя все элементы группы $V^1_{1,d-1}$, которая одновременно является и первым множеством паретовских элементов $X^L_{1,1}$ для всех допустимых подмножеств подзадачи L^1. Элементы из $V^1_{1,d-1}$ рассматриваются в порядке возрастания их номеров в последовательности G. Каждый отдельный элемент из $V^1_{1,d-1}$ может являться первым элементом нового порождающего допустимого подмножества в подзадаче о ранце L^1.

Для формирования допустимых подмножеств в подзадаче о ранце L^1 с объемом ранца E выполняются следующие действия. Формируются все допустимые подмножества. Первыми элементами в каждом из них становится очередной элемент из множества Парето на множестве N_E, которое совпадает с множеством $V^1_{1,d-1}$. На основе данных подмножеств формируются новые допустимые подмножества в подзадаче о ранце. Если число элементов в каждом из них больше либо равно 2, то рассматривается предпоследний элемент подмножества и далее все последующие элементы с номером, меньшим на единицу. При этом новые допустимые подмножества данной подзадачи формируются либо заменой последнего элемента построенного подмножества, либо построением допустимых подмножеств подзадач второго уровня (L^2). Каждое допустимое подмножество подзадачи формирует новое подмножество в задаче Z_{g+1} путем включения его элементов после первых $d-2$ элементов подмножества $H_{1,1}$.

Процесс формирования допустимых подмножеств в задаче Z_{g+1} продолжается следующим образом. Выполняется переход к каждому следующему элементу r_{d-m} с меньшим номером из $H_{1,1}$, $m = 3, \ldots, d-1$, до тех пор, пока не будет достигнут первый элемент r_1 подмножества $H_{1,1}$. Соответствующие этим элементам множества $X^1_{1,\, d-(m-1)}$ представляют собой все элементы последовательности G после r_{d-m} и $T_{d-m} = T_{\text{ост}} - \sum_{k=1}^{d-m} t_k$. На каждом шаге определяется группа элементов $V^1_{1,\, d-(m-1)}$, соответствующая значению T_{d-m}. Кроме того, выполняются все операции, требуемые для формирования новых допустимых подмножеств в подзадачах о ранце на заданных множествах начальных данных $V^1_{1,\, d-(m-1)}$ с объемом ранца T_{d-m}.

Построение всех допустимых подмножеств из множества W

Таким образом, сформированы допустимые подмножества, у которых первыми двумя элементами являются r_1 и r_2. Однако требуется построить все подмножества, у которых первым является элемент r_1. Соответствующее паретовское множество включает в себя все элементы из N_s, за исключением r_1. По утверждению 4 достаточно включить в это паретовское множество элементы последовательности G, начиная с r_2. Необходимо последовательно рассмотреть в качестве второго элемента новых допустимых порождающих подмножеств все его элементы. Данному множеству соответствует величина $T_1 = T_{\text{ост}} - t_1$, где t_1 – ресурс элемента r_1. Определяется группа элементов U_1 последовательности, начиная с r_2, каждый элемент которой не превосходит T_1. Формируется группа порождающих допустимых подмножеств $H_{1,j}$ задаче Z_{g+1}, $j = 2, \ldots, z$, где z – число элементов в U, вторым элементом которых является каждый элемент из U. Элемент r_2 уже был выбран при формировании порождающего подмножества $H_{1,1}$.

При формировании какого-либо порождающего подмножества $H_{1,j}$ может создаться ситуация, когда на некотором k-м шаге очередное паретовское множество $X^1_{j,k}$ содержит элементы с номерами в последовательности G, как бóльшими, так и меньшими, чем номер последнего включенного в $H_{1,j}$ элемента. Это связано с тем, что любое паретовское множество $X^1_{j,k}$, исходя из способа его формирования, на каждом шаге содержит все элементы из G, кроме уже включенных в $H_{1,j}$. Тогда если, например, вторым элементом формируемого подмножества является r_{j+1} с номером, бóльшим двух, то при выборе следующего элемента в паретовское множество $X^1_{j,3}$ войдет и элемент r_2.

