УДК 517.51; 517.53

ПРИМЕНЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ – СОБОЛЕВА НА ПРЯМОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СКОРОСТИ РАВНОМЕРНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Т. С. МАРДВИЛКО[1)]***, А. А. ПЕКАРСКИЙ***[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассмотрено действительное пространство Харди – Соболева на прямой, и описаны некоторые достаточные условия принадлежности функций данному пространству. Также получены оценки нормы функций из этого пространства. Приведены различные примеры функций из пространства Харди – Соболева, и исследованы скорости их наилучших равномерных рациональных приближений. Получены оценки наилучших рациональных приближений для четного и нечетного продолжений функций с монотонными производными. Исследованы также скорости наилучших рациональных приближений четного и нечетного продолжений функций в общем случае. Оценки приведены как с учетом модуля непрерывности, так и без него. Полученные результаты применяются для изучения наилучших рациональных приближений функций с изломом, введенных А. А. Гончаром.

Ключевые слова: пространство Харди; пространство Соболева; пространство Харди – Соболева; равномерные рациональные приближения; четное и нечетное продолжения функций.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Национальной академии наук Беларуси в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025».

APPLICATION OF THE REAL HARDY – SOBOLEV SPACE ON THE LINE TO STUDY THE ORDER OF UNIFORM RATIONAL APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS

T. S. MARDVILKO[a]***, A. A. PEKARSKII***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: T. S. Mardvilko (mardvilko@gmail.com)

The real space of Hardy – Sobolev on a straight line is considered and some sufficient conditions for belonging to functions to this space are described. Estimates of the norm of functions from this space are also obtained. Various examples of functions from the Hardy – Sobolev space are given and the order of their best uniform rational approximations are

Образец цитирования:
Мардвилко ТС, Пекарский АА. Применение действительного пространства Харди – Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:16–36.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-16-36

For citation:
Mardvilko TS, Pekarskii AA. Application of the real Hardy – Sobolev space on the line to study the order of uniform rational approximations of functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;3:16–36. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-16-36

Авторы:
Татьяна Сергеевна Мардвилко – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.
Александр Антонович Пекарский – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета.

Authors:
Tatsiana S. Mardvilko, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
mardvilko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5346-6942
Aleksandr A. Pekarskii, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
pekarskii@live.com
https://orcid.org/0000-0002-8334-4874

investigated. Estimates of the best rational approximations for even and odd continuations of functions with monotonous derivatives are obtained. The order of the best rational approximations of the even and odd continuations of functions in the general case have also been studied. Estimates are given both considering the continuity module and without it. The obtained results are also used to study the best rational approximations of functions with a kink, introduced by A. A. Gonchar.

Keywords: Hardy space; Sobolev space; Hardy – Sobolev space; uniform rational approximations; even and odd continuations of functions.

Acknowledgements. The research was financially supported by the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the state program of scientific research «Convergence-2025».

Введение

Пусть I – одно из множеств: расширенная числовая ось $\hat{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, отрезок $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$), полуось $[a, +\infty]$ или полуось $[-\infty, b]$. Через $C(I)$ обозначим множество непрерывных функций $f : I \to \mathbb{R}$. В случае $I = \hat{\mathbb{R}}, [a, +\infty], [-\infty, b]$ предполагается существование конечных пределов $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =: f(\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =: f(+\infty)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =: f(-\infty)$ соответственно. Пространство $C(I)$ является банаховым относительно стандартной нормы

$$\|f\|_{C(I)} = \max_{x\in I} |f(x)|.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$). Через $\mathcal{R}_n$ обозначим множество алгебраических рациональных функций с коэффициентами из $\mathbb{R}$ и степени не выше n. Пусть $R_n(f)$, $f \in C(I)$ и $n \in \mathbb{N}_0$, – наилучшее равномерное приближение f посредством множества $\mathcal{R}_n$:

$$R_n(f) := R_n(f; I) := \inf\left\{\|f - r\|_{C(I)} : r \in \mathcal{R}_n\right\}.$$

Для $\left\{R_n\left(f; \hat{\mathbb{R}}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$, $f \in C\left(\hat{\mathbb{R}}\right)$, известны [1] прямая и обратная теоремы, в которых используется действительное пространство Харди – Соболева $\mathcal{H}^s$, $s \in \mathbb{N}$. Введем пространство $\mathcal{H}^s$ и другие обозначения.

