УДК 517.938:925

ПСЕВДОПРОЛОНГАЦИИ В КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Б. С. КАЛИТИН[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Проанализированы устойчиво подобные свойства замкнутых инвариантных множеств динамических и полудинамических систем на метрическом пространстве, обладающих свойством асимптотической компактности. Изучены свойства компактности, инвариантности и связности псевдопролонгации. Получены характеристики типов траекторий окрестностей слабых аттракторов. Уточнена связь псевдопролонгации с первой положительной пролонгацией Т. Ура и множеством слабоэллиптических точек.

Ключевые слова: динамическая система; замкнутое множество; притяжение; пролонгация.

Образец цитирования:
Калитин БС. Псевдопролонгации в качественной теории динамических систем. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:45–53.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-45-53

For citation:
Kalitine BS. Pseudo-prolongations in the qualitative theory of dynamical systems. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;3:45–53. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-45-53

Автор:
Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Author:
Boris S. Kalitine, PhD (physics and mathematics), docent; professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economy.
kalitine@yandex.by

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022;3:45–53
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2022;3:45–53

PSEUDO-PROLONGATIONS IN THE QUALITATIVE THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS

B. S. KALITINE[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

This paper considers the qualitative behaviour of the flow in a neighbourhood of closed invariant sets of dynamical systems. The properties of compactness, invariance, and connectivity of pseudo-prolongations are investigated. A rather deep analysis of the flow in the vicinity of a compact invariant set of asymptotically compact phase spaces is presented. The connection of pseudo-prolongation with the first positive prolongation of T. Ura and the set of weakly elliptic points is refined.

Keywords: dynamical system; closed set; attraction; prolongation.

Введение

В работе Т. Ура [1] представлено перспективное направление развития качественной теории устойчивости движения – теория пролонгаций. В продолжение этого в статье [2] введено понятие пролонгаций высших порядков, рассмотрено свойство устойчивости инвариантных множеств порядка α, а также понятие абсолютной устойчивости (устойчивости любого порядка). Детальной разработке теории пролонгаций и ее применению в поиске решения ряда задач динамических систем целенаправленно посвящены работы [3–13].

Использование теории пролонгаций дало толчок развитию важного направления теории устойчивости – метода функций Ляпунова [3–5]. Обобщенные пролонгации и обобщенные предельные пролонгации развивались А. Пэльчером [6; 7] для динамических систем применительно к вопросам равномерной устойчивости замкнутых множеств.

Однако сфера приложений введенного понятия пролонгаций не ограничивается прямым изучением задач устойчивости. Оно с успехом было использовано Н. Н. Ладисом при решении задачи о топологической эквивалентности систем дифференциальных уравнений [8], а также Л. Э. Рейзинем при исследовании проблем различения [9]. Динамические системы с устойчивой пролонгацией изучали А. Н. Шарковский [10] и В. А. Добрынский [11]. Общие вопросы топологической динамики с использованием теории пролонгаций рассматривались в статьях [12; 13].

В публикациях [14; 15] введено понятие псевдоустойчивости как необходимого свойства орбитальной устойчивости компактных инвариантных множеств. Продолжением этих исследований стали работы [16–24], где и представлена соответствующая теория псевдопролонгаций, приспособленная для изучения общих проблем качественной теории и, в частности, проблем псевдоустойчивости инвариантных множеств. С помощью свойств псевдопролонгаций рассмотрен ряд задач качественной теории, а именно структура окрестности слабо притягивающих и притягивающих компактных множеств [21; 22], проблема В. В. Немыцкого о существовании множеств эллиптического и слабоэллиптического типов [22] и др. В работе [16] установлено, что для локально компактных динамических систем свойство асимптотической устойчивости компактного множества равносильно наличию двух свойств – псевдоустойчивости и изолированности, и на этой основе сформулирован объединяющий критерий асимптотической устойчивости [23, с. 129].

В настоящей статье рассматриваются проблемы качественной теории устойчиво подобных свойств инвариантных множеств динамических и полудинамических систем на метрическом пространстве. Дополнены результаты, полученные ранее для локально компактных динамических систем, относительно свойств компактности, инвариантности и связности псевдопролонгации [23; 24]. С использованием псевдопролонгации доказана теорема о характере поведения траекторий в окрестности слабо притягивающих компактных инвариантных множеств. На основе проведенных исследований указаны условия совпадения псевдопролонгации с первой положительной пролонгацией Т. Ура и множеством слабоэллиптических точек.