Покажем, что элементы с меньшими номерами на следующем шаге можно не рассматривать. При построении допустимых подмножеств $H_{1,j}$, первым элементом которых является r_1, каждый элемент группы U_1 включается в отдельное формируемое порождающее подмножество и рассматривается в порядке возрастания их номеров. Для каждого такого отдельного элемента формируются все возможные допустимые подмножества из элементов, имеющих бóльшие номера. В частности, первым был выбран элемент r_2 и сформировано допустимое подмножество $H_{1,1}$. На его основе определялись подзадачи о ранце и построены все допустимые подмножества в задаче Z_{g+1} из элементов, входящих в соответствующие множества $V^1_{1,\, d-(m-1)}$, вторым элементом которых является r_2. Все элементы, входящие в эти подмножества, имеют номера, бóльшие, чем r_2. Тогда при построении подмножеств, вторым элементом которых является r_3, не требуется рассмотрения элемента r_2, так как все они были построены ранее. Предположим, что на некотором шаге в создаваемое подмножество C включен элемент r_k с номером, меньшим, чем номер последнего добавленного элемента r_p. При этом сумма значений ресурса t у группы элементов подмножества C еще не превысила величину $T_{\text{ост}}$. Ранее, начиная с элемента r_k, были сформированы из элементов с бóльшими номерами все возможные группы элементов, из которых состоят уже имеющиеся допустимые подмножества. К ним относится и группа, входящая в подмножество C. Следовательно, для построения новых допустимых подмножеств $H_{1,j}$ требуется рассматривать на каждом шаге только элементы из множества $X^1_{j,k}$ с номерами, бóльшими, чем номер последнего включенного в $H_{1,j}$ элемента.

Сформулируем утверждение о достаточном условии, при выполнении которого заканчивается формирование допустимого порождающего подмножества $H_{1,j}$.

Утверждение 6. Пусть после включения очередного элемента на некотором k-м шаге в подмножество $H_{1,j}$ получено паретовское множество $X^1_{j,k}$, все элементы которого принадлежат слою S. Соответствующее ему значение величины $T_k = T_{\text{ост}} - \sum_{p=1}^{k} t_p$, где t_p – значение ресурса t у p-го элемента $H_{1,j}$.

Если ресурс t элемента q с минимальным номером среди рассматриваемых на $(k + 1)$-м шаге элементов паретовского множества $X^1_{j,\,k}$ больше величины T_k, то построение $H_{1,\,j}$ закончено.

Доказательство. По утверждению 4 все элементы допустимого подмножества $H_{1,\,j}$ принадлежат слою S. Из упорядоченности элементов этого слоя по возрастанию ресурса t следует, что все элементы из множества $X^1_{j,\,k+1}$, начиная с элемента q, превосходят величину T_k. Тогда ни с одного элемента этого слоя нельзя продолжить формирование подмножества $H_{1,\,j}$, и его построение закончено. Утверждение доказано.

После формирования любого порождающего подмножества $H_{1,\,j}$ построение на его основе новых допустимых подмножеств в задаче Z_{g+1} начинается с возможной замены последнего элемента. Далее согласно ранее описанному алгоритму для подмножества $H_{1,\,1}$ последовательно определяются подзадачи о ранце с объемом T_{d-m}, $m = 2, \ldots, d - 1$, и относящиеся к этому объему наборы элементов $V^1_{j,\,d-(m-1)}$. Каждое подмножество подзадачи формирует новое подмножество в задаче Z_{g+1} путем включения его элементов после соответствующей группы элементов из $H_{1,\,j}$. Утверждение 6 есть также условие завершения построения допустимых подмножеств в подзадачах о ранце на соответствующих паретовских множествах $V^1_{j,\,d-(m-1)}$.

Для нахождения оптимального подмножества в задаче Z_{g+1} требуется сформировать множество W допустимых подмножеств, у которых первым элементом является каждый элемент слоя S. Далее в качестве первых элементов формируемых порождающих подмножеств последовательно рассматриваются второй, третий и все последующие элементы из G вместе с соответствующими группами элементов U_i. Пусть требуется сформировать допустимые подмножества, первыми элементами которых являются некоторые элементы с номерами r_i, $i > 1$. Соответствующие этим элементам паретовские множества состоят из элементов слоя S как с меньшими, так и с бóльшими номерами в последовательности G. Однако при нахождении новых допустимых порождающих подмножеств требуется, как было показано ранее, на каждом шаге рассматривать только элементы с номерами, бóльшими, чем номер последнего включенного в формируемое подмножество элемента.

Кроме того, если некоторый элемент r_i имеет значение ресурса t_i, большее, чем величина $T_{\text{ост}}$, то ни r_i, ни остальные элементы последовательности G с бóльшими номерами не могут быть первыми элементами новых допустимых порождающих подмножеств.

При формировании порождающего подмножества $H_{i,\,1}$, начиная с элемента r_i, в него включаются последовательно элементы из G, пока их суммарное значение ресурса t не превысит объем ранца $T_{\text{ост}}$ или не исчерпаются все элементы последовательности. Далее на основе $H_{i,\,1}$ в соответствии с ранее описанным алгоритмом для подмножества $H_{1,\,1}$ формируются все возможные допустимые подмножества, первым элементом которых является r_i.