Для измеримого множества $I \subset \mathbb{R}$ через $L_p(I)$, $0 < p \le \infty$, обозначим пространство Лебега функций $f : I \to \mathbb{R}$. Функционал

$$\|f\|_{L_p(I)} = \left(\int_I |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(I)} = \operatorname{ess\,sup}\left\{|f(x)| : x \in I\right\} \text{ при } p = \infty$$

на $L_p(I)$ является нормой при $1 \le p \le \infty$ и p-нормой при $0 < p < 1$. Последнее означает, что для $f, g \in L_p(I)$ при $0 < p < 1$ в качестве неравенства треугольника выступает p-неравенство треугольника, т. е.

$$\|f + g\|_{L_p(I)}^p \le \|f\|_{L_p(I)}^p + \|g\|_{L_p(I)}^p.$$

В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим верхнюю полуплоскость $\Pi = \{z : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$. Говорим [2], что аналитическая в Π функция f принадлежит пространству Харди H_p, $0 < p \le \infty$, если

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y>0} \|f(\cdot + iy)\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty.$$

Как известно, для функции $f \in H_p$ почти для всех $x \in \mathbb{R}$ существуют некасательные предельные значения, которые обозначим через $f(x)$. При этом $\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R})}$.

Через H^s, $s \in \mathbb{N}$, обозначим пространство Харди – Соболева аналитических в Π функций. Именно $f \in H^s$, если f аналитична в Π, $f^{(s)} \in H_{\frac{1}{s}}$ и при $s \ge 2$ существует $\lim f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$ при $z \in \Pi$ и $z \to \infty$. Отметим, что последнее условие для $f \in H^1$ выполняется без дополнительных предположений. Согласно теореме Харди – Литтлвуда [7, suppl. 3] $H^s \subset C_A\left(\overline{\Pi}\right)$, т. е. функция $f \in H^s$ аналитична в Π, продолжается по непрерывности в замкнутую полуплоскость $\overline{\Pi} = \{z : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \ge 0\}$, и существует $\lim f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$ при $z \in \overline{\Pi}$ и $z \to \infty$.

Введем сейчас пространство Харди – Соболева $\mathcal{H}^s$, $s \in \mathbb{N}$, действительных функций. Пусть $g \in C\left(\hat{\mathbb{R}}\right)$ и $u(z)$, $z \in \overline{\Pi}$, есть решение задачи Дирихле, т. е. u непрерывна в $\overline{\Pi}$, $u(x) = g(x)$ для $x \in \mathbb{R}$, $u(z)$ гармонична и ограничена в Π. Через $v(z)$ обозначим гармонически сопряженную с u функцию, которая однозначно определяется из условия $v(i) = 0$. Говорим, что $g \in \mathcal{H}^s$, если функция $f(z) := u(z) + iv(z)$ принадлежит H^s. При этом $\frac{1}{s}$-норма функции g вводится следующим образом:

$$\|g\|_{\mathcal{H}^s} = \left\|f^{(s)}\right\|_{H_{\frac{1}{s}}}. \tag{1}$$

Функция $f(z)$ находится с помощью интеграла типа Коши [2, p. 105]:

$$f(z) = (Cg)(z) := \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} g(t)\left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{t^2 + 1}\right)dt, \ z \in \Pi.$$

Значит, для $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$f^{(s)}(z) = (Cg)^{(s)}(z) := \frac{s!}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{(t - z)^{s+1}}dt, \ z \in \Pi. \tag{2}$$

Из равенства (1) следуют полнота пространства $\mathcal{H}^s$ и $\frac{1}{s}$-неравенство треугольника:

$$\|g + h\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}} \le \|g\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}} + \|h\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}}, \ g, h \in \mathcal{H}^s.$$

Формулу (2) можно применять для вычисления или оценки $\frac{1}{s}$-нормы $\|g\|_{\mathcal{H}^s}$.