Обозначения и определения

Приведем используемые в динамических системах обозначения и общепринятые понятия:

• $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{N}$ – множества вещественных, вещественных неотрицательных и натуральных чисел соответственно;

- $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство;
- X – метрическое пространство с метрикой $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$;
- 2^X – множество всех подмножеств X;
- $B(N, \alpha) = \{x \in X : d(N, x) < \alpha\}$ для $\alpha > 0$;
- $x_n \to x$ – сходящаяся к x последовательность (x_n);
- $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ – полудинамическая система с фазовым отображением $\pi : X \times \mathbb{R}^+ \to X$;
- $\pi(x, t) = xt,\ \forall x \in X$ и $\forall t \in \mathbb{R}^+$;
- аксиомы полудинамической системы:
  (I) $x0 = x$ для каждого $x \in X$,
  (II) $xt(\tau) = x(t+\tau)$ для каждого $x \in X$ и $t, \tau \in \mathbb{R}^+$,
  (III) π непрерывно;
- $\pi_x : \mathbb{R}^+ \to X$ (или $x : t \to xt$) – движение из точки x в фазовом пространстве X;
- если $Y \subset X$, то $\mathrm{Fr}Y$ и $\overline{Y}$ – граница и замыкание множества Y соответственно;
- если $I \subset \mathbb{R}^+$, $Y \subset X$, $x \in Y$, $t \in I$, то

$$xI = \{xt \in X : t \in I\},\ YI = \{xt \in X : x \in Y,\ t \in I\};$$

- множество Y из X положительно инвариантно, если $Y\mathbb{R}^+ = Y$;
- $\gamma^+(x) = x\mathbb{R}^+$ – положительная полутраектория точки $x \in X$;
- $L^+(x) = \{y \in X : xt_n \to y,\ t_n \to +\infty \text{ при } n \to +\infty\}$ – множество ω-предельных точек для $x \in X$;
- $A^+_\omega(M) = \{x \in X : \exists (t_n),\ d(M, xt_n) \to 0,\ t_n \to +\infty \text{ при } n \to +\infty\}$ – область слабого притяжения множества M при $t \to +\infty$;
- $A^+(M) = \{x \in X : d(M, xt) \to 0 \text{ при } t \to +\infty\}$ – область притяжения множества M;
- $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система (движения определены при всех $t \in \mathbb{R}$);
- $L^-(x) = \{y \in X : xt_n \to y,\ t_n \to -\infty \text{ при } n \to +\infty\}$ – множество α-предельных точек для $x \in X$ в $(X, \mathbb{R}, \pi)$;
- $\gamma(x) = x\mathbb{R}$ – траектория точки $x \in X$ в $(X, \mathbb{R}, \pi)$;
- $\gamma^-(x) = x\mathbb{R}^-$ – отрицательная полутраектория точки $x \in X$ в $(X, \mathbb{R}, \pi)$;
- $A^+_\omega(M) = \{x \in X : \exists (t_n),\ d(M, xt_n) \to 0,\ t_n \to +\infty \text{ при } n \to +\infty\}$ – область слабого притяжения множества M при $t \to +\infty$;
- $A^+(M) = \{x \in X : d(M, xt) \to 0 \text{ при } t \to +\infty\}$ – область притяжения множества M.

Если метрическое пространство X локально компактно, то динамическую систему $(X, \mathbb{R}, \pi)$ называют локально компактной.

Определение 1 [15; 19; 20]. Пусть $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ – полудинамическая система и M – замкнутое подмножество X. Будем считать, что M является:

- псевдоустойчивым, если

$$(\forall x \notin M)(\forall m \in M)(\exists \delta = \delta(x, m) > 0) : x \notin B(m, \delta)\mathbb{R}^+;$$

- устойчивым, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in M)(\exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0) : B(x, \delta)\mathbb{R}^+ \subset B(M, \varepsilon);$$

- слабо притягивающим, если $A^+_\omega(M)$ есть окрестность M;
- притягивающим, если $A^+(M)$ есть окрестность M;
- асимптотически устойчивым, если оно устойчивое и притягивающее.

Определение 2 [25–29]. Полудинамическая система $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ называется асимптотически компактной при $t \to +\infty$ на множестве W, если для любой пары последовательностей $(x_n) \subset W$ и $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ таких, что $x_n[0, t_n] \subset W$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $t_n \to +\infty$, последовательность $(x_n t_n)$ относительно компактна.

Аналогичным образом определяется понятие асимптотической компактности при $t \to -\infty$ на множестве W.

Для пояснения отметим некоторое обстоятельство. Если множество W положительно инвариантно, то из свойства асимптотической компактности на W следует, что для всякого движения $x : t \to xt$ ($xt \in W$, $\forall t \geq 0$) предельное множество $L^+(x)$ непусто и компактно.

Псевдопролонгация

Напомним следующие определения.

Определение 3 [30, p. 24]. Пусть $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система на метрическом пространстве X. Пролонгацией точки $m \in X$ называется множество

$$D^+(m) = \left\{x \in X : \exists(x_n) \subset X \text{ и } \exists(t_n) \subset \mathbb{R}^+ \text{ такие, что } x_n \to m \text{ и } x_n t_n \to x\right\}.$$

Если $M \subset X$ – замкнутое множество, то $D^+(M) = \bigcup\limits_{m \in M} D^+(m)$ – пролонгация множества M.