Пусть формируется новое допустимое подмножество $H_{n,\,1}$, первым элементом которого является некоторый элемент последовательности r_n, $n < s$. Предположим, что при последовательном включении в $H_{n,\,1}$ элементов $r_n, r_{n+1}, \ldots, r_s$ на некотором h-м шаге в него войдет последний элемент r_s из G. Пусть величина $T_h = T_{\text{ост}} - \sum\limits_{k=n}^{s} t_k > 0$, где t_k – ресурс t элемента r_k, а s – число членов последовательности G. Если величина T_h меньше ресурса t_1 первого элемента r_1 из G, то формирование допустимого подмножества закончено. В ином случае справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7. Пусть величина $T_k = T_{\text{ост}} - \sum\limits_{k=n}^{s} t_k \geq t_1$. Тогда все допустимые подмножества, включающие в себя группу элементов $D = r_n, r_{n+1}, \ldots, r_s$, уже существуют, и новое допустимое подмножество не может быть построено.

Доказательство. Согласно условию сумма ресурса t элементов слоя S больше величины $T_{\text{ост}}$. Тогда для величины $T_h \geq t_1$ существует хотя бы одна группа элементов последовательности G, позволяющая закончить формирование допустимого подмножества. Однако все элементы с номерами, меньшими, чем n, рассмотрены ранее в качестве первых элементов всех возможных допустимых подмножеств. Следовательно, допустимые подмножества, включающие элементы последовательности G с бóльшими номерами, в том числе и группы элементов, начинающиеся с элемента r_n, уже сформированы. Поскольку $T_h \geq t_1$, в формируемое подмножество могут включаться элементы с номерами, равными r_1 и при необходимости бóльшими, чем r_1. В результате получим на некотором шаге подмножество, совпадающее по составу с построенными допустимыми подмножествами, но имеющее другой порядок следования элементов. Тогда новые допустимые подмножества, у которых первый элемент есть r_n, не могут быть построены. Утверждение доказано.

Утверждение 8. Пусть величина $T_k = T_{\text{ост}} - \sum_{k=n}^{s} t_k \geq t_1$. Если в качестве первых элементов допустимых подмножеств рассмотреть все элементы с номерами, бóльшими, чем n, то новые допустимые подмножества не могут быть сформированы.

Доказательство. Пусть первым элементом нового допустимого подмножества является любой из элементов с номером n_1, бóльшим, чем n. Тогда для этого подмножества после включения в него последнего элемента последовательности величина $T_i = T_{\text{ост}} - \sum_{k=n_1}^{s} t_k$ будет больше ресурса t первого элемента r_1 из G. Это и доказывает справедливость утверждения 8.

Утверждения 7 и 8 справедливы и при решении подзадач о ранце для соответствующих им наборов начальных данных $V_{j,k}^{i}$, являющихся подмножествами слоя S, если при этом достигается последний элемент последовательности G.

Структура допустимых подмножеств

Будем считать, что число элементов $d_{i,j} > 1$ во всех подмножествах $H_{i,j}$. Далее в тех формулах, где величина $d_{i,j}$ появляется в индексах при обозначении подмножеств либо других величин, определим $d_{i,j}$ через u. Как следует из вышеописанного, предложены два способа построения допустимых подмножеств, включающих в себя элементы порождающего подмножества $H_{i,j}$.

1. При выполнении ранее указанных условий осуществляется замена последнего элемента подмножества $H_{i,j}$ на последний элемент из группы $V_{j,u}^{i}$.

2. Нахождение допустимых подмножеств в подзадачах о ранце с объемом, равным T_{u-n}, и соответствующих множествах начальных данных $V_{j,u-(m-1)}^{i}$, $T_{u-m} = T_{\text{ост}} - \sum_{k=1}^{u-m} t_k$, где t_k – значение ресурса t элементов r_k. Величина $d_{i,j} - m$, где $m = 2, \ldots, d_{i,j} - 2$, – это число первых элементов подмножеств $H_{i,j}$, которые порождают конкретную подзадачу. У элемента r_k значение индекса представляет собой его номер в допустимом подмножестве $H_{i,j}$. Величина $d_{i,j} - (m-1)$, $m = 2, \ldots, u-2$, указывает на номер элемента в $H_{i,j}$, с которого начинается множество $V_{j,u-(m-1)}^{i}$ для отдельной подзадачи. Реализация второго способа осуществляется при $d_{i,j} > 3$. При величине $d_{i,j}$, равной двум или трем, выполняется только первый способ построения допустимых подмножеств.