Для пространства $\mathcal{H}^s$ известна еще одна эквивалентная $\frac{1}{s}$-норма. Чтобы ее определить, введем дополнительные обозначения и понятия. Через $C^s(I)$, $s \in \mathbb{N}$, обозначим множество s раз непрерывно дифференцируемых функций $f : I \to \mathbb{R}$. Будем считать также, что $C^0(I) := C(I)$. Здесь I – отрезок $[a, b]$, полуось $(-\infty, b]$, полуось $[a, +\infty)$ или числовая ось $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Через $W_p^s(I)$ ($s \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$) обозначим пространство Соболева. Функция $f \in W_p^s(I)$, если $f \in C^{s-1}(I)$, $f^{(s-1)}$ абсолютно непрерывна на I и $f, f', f'', \ldots, f^{(s)} \in L_p(I)$.

Функцию $\varphi \in W_\infty^s(\mathbb{R})$ называем s-простой, если она финитна. С s-простой функцией φ будем ассоциировать опорный отрезок $J(\varphi)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \subset J$. Для s-простой функции φ введем характеристику

$$\mu_s(\varphi) = |J|^s \left\|\varphi^{(s)}\right\|_{L_\infty(J)},$$

где $|J|$ – длина отрезка J.

Теорема 1. *Функция $g \in C\left(\hat{\mathbb{R}}\right)$ принадлежит $\mathcal{H}^s$, $s \in \mathbb{N}$, в том и только том случае, если существует постоянная a и последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ s-простых функций, удовлетворяющих условиям*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_s(\varphi_k)^{\frac{1}{s}} =: A < \infty, \tag{3}$$

$$a + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = g(x) \ \text{при}\ x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

При этом $\|g\|_{\mathcal{H}^s}^{\#} := \inf\left\{A^s\text{: выполняются соотношения (3) и (4)}\right\}$ является $\frac{1}{s}$-нормой в $\mathcal{H}^s$, эквивалентной $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$.

Теорема 1 является следствием результата Р. Койфмана [3; 4] об атомическом представлении функций класса $\operatorname{Re}H_p$ при $p \le 1$. Прямые вычисления показывают, что $\frac{1}{s}$-нормы $\|g\|_{\mathcal{H}^s}$ и $\|g\|_{\mathcal{H}^s}^{\#}$ обладают следующим интересным и весьма полезным свойством: они инвариантны относительно невырожденных линейных преобразований аргумента функции g.

Имеют место теоремы 2 и 3 – прямая и обратная теоремы рациональной аппроксимации соответственно (подробнее см. [1]). Здесь и далее через c, c_1, c_2, … обозначаем некоторые положительные величины (постоянные). Если они зависят от каких-либо параметров, то эти параметры указываем в скобках. В пределах одного раздела различные постоянные отмечаем разными индексами.

Теорема 2. *Пусть* $g \in \mathcal{H}^s$, $s \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$R_n\left(g;\,\hat{\mathbb{R}}\right) \le \frac{c_1(s)}{n^s}\|g\|_{\mathcal{H}^s},\ n \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, при $s = 1$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$R_n\left(g;\,\hat{\mathbb{R}}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty.$$

Если же $s \ge 2$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(n^s R_n\left(g;\,\hat{\mathbb{R}}\right)\right)^2 \le c_2(s)\|g\|_{\mathcal{H}^s}^2.$$

Теорема 3. *Пусть* $g \in C\left(\hat{\mathbb{R}}\right)$ *и* $s \in \mathbb{N}$. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(n^s R_n\left(g;\,\hat{\mathbb{R}}\right)\right)^{\frac{1}{s}} =: B < \infty,$$

то $g \in \mathcal{H}^s$ *и* $\|g\|_{\mathcal{H}^s} \le c_3(s)B^s$.