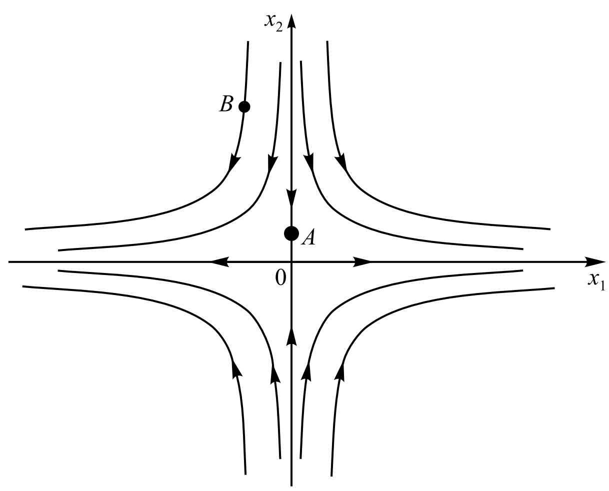
Определение 4 [18]. Пусть $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ – полудинамическая система на метрическом пространстве X. Псевдопролонгацией точки $m \in X$ называется множество

$$\sigma^+(m) = \left\{x \in X : \exists(x_n) \subset X \text{ и } \exists(t_n) \subset \mathbb{R}^+ \text{ такие, что } x_n \to m \text{ и } x_n t_n = x, \ \forall n \in \mathbb{N}\right\}. \quad (1)$$

Если $M \subset X$ – замкнутое множество, то $\sigma^+(M) = \bigcup\limits_{m \in M} \sigma^+(m)$ называется псевдопролонгацией множества M.

Из определений 3 и 4 следует, что $\sigma^+(M) \subset D^+(M)$. Как показывает следующий пример, возможно и совпадение этих множеств.

Пример 1. Рассмотрим динамическую систему $\dot{x}_1 = x_1, \ \dot{x}_2 = -x_2$ на плоскости $X = \mathbb{R}^2$. Траектории этой системы изображены на рисунке.



Фазовый портрет траекторий
Phase portrait of trajectories

Укажем пролонгационные множества $D^+(x)$, $\sigma^+(x)$ для точек фазовой плоскости A и B:

- если $A = (0, a)$ и $a \neq 0$, то $D^+(A) = \gamma^+(A) \bigcup \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\right\}$, $\sigma^+(A) = \gamma^+(A)$;
- если $A = (0, 0)$, то $D^+(A) = \sigma^+(A) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\right\}$;
- если $B = (\alpha, \beta)$, $\alpha\beta \neq 0$, то $D^+(B) = \sigma^+(B) = \gamma^+(B)$.

Напомним утверждения относительно $\sigma^+(M)$, которые будут использованы ниже.

Теорема 1 [20]. *Замкнутое множество $M \subset X$ полудинамической системы $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ на метрическом пространстве X псевдоустойчиво тогда и только тогда, когда*

$$\sigma^+(M) = M. \quad (2)$$

Теорема 2 [20]. *Пусть* $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ *– полудинамическая система на метрическом пространстве* X *и* $M \subset X$ *– компактное положительно инвариантное слабо притягивающее множество. Предположим, что система* $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ *асимптотически компактна при* $t \to +\infty$ *в области слабого притяжения* $A^+_\omega(M)$. *Тогда множество* $\sigma^+(M)$ *является компактным*.

Укажем также некоторые свойства асимптотической устойчивости компактного множества M. Для этого предварительно напомним понятия отрицательной полутраектории для полудинамических систем [31].

Пусть $\Delta(x)$ означает интервал существования движения $x : t \to xt$. Отображение $\bar{x} : t \to \bar{x}t$ является продолжением движения $x : t \to xt$, если $\Delta(\bar{x}) \supset \Delta(x)$ и $xt = \bar{x}t$ на $\Delta(x)$.

Движение $x : t \to xt$ называется максимальным, если для каждого продолжения y этого движения имеем $\Delta(y) = \Delta(x)$ (и, следовательно, $xt = yt$ на $\Delta(x)$).

Траектория точки $x \in X$ есть образ фазового отображения максимального движения, проходящего через точку x. В этом случае через $\gamma(x)$ будем обозначать траекторию максимального движения.

Максимальное движение $x : t \to xt$ и соответствующая траектория $\gamma(x)$ называются полными, если $\Delta(x) = \mathbb{R}$.

Пусть $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ – полудинамическая система и точке $x \in X$ соответствует некоторое полное движение $x : t \to xt$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда отрицательной полутраекторией $\gamma^-(x)$ точки $x \in X$ называется множество $\gamma^-(x) = \gamma(x) \backslash \gamma^+(x)$. С практической точки зрения для каждого $t \in \mathbb{R}^-$, для которого движение $x : t \to xt$ определено, полагаем, что $xt = \{y \in X : x \in y(-t)\}$.

Теорема 3 [27]. *Пусть* $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ *– полудинамическая система на метрическом пространстве* X *и* $M \subset X$ *– компактное положительно инвариантное множество. Предположим, что* U *– окрестность* M, *в которой* $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ *асимптотически компактна при* $t \to +\infty$. *Тогда множество* M *асимптотически устойчиво в том и только в том случае, когда существует окрестность* $W \subset U$ *для* M *такая, что* $W \backslash M$ *не содержит относительно компактных отрицательных полутраекторий.*

Теорема 4 [27]. *Пусть* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *– динамическая система на метрическом пространстве* X *и* $M \subset X$ *– компактное слабо притягивающее множество. Предположим, что* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *асимптотически компактна при* $t \to +\infty$ *в области слабого притяжения* $A^+_\omega(M)$. *Тогда выполняется одно из следующих двух условий:*

а) M *асимптотически устойчиво, и* $A^+(M) = A^+_\omega(M)$;

б) существует точка $q \in X \backslash M$ *такая, что* $L^-(q) \bigcap M \neq \varnothing$.