Для описания общего вида формируемых допустимых подмножеств в задаче Z_{i+1} процесс замены в первом пункте последнего элемента подмножеств $H_{i,j}$ на элемент из группы $V_{j,u}^{i}$ можно представить как подзадачу о ранце с объемом T_{u-1}. Множество начальных данных этой подзадачи представляет собой элементы группы $V_{j,u}^{i}$. Величина T_{u-1} такова, что по утверждению 5 для ее исчерпания достаточно ресурса единственного элемента из группы $V_{j,u}^{i}$. Следовательно, в данных подзадачах допустимые подмножества будут состоять из одного элемента.

Пусть z_i – число порождающих допустимых подмножеств $H_{i,j}$ в случае, когда первым элементом является элемент r_i последовательности G. Обозначим через W_i множество допустимых подмножеств в задаче Z_{i+1}, содержащее этот элемент в качестве первого элемента:

$$W_i = \bigcup_{j=1}^{z_i} \bigcup_{m=1}^{p_j} \bigcup_{k=1}^{n_m} \left(O_{u-m} \bigcup D_{kmj} \right), \tag{2}$$

где D_{kmj} – k-е допустимое подмножество в m-й подзадаче о ранце при рассмотрении j-го порождающего подмножества $H_{i,j}$; n_m – число допустимых подмножеств в m-й подзадаче о ранце при рассмотрении порождающего подмножества $H_{i,j}$; p_j – число подзадач о ранце при рассмотрении порождающего подмножества $H_{i,j}$; O_{u-m} – подмножество, содержащее первые $d_{i,j} - m$ элементов подмножества $H_{i,j}$, соответствующие m-й подзадаче о ранце, $m = 1, \ldots, p_j$.

Пусть последовательно рассмотрены все элементы G и сформированы допустимые подмножества, указанные элементы которых являются первыми. Множество допустимых подмножеств W, содержащее оптимальное подмножество Q_{i+1}, имеет вид

$$W = \bigcup_{k=1}^{s} W_i,$$

где s – число элементов в последовательности G; W_i – множества допустимых подмножеств в соответствии с формулой (2). При выполнении условий утверждения 7 множество W включает в себя только подмножества, первыми элементами которых являются элементы с номерами 1, 2, …, $n-1$, где $n-1$ – номер, на единицу меньший, чем номер элемента из утверждения 8. Если, начиная с некоторого номера i, элементы последовательности G имеют ресурс t_i, больший, чем величина $T_{\text{ост}}$, то соответствующие им множества W_i являются пустыми.

Частичным решением задачи Z_{g+1} назовем допустимое подмножество с максимальным суммарным весом на некоторой группе уже сформированных допустимых подмножеств. Каждое допустимое подмножество любой подзадачи о ранце формирует подмножество задачи Z_{g+1}, дополняя одну и ту же группу элементов, содержащую первые O_{u-m} элементов подмножества $H_{i,j}$. Пусть Y_m – оптимальное допустимое подмножество с максимальным суммарным весом в m-й подзадаче о ранце на подмножестве $D_{k,m,j}$, $k = 1, \ldots, n_m$. Тогда частичное решение $Q^{ch}_{i,j}$ в задаче о ранце Z_{g+1} на всей группе допустимых подмножеств при рассмотрении j-го порождающего подмножества $H_{i,j}$ имеет следующий вид:

$$Q^{ch}_{i,j} = \max_{m=1,\, p_j} \left(Y_m \bigcup O_{u-m}\right). \tag{3}$$

Следовательно, для нахождения частичного решения на группе допустимых подмножеств при рассмотрении j-го порождающего подмножества $H_{i,j}$ достаточно определить оптимальные подмножества в соответствующих подзадачах о ранце.

Исходя из формул (2) и (3), частичное решение $Q^{ch}_{i,j}$ задачи Z_{g+1}, представляющее собой допустимое подмножество с максимальным суммарным весом на всем множестве допустимых подмножеств W_i, имеет следующий вид:

$$Q^{W_i}_{ch} = \max_{j=1,\, z_i} Q^{ch}_{i,j}.$$

Таким образом, нахождение оптимального подмножества Q_{g+1} в задаче о ранце Z_{g+1} включает в себя решение подзадач с объемами ранца, меньшими, чем величина $T_{\text{ост}}$, и множеством начальных данных, являющихся подмножеством слоя S.