В настоящей статье для изучения скорости наилучших рациональных приближений функций будем использовать теорему 2. При этом применяем как $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$, так и $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}^{\#}$ $\frac{1}{s}$-нормы. Вследствие теоремы 1 в дальнейшем используем лишь обозначение $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$ для $\frac{1}{s}$-нормы. Из контекста будет ясно, когда имеется в виду $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$, а когда $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}^{\#}$.

В разделах «Примеры функций класса $\mathcal{H}^s$: использование s-простых функций» и «Примеры функций класса $\mathcal{H}^{s+1}$: использование интеграла типа Коши» приводятся различные примеры функций из действительного пространства Харди – Соболева. Наилучшие приближения функций с монотонными производными и их четных продолжений изучаются в разделе «Аппроксимация функций с монотонными производными и их четных продолжений». В разделе «Аппроксимация нечетного продолжения функций с монотонными производными» аналогичная задача рассматривается для нечетных продолжений функций.

Примеры функций класса $\mathcal{H}^s$: использование s-простых функций

Через $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, обозначим множество алгебраических многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$ и степени не выше n. Пусть функция $f \in L_\infty(X)$, $X \subset \mathbb{R}$, в частности $f \in C(X)$. Для краткости полагаем, что $\|f\|_X := \|f\|_{L_\infty(X)}$.

Лемма 1. *Пусть* $-\infty < a < b < +\infty$, $s \in \mathbb{N}$ *и* $p \in \mathcal{P}_{2s-1}$. *Тогда для* $l = 0, 1, \ldots, 2s-1$ *выполняется неравенство*

$$\left\|p^{(l)}\right\|_{[a,\,b]} \le c(s)\sum_{j=0}^{s-1}(b-a)^{j-l}\left(\left|p^{(j)}(a)\right| + \left|p^{(j)}(b)\right|\right). \tag{5}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $[a,\,b] = [0,\,1]$. Общий случай сводится к указанному с помощью линейной замены аргумента $x = a + t(b-a)$, $0 \le t \le 1$. Хорошо известно, что $\|p\|_{[0,\,1]}$ является нормой в пространстве $\mathcal{P}_{2s-1}$. Сумма $\sum_{j=0}^{s-1}\left(\left|p^{(j)}(0)\right| + \left|p^{(j)}(1)\right|\right) =: \mathfrak{S}(p)$ также есть норма в пространстве $\mathcal{P}_{2s-1}$. При проверке аксиом нормы в рассматриваемом случае затруднение может вызвать лишь проверка импликации $\mathfrak{S}(p) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Докажем это. Действительно, если $\mathfrak{S}(p) = 0$, то точки 0 и 1 являются нулями порядков не ниже s для полинома $p \in \mathcal{P}_{2s-1}$. Значит, с учетом кратности полином p имеет не менее $2s$ нулей. Согласно основной теореме алгебры это возможно лишь в случае, когда $p(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Как известно, в конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны. Тогда для каждого $p \in \mathcal{P}_{2s-1}$ выполняется неравенство

$$\|p\|_{[0,1]} \le c_1(s)\sum_{j=0}^{s-1}\left(\left|p^{(j)}(0)\right| + \left|p^{(j)}(1)\right|\right). \tag{6}$$

Согласно неравенству А. А. Маркова [5, p. 97] для $l = 0, 1, \ldots, 2s - 1$ имеем

$$\left\|p^{(l)}\right\|_{[0,1]} \le c_2(s)\|p\|_{[0,1]}.$$

Значит, из формулы (6) следует выражение (5) для $[a, b] = [0, 1]$.