Предварительно представим некоторые характеристики псевдопролонгации $\sigma^+(M)$ для множества M из X.

Лемма 1. *Пусть* $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ *– полудинамическая система на метрическом пространстве* X *и* $M \subset X$ *– замкнутое множество. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $M \subset \sigma^+(M)$;

2) если M *положительно инвариантно, то для точек* $m \in M$ *и* $x \in X \backslash M$ *в условии (1)* $t_n \to +\infty$;

3) $\sigma^+(M)$ *положительно инвариантно.*

Доказательство. Докажем справедливость утверждения 1. Действительно, для произвольной точки $m \in M$ полагаем, что $x = m$ и $x_n = m$, $t_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу этих обозначений для точки x и последовательностей $(x_n) \subset X$, $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ будут выполняться следующие условия: $x_n \to m$, $x_n t_n = x$. Следовательно, для x имеет место (1), т. е. $x \in \sigma^+(m)$. Более того, по построению $m = x$, а значит, $m \in \sigma^+(m)$. Отсюда в силу произвольности выбора точки $m \in M$ и определения псевдопролонгации $\sigma^+(M)$ следует требуемое включение $M \subset \sigma^+(M)$.

Докажем теперь утверждение 2, предполагая, что множество M положительно инвариантно. Действительно, для любых $m \in M$ и $x \in \sigma^+(m) \backslash M$ по определению псевдопролонгации выполняется условие (1). Предположим при этом, что для последовательности (t_n) существует ограниченная подпоследовательность $\left(t_{n(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset (t_n)$. Тогда $x_{n(k)} t_{n(k)} = x$, $\forall k \in \mathbb{N}$, и $x_{n(k)} \to m$, а $t_{n(k)} \to T \in \mathbb{R}^+$ при $k \to +\infty$. В этом случае из тождества $x_{n(k)}t_{n(k)} = x$ в пределе при $k \to +\infty$ приходим к равенству $mT = x$. Однако, так как $x \notin M$, то это противоречит положительной инвариантности M. Следовательно, $t_n \to +\infty$.

Покажем теперь, что множество $\sigma^+(M)$ положительно инвариантно. Пусть $m \in M$ и точка $x \in \sigma^+(m)$. В этом случае согласно определению 4 можно указать последовательности $(x_n) \subset X$ и $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ такие, что $x_n \to m$ и $x_n t_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Пусть $t \in \mathbb{R}^+$ – произвольный момент времени. Тогда последовательность $(t_n + t) \subset \mathbb{R}^+$. Полагаем, что $y = xt$ и $\tau_n = t_n + t$, $\forall n \in \mathbb{N}$. В этом случае с учетом равенств $x_n t_n = x$ следует, что $x_n(t_n + t) = (x_n t_n)t = xt$ или $x_n \tau_n = y$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Другими словами, согласно определению 4 точка $y = xt \in \sigma^+(m)$. Поскольку $x \in \sigma^+(m)$, то в силу произвольности выбора $t \in \mathbb{R}^+$ отсюда следует положительная инвариантность $\sigma^+(m)$, что и соответствует положительной инвариантности множества $\sigma^+(M)$.

Лемма 2. *Пусть $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система на метрическом пространстве X и $M \subset X$ – замкнутое инвариантное множество. Тогда множество $\sigma^+(M)\backslash M$ инвариантно.*

Доказательство. Пусть $m \in M$ и точка $x \in \sigma^+(m)\backslash M$. По определению 4 можно указать последовательности $(x_n) \subset X$ и $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ такие, что $x_n \to m$ и $x_n t_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Пусть $t \in \mathbb{R}$ – произвольный момент времени. Тогда согласно утверждению 2 леммы 1 $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, а значит, для достаточно большого $N \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $(t_n + t) > 0$, $\forall n \geq N$. Полагаем, что $y = xt$ и $\tau_n = t_n + t$, $\forall n \in \mathbb{N}$. В этом случае с учетом равенств $x_n t_n = x$ следует, что $x_n(t_n + t) = (x_n t_n)t = xt$ или $x_n \tau_n = y$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Другими словами, согласно определению 4 точка $y = xt \in \sigma^+(m)\backslash M$. Поскольку $x \in \sigma^+(m)\backslash M$, то в силу произвольности выбора $t \in \mathbb{R}$ отсюда следует инвариантность $\sigma^+(m)\backslash M$, что и соответствует инвариантности множества $\sigma^+(M)\backslash M$.

Напомним следующие понятия.