Пусть формируется множество всех допустимых подмножеств W, первым элементом которых является каждый элемент слоя S. По предположению число элементов в каждом допустимом подмножестве было больше 1. Далее рассмотрим иной возможный случай допустимых подмножеств.

Утверждение 9. Пусть при построении группы допустимых подмножеств $H_{i,j}$, первым элементом которых является r_i, существует допустимое подмножество, состоящее только из r_i. Предположим, что величина $T_o = T_{\text{ост}} - t_i$, где t_i – ресурс элемента r_i, меньший, чем ресурс t_1 первого элемента r_1. Пусть существует группа допустимых подмножеств, каждое из которых состоит из одного своего элемента и отвечает условию, приведенному для величины T_o (r_h – элемент с наибольшим номером). Тогда допустимое подмножество, состоящее из элемента r_h, имеет наибольший вес из подмножеств, входящих в эту группу.

Доказательство. Справедливость утверждения опирается на следующее свойство элементов в двухкритериальных пространствах [6]. Если элементы множества Парето упорядочены по убыванию предпочтения одного из критериев, то по второму критерию они будут следовать друг за другом по возрастанию предпочтения. Тогда чем больше номер элемента r_i в G, тем больше его вес w_i. Следовательно, допустимое подмножество, состоящее из элемента r_h, имеет наибольший вес. Утверждение доказано.

Оптимальное допустимое подмножество Q_{g+1}, являющееся решением задачи о ранце Z_{g+1}, можно представить следующим образом.

1. Если число элементов во всех допустимых подмножествах больше 1, то

$$Q_{i+1} = Q_{\max}, \tag{4}$$

где $Q_{\max}$ – подмножество с максимальным суммарным весом на множестве допустимых подмножеств $Q^{W_i}_{ch}$ (подмножество $Q^{W_i}_{ch}$ для каждого элемента последовательности соответствует формуле (3), $i = 1, \ldots, s$; s равно числу членов последовательности G).

2. Предположим, что существуют допустимые подмножества, состоящие из одного элемента. Пусть w_h – вес элемента r_h из утверждения 9. Кроме того, определено допустимое подмножество Q_1 с максимальным суммарным весом $w_{\max}$ у всех подмножеств с числом элементов больше 1 в соответствии с формулой (3).

Введем следующее выражение:

$$\text{если } w_h > w_{\max}, \text{ то } Q_{g+1} = \{r_h\}, \text{ иначе } Q_{g+1} = Q_1. \tag{5}$$

Тогда по формуле (1) могут быть найдены оптимальное подмножество Q, состоящее из $\bigcup_{j=0}^{g} P_j$, которое было определено в работе [5], и подмножества Q_{g+1}, принимающие вид согласно выражениям (6) или (7).

Алгоритм нахождения оптимального подмножества в задаче о ранце Z_{g+1}

Нахождение оптимального подмножества Q_{g+1} при глубине недоминирования слоя S, равной нулю, и сумме значений ресурса t его элементов, большей, чем величина $T_{\text{ост}}$, можно представить в виде следующего алгоритма. Как и ранее, там, где величина $d_{i,j}$ появляется в индексах для обозначения подмножеств либо других величин, обозначим $d_{i,j}$ через u.

1. Из элементов слоя S формируется последовательность G путем упорядочивания их по неубыванию ресурса t.

2. Если значение ресурса t первого элемента r_1 последовательности $G > T_{\text{ост}}$, то никакое допустимое подмножество в задаче Z_{g+1} не может быть построено, и алгоритм закончен. Иначе $j = 1$, $i = 1$, $opt = 0$, $n = 1$, $opm_1 = 0$. Пусть s – число элементов последовательности G. Если $s = 1$, то $opt = w_s$. По утверждению 3 единственный элемент последовательности G является решением задачи Z_{g+1}, и алгоритм закончен.

3. Формируется допустимое подмножество, где r_1 – первый элемент в упорядоченной последовательности G. Определяется допустимое порождающее подмножество $H_{i,j}$, сумма элементов которого не превосходит величину $T_1 = T_{\text{ост}} - t_1$. Для дальнейшего описания алгоритма потребуется не только номер элемента в последовательности G, но и его порядковый номер в подмножестве $H_{i,j}$. Введем следующие обозначения: r_k, $1 \le k \le s$, $s = |S|$, – k-й элемент последовательности G; $r_k^{i,j}$, $1 \le k \le d_{i,j}$, $d_{i,j} = |H_{i,j}|$, – k-й элемент упорядоченного множества $H_{i,j}$; $k = j + 1$.