Лемма 2. *Пусть* $\psi \in C\left(\widehat{\mathbb{R}}\right)$, $\operatorname{supp}\psi \subset [a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ *и* $\psi\big|_{[a,b]} \in W_\infty^s$, $s \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\psi \in \mathcal{H}^s$ *и*

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^s} \le c_2(s)\sum_{l=1}^{s}(b-a)^l\left\|\psi^{(l)}\right\|_{[a,b]}. \tag{7}$$

Доказательство. Если $s = 1$, то соотношение (7) очевидно ввиду теоремы 1, поэтому считаем $s \ge 2$. Кроме того, полагаем, что $[a, b] = [0, 1]$, так как общий случай выводится отсюда с помощью линейной замены аргумента.

Для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ введем отрезки $J_{k0} = \left[-2^{-k}, 0\right]$, $J_{k1} = \left[1, 1 + 2^{-k}\right]$ и функцию $\psi_k \in W_\infty^s(\mathbb{R})$. Именно $\psi_k(x) = \psi(x)$ при $x \in \mathbb{R}\setminus\left(J_{k0} \cup J_{k1}\right)$, а на отрезках J_{k0} и J_{k1} функция ψ_k совпадает с полиномами степеней не выше $2s - 1$, которые ввиду условия $\psi_k \in W_\infty^s(\mathbb{R})$ существуют и являются единственными. Здесь воспользуемся решением интерполяционной задачи Эрмита [5, p. 118, theorem 6.1]. Имеем

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{1}\varphi_{ki}(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где $\varphi_{ki}(x) = \psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)$ при $x \in J_{ki}$ и $\varphi_{ki}(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}\setminus J_{ki}$. Функции ψ_0 и φ_{ki} являются s-простыми функциями с опорными отрезками $J(\psi_0) = [-1, 2]$ и $J(\varphi_{ki}) = J_{ki}$. Следовательно,

$$\mu_s(\psi_0) = 3^s\left\|\psi_0^{(s)}\right\|_{[-1,2]} = 3^s\max\left\{\left\|\psi_0^{(s)}\right\|_{[-1,0]}, \left\|\psi^{(s)}\right\|_{[0,1]}, \left\|\psi_0^{(s)}\right\|_{[1,2]}\right\}. \tag{9}$$

Для оценки первого и третьего выражений из фигурных скобок формулы (9) воспользуемся леммой 1. Рассмотрим первое выражение. При этом учтем, что $\psi_0^{(j)}(-1) = 0$ при $j = 0, 1, \ldots, s - 1$; $\psi_0(0) = 0$ и $\psi_0^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(+0)$ при $j = 1, 2, \ldots, s - 1$. Следовательно,

$$\left\|\psi_0^{(s)}\right\|_{[-1,0]} \le c_3(s)\sum_{j=1}^{s-1}\left|\psi_0^{(j)}(0)\right| \le c_3(s)\sum_{j=1}^{s-1}\left\|\psi^{(j)}\right\|_{[0,1]}.$$

Ясно, что аналогичная оценка верна и для $\left\|\psi_0^{(s)}\right\|_{[1,2]}$. Таким образом, с учетом равенства (9) находим

$$\mu_s(\psi_0) \le c_4(s)\sum_{j=1}^{s}\left\|\psi^{(j)}\right\|_{[0,1]}. \tag{10}$$

Ниже покажем, что при $i = 0, 1$ и $k \in \mathbb{N}_0$ имеет место неравенство

$$\mu_s(\varphi_{ki}) \le c_5(s)2^{-k}\sum_{j=1}^{s}\left\|\psi^{(j)}\right\|_{[0,1]}. \tag{11}$$

Будем считать, например, $i = 0$. Функция φ_{k0} является s-простой функцией с опорным отрезком $J_{k0} = \left[-2^{-k}, 0\right]$; $\varphi_{k0}\big|_{\left[-2^{-k}, -2^{-k-1}\right]}$ и $\varphi_{k0}\big|_{\left[-2^{-k-1}, 0\right]}$ – полиномами степени, не превышающей $2s - 1$. Кроме того, $\varphi_{k0}(x) = -\psi_k(x)$ при $x \in \left[-2^{-k}, -2^{-k-1}\right]$. Следовательно, используя лемму 1, получим

$$\left\|\varphi_{k0}^{(j)}\right\|_{\left[-2^{-k}, -2^{-k-1}\right]} \le \left\|\psi_k^{(j)}\right\|_{\left[-2^{-k}, 0\right]} \le c_6(s)\sum_{m=1}^{s-1}2^{-k(m-j)}\left|\psi^{(m)}(+0)\right| \le$$
$$\le c_6(s)\sum_{m=1}^{s-1}2^{-k(m-j)}\left\|\psi^{(m)}\right\|_{[0,1]},\ j = 1, 2, \ldots, s. \tag{12}$$