Определение 5 [23, с. 32]. Пусть $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система на метрическом пространстве X и $M \subset X$ – замкнутое инвариантное множество. Точка x из X называется:

• эллиптической точкой M, если

$$L^+(x) \neq \varnothing,\ L^-(x) \neq \varnothing \text{ и } L^+(x) \subset M,\ L^-(x) \subset M;$$

• слабоэллиптической точкой M, если $L^+(x) \bigcap M \neq \varnothing$ и $L^-(x) \bigcap M \neq \varnothing$.

Обозначим через $E_\omega(M)$ ($E(M)$) множество всех слабоэллиптических (соответственно эллиптических) точек множества M. Из определения 3, в частности, следует, что если M компактно, то $M \subset E(M) \subset E_\omega(M)$.

Следующая теорема поясняет характер траекторий на множестве $\sigma^+(M)$.

Теорема 5. *Пусть $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система и $M \subset X$ – компактное инвариантное слабо притягивающее множество. Тогда имеет место равенство $\sigma^+(M) = E_\omega(M)$.*

Доказательство. Если M псевдоустойчиво, то согласно теореме 1 $\sigma^+(M) = M$. Но поскольку M компактно, а следовательно, $M \subset E_\omega(M)$, то в итоге получаем включение

$$\sigma^+(M) \subset E_\omega(M). \tag{3}$$

Предположим теперь, что M не является псевдоустойчивым. Тогда из теоремы 1 следует существование точки $x \in \sigma^+(M)\backslash M$. Это значит, что выполняются соотношения

$$(\exists m \in M)(\exists (x_n) \subset X)(\exists (t_n) \subset \mathbb{R}^+) : x_n t_n = x,\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ и } d(m, x_n) \to 0.$$

Отсюда с учетом инвариантности M следует, что $t_n \to +\infty$. Кроме того, так как $x_n t_n = x$, можем записать равенства $x_n = x(-t_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, по построению имеем $d(m, x(-t_n)) \to 0$. Иначе говоря, $L^-(x) \bigcap M \neq \varnothing$. Но тогда с учетом свойства слабого притяжения M получаем, что $x \in E_\omega(M)\backslash M$. Таким образом, и в случае отсутствия псевдоустойчивости M выполняется включение (3).

Докажем теперь обратное включение. Пусть $x \in E_\omega(M)\backslash M$, т. е., в частности, $L^-(x) \bigcap M \neq \varnothing$. Это по теореме 1 [19] означает, что M не является псевдоустойчивым. Другими словами, существуют последовательность моментов времени $(\tau_n) \subset \mathbb{R}^-$ и точка $m \in M$ такая, для которой $d(m, x\tau_n) \to 0$. Полагаем, что $x_n = x\tau_n$, тогда $d(m,\, x_n) \to 0$, причем $x_n(-\tau_n) = x$. Последние построения с учетом неравенства $\tau_n \le 0$ означают, что $x \in \sigma^+(M)\backslash M$. Следовательно, в силу произвольности выбора точки x можем записать включение $E_\omega(M) \subset \sigma^+(M)$, обратное включению (3). Это и завершает доказательство равенства $\sigma^+(M) = E_\omega(M)$.

Сформулируем теперь утверждение относительно структуры окрестности слабо притягивающих множеств.

Теорема 6. *Пусть $(X,\, \mathbb{R},\, \pi)$ – динамическая система на метрическом пространстве X и $M \subset X$ – компактное инвариантное слабо притягивающее множество. Предположим, что $(X,\, \mathbb{R},\, \pi)$ асимптотически компактна при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ в области слабого притяжения $A^+_\omega(M)$. Тогда псевдопролонгация $\sigma^+(M)$ является наименьшим компактным инвариантным асимптотически устойчивым множеством, содержащим M, причем*

$$A^+_\omega(M) = A^+\big(\sigma^+(M)\big). \tag{4}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что так как M – компактное инвариантное слабо притягивающее множество, то по теореме 2 множество $\sigma^+(M)$ компактно. Если при этом M псевдоустойчиво, то по теореме 1 [19] имеет место условие $L^-(x) \bigcap M = \varnothing,\ \forall x \notin M$. В этом случае с учетом слабого притяжения M из теоремы 4 следует асимптотическая устойчивость множества M. Кроме того, согласно теореме 1 псевдоустойчивость M означает равенство $\sigma^+(M) = M$. Отсюда делаем вывод, что $\sigma^+(M)$ является наименьшим компактным инвариантным асимптотически устойчивым множеством, содержащим M.

Предположим теперь, что M не является псевдоустойчивым, т. е. $\sigma^+(M)\backslash M \ne \varnothing$. Поскольку M – слабо притягивающее множество, то существует число $\Delta > 0$ такое, что для любого $x \in \overline{B(M,\, \Delta)}$ множества $L^+(x)$ и M имеют непустое пересечение. Заметим, что по определению $A^+_\omega(M)$ является открытой окрестностью множества M и, следовательно, число $\Delta > 0$ можно считать настолько малым, что $\overline{B(M,\, \Delta)} \subset A^+_\omega(M)$. Кроме того, согласно теореме 2, леммам 1, 2 и 4 [20] множество $\sigma^+(M)$ компактно, инвариантно, причем $M \subset \sigma^+(M)$, поэтому с учетом того, что множество $A^+_\omega(M)$ – открытая инвариантная окрестность M, следует включение $\sigma^+(M) \subset A^+_\omega(M)$.