3.1. Первый элемент $H_{i,j}$ есть r_1. Формирование $H_{i,j}$ продолжается с элемента, имеющего номер r_k. Однако если ресурс t_k элемента $r_k > T_1$, то $opm_1 = w_i$, и переходим к пункту 7. Далее в соответствии с правилом последовательного включения в $H_{i,j}$ войдут элементы с номерами r_k, r_{k+1}, r_{k+2}, …, r_{k+a} до тех пор, пока на $(a+1)$-м шаге не исчерпается величина T_1, т. е. величина $T_{a+2} = T_1 - \sum_{p=k}^{k+a} t_p$ станет меньше 0. Если на некотором шаге $k + a > s$, т. е. последний элемент G включен в $H_{i,j}$, то формирование $H_{i,j}$ будет закончено. Пусть $H_{i,j}$ содержит $d_{i,j}$ членов последовательности.

4. $m = 0$.

4.1. Пусть элемент $r_{u-m}^{i,j}$ имеет в последовательности G номер q. В множестве $V_{j,u-m}^{i}$ определяется группа $V_{j,u-m}^{i}$ элементов последовательности r_k, $k = q, q + 1, \dots, h$, где h – количество элементов в группе $V_{j,u-m}^{i}$. Ресурс t каждого из элементов r_k не должен превосходить величину T_{u-n}, которая равна сумме значений ресурса t первых $d_{i,j-n}$ элементов подмножества $H_{i,j}$.

4.2. Формирование новых допустимых подмножеств выполняется следующим образом. Если $n = 1$, то переходим к подпункту 4.3. Если $d_{i,j}$ меньше либо равно 3, то переходим к пункту 6. В противном случае объем ресурса очередной подзадачи о ранце равен величине T_{u-n}. Выполняется пункт 9, где формируются допустимые подмножества подзадачи, находится частичное решение задачи Z_{g+1}. Переходим к пункту 5.

4.3. Формируется новое допустимое подмножество задачи Z_{g+1} путем замены последнего элемента $r_u^{i,j}$ подмножества $H_{i,j}$ на элемент r_h.

4.4. Находится суммарное значение (M) веса элементов сформированного подмножества. Если $M = opt$ и его состав элементов не совпадает с уже имеющимся частичным решением, то это подмножество дополняет группу подмножеств, представляющих собой частичное решение задачи Z_{g+1}. Если $M > opt$, то $opt = M$ и допустимое подмножество, полученное в подпункте 4.3, является частичным решением на всем наборе уже сформированных допустимых подмножеств.

5. $n = n + 1$, $m = m + 1$. Если $d_{i,j} = n$, т. е. все элементы $H_{i,j}$ уже рассмотрены, то переходим к следующему пункту, иначе возвращаемся к подпункту 4.1.

6. Переходим к формированию нового порождающего подмножества $H_{i,j}$. Если $i = 1$, то переходим к следующему пункту, иначе переходим к подпункту 7.1.

6.1. $k = k + 1$. Если $k > s$ либо ресурс t_k элемента r_k больше величины T_1, то все порождающие подмножества $H_{i,j}$ при $i = 1$ сформированы, и переходим к пункту 7. Иначе $j = j + 1$, и переходим к пункту 3.1.

7. $i = i + 1$. Если $i = s$, то $opm_1 = w_i$, и переходим к пункту 8. Иначе $j = 1$, $n = 1$. Если $r_i > T_{\text{ост}}$, то переходим к пункту 8. Иначе $k = i + 1$, и переходим к подпункту 7.2.

7.1. $k = k + 1$. Если $k > s$ либо ресурс t_k элемента r_k больше величины T_1, то все $H_{i,j}$ при данном значении переменной i сформированы, и переходим к пункту 7. Иначе $j = j + 1$.

7.2. Формируется новое порождающее допустимое подмножество $H_{i,j}$, начинающееся с элемента r_i. Величина $T_1 = T_{\text{ост}} - t_i$, где t_i – ресурс элемента r_i. Вторым элементом $H_{i,j}$ может являться элемент r_k.

Однако подмножество $H_{i,j}$ может состоять только из одного элемента r_i, если ресурс t_k элемента $r_k > T_1$. Тогда $opm_1 = w_i$, и переходим к пункту 7. В ином случае подмножество $H_{i,j}$ формируется в соответствии с правилом выбора на каждом шаге следующего элемента с бо́льшим номером. Сумма ресурса t элементов $H_{i,j}$ не должна превосходить T_1. В противном случае формирование $H_{i,j}$ с числом элементов $d_{i,j}$ закончено, и переходим к пункту 4. Если на некотором a-м шаге последний элемент G включен в $H_{i,j}$, то переходим к подпункту 7.3.