Покажем, что $\sigma^+(M)$ асимптотически устойчиво. Действительно, предположим, что это не так. Тогда по теореме 3 для любого числа $\delta > 0$ существует отрицательная полутраектория $\gamma^-(x)$, расположенная во множестве $\overline{B\big(\sigma^+(M),\, \delta\big)}\backslash\sigma^+(M)$. Так как $\sigma^+(M)$ компактно и содержится в открытом множестве $A^+_\omega(M)$, то δ можно считать настолько малым, что $\overline{B\big(\sigma^+(M),\, \delta\big)} \subset A^+_\omega(M)$. Следовательно, с учетом инвариантности $A^+_\omega(M)$ имеем $\gamma^-(x) \subset A^+_\omega(M)\backslash\sigma^+(M)$.

На основании теоремы 3 [20] (где следует вместо M использовать $\sigma^+(M)$) псевдопролонгация $\sigma^+(M)$ является наименьшим псевдоустойчивым множеством, которое содержит M. Таким образом, из теоремы 1 [19] получаем, что $L^-(x) \bigcap \sigma^+(M) = \varnothing$, откуда с учетом включения $M \subset \sigma^+(M)$ следует, что

$$L^-(x) \bigcap M = \varnothing. \tag{5}$$

В силу предположения об асимптотической компактности $(X,\, \mathbb{R},\, \pi)$ при $t \to -\infty$ следует, что $L^-(x) \ne \varnothing$. Пусть $y \in L^-(x)$. Учтем, что по предположению M – слабо притягивающее множество, поэтому в соответствии с предыдущими построениями для точки y, удовлетворяющей соотношениям

$$y \in L^-(x) \subset \overline{B\big(\sigma^+(M),\, \delta\big)} \subset A^+_\omega(M),$$

можно указать последовательность (t_n), $t_n \to +\infty$, такую, что $d(M,\, yt_n) \to 0$ при $n \to +\infty$. Но множество M компактно, а значит, $L^-(x) \bigcap M \ne \varnothing$. Однако это противоречит условию (5), что и доказывает асимптотическую устойчивость $\sigma^+(M)$.

Нетрудно показать справедливость равенства (4). Действительно, так как по лемме 1 $M \subset \sigma^+(M)$, то ясно, что $A^+_\omega(M) \subset A^+_\omega\big(\sigma^+(M)\big)$ и для любого $x \in A^+_\omega\big(\sigma^+(M)\big)$ имеем $L^+(x) \subset \sigma^+(M) \subset A^+_\omega(M)$. Следовательно, $A^+\big(\sigma^+(M)\big) = A^+_\omega(M)$, что и подтверждает (4).

Докажем теперь, что $\sigma^+(M)$ является наименьшим из всех компактных инвариантных асимптотически устойчивых множеств, содержащих M. Пусть Y – компактное асимптотически устойчивое множество такое, что $M \subset Y \subset \sigma^+(M)$. Тогда имеем включения

$$\sigma^+(M) \subset \sigma^+(Y) \subset \sigma^+\left(\sigma^+(M)\right). \tag{6}$$

Более того, так как псевдопролонгация $\sigma^+(M)$ является компактным псевдоустойчивым множеством, то по теореме 1 $\sigma^+\left(\sigma^+(M)\right) = \sigma^+(M)$. Это в совокупности с включениями (6) приводит к равенству $\sigma^+(Y) = \sigma^+(M)$. Если Y – асимптотически устойчивое множество, то оно и псевдоустойчивое, а тогда $Y = \sigma^+(Y) = \sigma^+(M)$. Следовательно, $\sigma^+(M)$ является наименьшим из всех компактных инвариантных асимптотически устойчивых множеств, содержащих M.

Теорема доказана.

На основании теоремы 6 из настоящей статьи и теоремы 1.25 из источника [30, p. 64], где динамическая система предполагается локально компактной, можно уточнить связь первой положительной пролонгации $D^+(M)$, введенной Т. Ура, с псевдопролонгацией $\sigma^+(M)$.

Следствие 1. *Пусть $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – локально компактная динамическая система и $M \subset X$ – компактное инвариантное слабо притягивающее множество. Тогда имеет место равенство $\sigma^+(M) = D^+(M)$.*