7.3. Если остаток объема ранца $T_{g+1} = T_1 - \sum_{p=i}^{s} t_p$, полученный после включения последнего элемента G в $H_{i,j}$, больше или равен значению ресурса t_1 элемента r_1, то переходим к пункту 7. В противном случае допустимое подмножество $H_{i,j}$ построено и содержит $d_{i,j}$ членов, и переходим к пункту 4.

8. Если $opm_1 > opt$, то $opt = opm_1$. Если данный пункт выполняется при решении какой-либо подзадачи о ранце, то переходим к пункту 9. В противном случае формирование всех допустимых подмножеств при глубине недоминирования слоя S, равной нулю, в задаче о ранце Z_{g+1} закончено. Допустимое подмножество или группа подмножеств с суммарным весом opt представляют собой решение задачи Z_{g+1}. Конец алгоритма.

9. Определим подзадачу о ранце с объемом ранца, равным T_{u-n}, и множеством начальных данных, включающим в себя все элементы из группы $V^i_{j,u-m}$. Все допустимые подмножества данной подзадачи находятся следующим образом. Выполняются пункты 2–8, при этом вместо последовательности G рассматривается группа $V^i_{j,u-m}$, вместо $T_{\text{ост}}$ – величина T_{u-n}. Кроме того, вместо задачи Z_{g+1} подразумевается данная подзадача. Формируется множество допустимых подмножеств подзадачи, и находится ее решение. При этом возможно решение подзадачи о ранце с уровнем, бо́льшим на единицу. Далее создается допустимое подмножество задачи Z_{g+1} (либо подзадачи о ранце предыдущего уровня) путем добавления к элементам подмножества, являющегося решением подзадачи о ранце первых $d_{i,j-n}$ элементов подмножества $H_{i,j}$. Полученное подмножество H_{opt} или группа подмножеств (обозначим ее через J) с равными суммарными весами представляют собой частичное решение задачи Z_{g+1} (либо подзадачи о ранце предыдущего уровня) на сформированном наборе допустимых подмножеств.

Пусть суммарное значение веса элементов подмножества $H_{opt} = M$. Если $M > opt$, то $opt = M$, и подмножество H_{opt} или группа подмножеств J представляют собой частичное решение на всем наборе уже сформированных допустимых подмножеств. Если $M = opt$ и их состав не совпадает с имеющимся частичным решением, то дополняется группа подмножеств, являющаяся частичным решением задачи Z_{g+1} или подзадачи. Пункт 9 завершен.

Условие избыточности множества начальных данных в задаче о ранце

Определение 3. Множество начальных данных N_s обладает свойством избыточности, если в N_s существуют элементы, которые могут не рассматриваться при нахождении оптимального подмножества Q_{g+1}.

Определение 4. Избыточность множества начальных данных N_s является упорядоченной, если в N_s существует группа элементов, начиная с которой все остальные элементы могут не рассматриваться в качестве элементов подмножества Q_{g+1}.

Искомое оптимальное подмножество Q_{g+1} в задаче о ранце Z_{g+1} представляет собой подмножество с максимальной суммарной величиной веса на множестве допустимых подмножеств W [4; 5]. Из утверждения 4 следует, что, каким бы ни было число паретовских слоев, на которые разбивается множество N_s во введенном двухкритериальном пространстве, элементы всех слоев с номером после слоя S могут не рассматриваться при нахождении Q_{g+1}. Следовательно, в соответствии с определением 4 существование таких паретовских слоев при разбиении множества N_s представляет собой условие упорядоченной избыточности множества N_s. Вместе с тем множество начальных данных любой подзадачи о ранце, рассматриваемой в настоящей работе, не обладает свойством избыточности. Все элементы этого множества находятся между собой в отношении недоминируемости. Таким образом, не существует, кроме множества Парето, ни одного паретовского слоя, который включал бы в себя его элементы, и условия определения 3 не выполняются.

Оптимальное подмножество Q в задаче о ранце с множеством начальных данных N, объемом ранца T и подмножество Q_{g+1} связаны соотношением (1). Множество N включает в себя все элементы N_s. Следовательно, для множества N существование паретовских слоев с номерами, бо́льшими, чем номер слоя S, представляет собой условие его упорядоченной избыточности. В работе [6] показано, что построение требуемого числа паретовских слоев в двухкритериальном пространстве предпочтений осуществляется на основе алгоритма поиска в упорядоченных структурах данных, не требующих операций перебора. Тогда из (1) следует, что при нахождении оптимального подмножества Q алгоритм перебора требуется только при определении подмножества Q_{g+1}.