Библиографические ссылки

1. Ura T. Sur les courbes définies par les équations différentielles dans espace a m dimentions. *Ecole Normale Supérieure. Serie 3.* 1953;70:287–360. DOI: 10.24033/asens.1014.
2. Ura T. Sur les courant extérieur a une région invariante; prolongement d`une caractéristique et l`ordre de stabilité. *Funkcialaj Ekvacioj.* 1959;2:143–190.
3. Seibert P. Prolongations and generalized Liapunov functions. *Techical Reports. RIAS.* 1961;61(7):454–462.
4. Seibert P. Prolongations and generalized Liapunov functions. In: *Proceedings of the International Symposium on Non-Linear Oscillations; 1961 September 12–18; Kiyv, Ukraine.* Kiyv: Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR; 1963. p. 332–341.
5. Auslander J, Seibert P. Prolongations and stability in dynamical systems. *Annales de l'Institut Fourier.* 1964;14(2):237–267. DOI: 10.5802/aif.179.
6. Pelczar A. Semistability of motions and regular dependence of limit sets on points in general semi-systems. *Annales Polonici Mathematici.* 1983;42:263–282. DOI: 10.4064/ap-42-1-263-282.
7. Pelczar A. Prolongations and prolongational limit sets in generalized semi-systems on metric spaces. *Universitatis Iagellonicae Acta Mathematia.* 1994;31:203–240.
8. Ладис НН. Топологическая эквивалентность некоторых дифференциальных систем. *Дифференциальные уравнения.* 1972; 8(7):1116–1119.
9. Рейзинь ЛЭ. *Функции Ляпунова и проблемы различения.* Рига: Зинатне; 1986. 192 с.
10. Шарковский АН. Структурная теория дифференциальных динамических систем и слабо неблуждающие точки. В: *VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen; 1975 September 8–13; Berlin, Germany. Band 2.* Berlin: Akademie-Verlag; 1977. p. 193–200.
11. Добрынский ВА. Типичность динамических систем с устойчивой пролонгацией. В: Митропольский ЮА, редактор. *Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений.* Киев: Издательство Института математики АН УССР; 1973. с. 43–53.
12. Hajek O. Prolongation in topological dynamical. In: Yorke JA, editor. *Seminar on differential equations and dynamical systems, II.* Berlin: Springer; 1970. p. 79–89 (Lecture notes in mathematics; volume 144).
13. Jong Sook Bae, Sung Kyu Choi, Jong Suh Park. Limit sets and prolongations in topological dynamics. *Journal of Differential Equations.* 1986;64(3):336–339. DOI: 10.1016/0022-0396(86)90079-3.
14. Kalitine BS. Pseudo-stabilité et classification des ensembles fermés invariants. *Prepublication USTHB, B.P. 9 Dar El-Beida (Alger).* 1983;9:1–12.
15. Калитин БС. Псевдоустойчивость замкнутых инвариантных множеств. *Дифференциальные уравнения.* 1986;22(2):187–193.
16. Калитин БС. Псевдоустойчивость и первые продолжения. *Дифференциальные уравнения.* 1988;24(4):571–574.
17. Калитин БС. Непрерывность псевдопролонгаций. *Дифференциальные уравнения.* 1989;25(12):2187.
18. Калитин Б.С. Псевдопролонгация. *Дифференциальные уравнения.* 1996;32(8):1043–1050.
19. Kalitine BS. On the pseudo-stability of semidynamical systems. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2015;1:79–84 (на англ.).
20. Калитин БС. О некоторых свойствах псевдоустойчивости и псевдопролонгации. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2015;2:77–83.
21. Калитин БС. О структуре окрестности слабо притягивающих компактных множеств. *Дифференциальные уравнения.* 1994;30(4):565–574.
22. Калитин БС. Качественная характеристика траекторий в окрестности притягивающего компактного множества. *Дифференциальные уравнения.* 1998;34(7):886–893.
23. Калитин БС. *Качественная теория устойчивости движения динамических систем.* Минск: БГУ; 2002. 198 с.
24. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем (качественная теория).* Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing; 2012. 258 p.
25. Ladyzhenskaya O. *Attractors for semigroups and evolution equations.* Cambridge: Cambridge University Press; 1991. 98 p.

26. Arredondo JH, Seibert P. On a characterization of asymptotic stability. *Aportaciones Matematicas: Comunicationes.* 2001;29: 11–16.

27. Kalitine BS. About asymptotic stability in semidynamical systems. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2016;1:114–119 (на англ.).

28. Калитин БС. Неустойчивость замкнутых инвариантных множеств полудинамических систем. Метод знакопостоянных функций Ляпунова. *Математические заметки.* 2009;85(3):382–394. DOI: 10.4213/mzm4115.

29. Калитин БС. О свойствах окрестности аттрактора динамической системы. *Математические заметки.* 2021;109(5): 734–746. DOI: 10.4213/mzm12915.

30. Bhatia NP, Szegö GH. *Stability theory of dynamical systems.* Berlin: Springer; 1970. 225 p.

31. Saperstone SH. *Semidynamical systems in infinite dimentional space.* Berlin: Springer; 1981. 474 p.

References

1. Ura T. Sur les courbes définies par les équations différentielles dans espace a m dimentions. *Ecole Normale Supérieure. Serie 3.* 1953;70:287–360. DOI: 10.24033/asens.1014.

2. Ura T. Sur les courant extérieur a une région invariante; prolongement d`une caractéristique et l`ordre de stabilité. *Funkcialaj Ekvacioj.* 1959;2:143–190.

3. Seibert P. Prolongations and generalized Liapunov functions. *Techical Reports. RIAS.* 1961;61(7):454–462.

4. Seibert P. Prolongations and generalized Liapunov functions. In: *Proceedings of the International Symposium on Non-Linear Oscillations; 1961 September 12–18; Kiyv, Ukraine.* Kiyv: Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR; 1963. p. 332–341.

5. Auslander J, Seibert P. Prolongations and stability in dynamical systems. *Annales de l'Institut Fourier.* 1964;14(2):237–267. DOI: 10.5802/aif.179.

6. Pelczar A. Semistability of motions and regular dependence of limit sets on points in general semi-systems. *Annales Polonici Mathematici.* 1983;42:263–282. DOI: 10.4064/ap-42-1-263-282.

7. Pelczar A. Prolongations and prolongational limit sets in generalized semi-systems on metric spaces. *Universitatis Iagellonicae Acta Mathematia.* 1994;31:203–240.

8. Ladis NN. Topological equivalence of certain differential systems. *Differentsial'nye uravneniya.* 1972;8(6):1116–1119. Russian.

9. Reizin LE. *Funktsii Lyapunova i problemy razlicheniya* [Lyapunov functions and the problem of discrimination]. Riga: Zinatne; 1986. 192 p. Russian.

10. Sharkovskii AN. [Structural theory of differential dynamical systems and weakly non-wandering points]. In: *VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen; 1975 September 8–13; Berlin, Germany. Band 2.* Berlin: Akademie-Verlag; 1977. p. 193–200. Russian.

11. Dobrynskii VA. [Typicality of dynamical systems with stable prolongation]. In: Mitropol'skii YuA, editor. *Dinamicheskie sistemy i voprosy ustoichivosti reshenii differentsial'nykh uravnenii* [Dynamical systems and questions of stability of solutions of differential equations]. Kyiv: Izdatel'stvo Instituta matematiki AN USSR; 1973. p. 43–53. Russian.

12. Hajek O. Prolongation in topological dynamical. In: Yorke JA, editor. *Seminar on differential equations and dynamical systems, II.* Berlin: Springer; 1970. p. 79–89 (Lecture notes in mathematics; volume 144).

13. Jong Sook Bae, Sung Kyu Choi, Jong Suh Park. Limit sets and prolongations in topological dynamics. *Journal of Differential Equations.* 1986;64(3):336–339. DOI: 10.1016/0022-0396(86)90079-3.

14. Kalitine BS. Pseudo-stabilité et classification des ensembles fermés invariants. *Prepublication USTHB, B.P. 9 Dar El-Beida (Alger).* 1983;9:1–12.

15. Kalitine BS. Pseudostability of closed invariant sets. *Differentsial'nye uravneniya.* 1986;22(2):187–193. Russian.

16. Kalitine BS. Pseudostability and first prolongations. *Differentsial'nye uravneniya.* 1988;24(4):571–574. Russian.

17. Kalitine BS. Continuity of pseudo-prolongations. *Differentsial'nye uravneniya.* 1989;25(12):2187. Russian.

18. Kalitine BS. Pseudo-prolongations. *Differentsial'nye uravneniya.* 1996;32(8):1043–1050. Russian.

19. Kalitine BS. On the pseudo-stability of semi-dynamical systems. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2015;1:79–84.

20. Kalitine BS. About some properties of pseudo-stability and pseudo-prolongation. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2015;2:77–83. Russian.

21. Kalitine BS. On the structure of a neighborhood of weakly attracting compact sets. *Differentsial'nye uravneniya.* 1994;30(4): 565–574. Russian.

22. Kalitine BS. Qualitative characterization of trajectories in a neighborhood of an attracting compact set. *Differentsial'nye uravneniya.* 1998;34(7):886–893. Russian.

23. Kalitine BS. *Kachestvennaya teoriya ustoichivosti dvizheniya dinamicheskikh sistem* [Qualitative theory of the stability of dynamical systems]. Minsk: Belaruisan State University; 2002. 198 p. Russian.

24. Kalitine BS. *Stability of dynamical systems (qualitative theory).* Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing; 2012. 258 p. Russian.

25. Ladyzhenskaya O. *Attractors for semigroups and evolution equations.* Cambridge: Cambridge University Press; 1991. 98 p.

26. Arredondo JH, Seibert P. On a characterization of asymptotic stability. *Aportaciones Matematicas: Comunicationes.* 2001;29: 11–16.

27. Kalitine BS. About asymptotic stability in semidynamical systems. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2016;1:114–119.

28. Kalitine BS. Instability of closed invariant sets of semidynamical systems. Method of sign-constant Lyapunov functions. *Matematicheskie zametki.* 2009;85(3):382–394. Russian. DOI: 10.4213/mzm4115.

29. Kalitine BS. Properties of neighborhoods of attractors of dynamical systems. *Matematicheskie zametki.* 2021;109(5):734–746. Russian. DOI: 10.4213/mzm12915.

30. Bhatia NP, Szegö GH. *Stability theory of dynamical systems.* Berlin: Springer; 1970. 225 p.

31. Saperstone SH. *Semidynamical systems in infinite dimentional space.* Berlin: Springer; 1981. 474 p.

Получена 16.03.2022 / исправлена 15.11.2022 / принята 15.11.2022.
Received 16.03.2022 / revised 15.11.2022 / accepted 15.11.2022.