Предположим, что выполняется ограничение на объем ранца T, где сумма ресурса t всех элементов множества N больше T. Алгоритм решения задачи о ранце при глубине недоминирования слоя S, равной нулю, можно представить следующим образом.

1. Разбиение множества N на паретовские слои в двухкритериальном пространстве предпочтений.

2. Начиная с первого паретовского слоя, в соответствии со значением его глубины недоминирования и значением величины F определяются слои, которые полностью включаются в оптимальное подмножество Q.

3. Выполняется предложенный в данной работе способ нахождения оптимального подмножества Q_{g+1} из формулы (1) согласно его представлению в (4) и (5).

Формула (1) может не включать в себя паретовские слои P_i, если не выполняются условия утверждения 2 из работы [5]. Тогда множество начальных данных N совпадает с N_s и $T = T_{\text{ост}}$. В этом случае паретовский слой S совпадает с множеством Парето на множестве начальных данных N. Тогда наличие еще хотя бы одного паретовского слоя представляет собой условие избыточности множества N и оптимальное подмножество Q_{g+1} совпадает с Q. При глубине недоминирования слоя S, большей нуля, условия построения допустимых подмножеств в задаче о ранце Z_{g+1} имеют существенные особенности и требуют рассмотрения в отдельной работе.

Заключение

В работе представлен алгоритм решения задачи о ранце на основе предложенной многокритериальной модели. Определен способ построения множества допустимых подмножеств в задаче о ранце при глубине недоминирования слоя S, равной нулю. Алгоритм нахождения оптимального подмножества в задаче о ранце Z_{g+1} включает в себя решение подзадач с объемами ранца, меньшими, чем объем ранца в рассматриваемой задаче. Определено условие избыточности множества начальных данных.

Библиографические ссылки

1. Martello S, Toth P. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations.* New York: John Wiley & Sons; 1990. 308 p.
2. Посыпкин МА. Комбинированный параллельный алгоритм решения задачи о ранце. В: *Труды IV Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления»; 27–29 октября 2008 г.; Москва, Россия.* Москва: ИПУ РАН; 2008. с. 177–189.
3. Чебаков СВ. Двухкритериальная модель построения оптимального подмножества альтернатив с максимальной суммарной вероятностью достижения цели. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2005; 2:112–118.
4. Чебаков СВ, Серебряная ЛВ. Определение структуры оптимального подмножества в задаче о ранце. *Доклады БГУИР.* 2019;6:72–79. DOI: 10.35596/1729-7648-2019-124-6-72-79.
5. Чебаков СВ, Серебряная ЛВ. Алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества на основе паретовских слоев в задаче о ранце. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2:97–104. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-2-97-104.
6. Kung HF, Luccio F, Preparata FP. On finding the maxima of a set of vectors. *Journal of the ACM.* 1975;22(4):469–476. DOI: 10.1145/321906.321910.

References

1. Martello S, Toth P. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations.* New York: John Wiley & Sons; 1990. 308 p.
2. Posypkin MA. [Combined parallel algorithm for solving the knapsack problem]. In: *Trudy IV Mezhdunarodnoi konferentsii «Parallel'nye vychisleniya i zadachi upravleniya»; 27–29 oktyabrya 2008 g.; Moskva, Rossiya* [Proceedings of the 4th International conference «Parallel Computing and Control Problems»; 2008 October 27–29; Moscow, Russia]. Moscow: Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences; 2008. p. 177–189. Russian.
3. Chebakov SV. [A two-criterion model for constructing an optimal subset of alternatives with the maximum total probability of achieving the goal]. *Vesci Nacyjanal'naj akadjemii navuk Belarusi. Seryja fizika-matjematychnyh navuk.* 2005;2:112–118. Russian.
4. Chebakov SV, Serebryanaya LV. Finding of optimal subset structure in the knapsack problem. *Doklady BGUIR.* 2019;6:72–79. Russian. DOI: 10.35596/1729-7648-2019-124-6-72-79.
5. Chebakov SV, Serebryanaya LV. Finding algorithm of optimal subset structure based on the Pareto layers in the knapsack problem. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:97–104. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-2-97-104.
6. Kung HF, Luccio F, Preparata FP. On finding the maxima of a set of vectors. *Journal of the ACM.* 1975;22(4):469–476. DOI: 10.1145/321906.321910.

Получена 20.12.2021 / исправлена 10.11.2022 / принята 10.11.2022.
Received 20.12.2021 / revised 10.11.2022 / accepted 10.11.2022.