Действуя аналогично, находим, что

$$\left\|\varphi_{k0}^{(s)}\right\|_{\left[-2^{-k-1},\,0\right]} \le c_6(s)\sum_{j=1}^{s-1} 2^{-k(j-s)}\left|\varphi_{k0}^{(j)}\left(-2^{-k-1}\right)\right|.$$

Далее используем выражение (12) для оценки $\left|\varphi_{k0}^{(j)}\left(-2^{-k-1}\right)\right|$. Таким образом, получим

$$\left\|\varphi_{k0}^{(s)}\right\|_{\left[-2^{-k-1},\,0\right]} \le c_7(s)\sum_{j=1}^{s-1} 2^{-k(j-s)}\sum_{m=1}^{s-1} 2^{-k(m-j)}\left\|\psi^{(m)}\right\|_{[0,\,1]} =$$

$$= (s-1)c_7(s)\sum_{m=1}^{s-1} 2^{-k(m-s)}\left\|\psi^{(m)}\right\|_{[0,\,1]}. \qquad (13)$$

Поскольку $\mu_s(\varphi_{k0}) = 2^{-ks}\left\|\varphi_{k0}^{(s)}\right\|_{\left[-2^{-k},\,0\right]}$, то из формул (12), (13) получим

$$\mu_s(\varphi_{k0}) \le c_8(s)\sum_{m=1}^{s-1} 2^{-km}\left\|\psi^{(m)}\right\|_{[0,\,1]} \le c_8(s)2^{-k}\sum_{j=1}^{s}\left\|\psi^{(j)}\right\|_{[0,\,1]}.$$

Таким образом, неравенство (11) доказано для $i = 0$.

Аналогично рассматривается случай $i = 1$. Из выражений (8), (10) и (11) следует неравенство (7) для $[a,\,b] = [0,\,1]$.

Лемма 3. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$ *и* $-\infty < a < b \le u < y < +\infty$. *Если функция* $\psi \in C\left(\hat{\mathbb{R}}\right)$, $\operatorname{supp}\psi \subset [a,\,y]$, $\psi|_{[a,\,b]} \in W_\infty^s$, $\psi|_{[u,\,y]} \in W_\infty^s$ *и* $\psi(x) = const$ *при* $x \in [b,\,u]$, *то* $\psi \in \mathcal{H}^s$ *и имеет место соотношение*

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^s} \le c_9(s)\sum_{l=1}^{s}(y-a)^l\left\|\psi^{(l)}\right\|_{[a,\,b]\cup[u,\,y]}. \qquad (14)$$

Доказательство. Для $s = 1$ неравенство (14) выполняется ввиду теоремы 1, так как ψ суть 1-простая функция с отрезком $J(\psi) = [a,\,y]$. Следовательно, считаем, что $s \ge 2$. При этом утверждение леммы для $s \ge 2$ получим вначале, если выполнено дополнительное условие

$$y - a \le 2(u-b). \qquad (15)$$

Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [b,\,u]$, $\varphi|_{[b,\,u]} \in \mathcal{P}_{2s-1}$, и является единственным решением интерполяционной задачи Эрмита [5, p. 118, theorem 6.1]:

$$\varphi(b) = \varphi(u) = 0,\ \varphi^{(j)}(b+0) = \psi^{(j)}(b-0),\ \varphi^{(j)}(u-0) = \psi^{(j)}(u+0), \qquad (16)$$

где $j = 1, 2, \ldots, s-1$. Тогда функции φ и $\hat{\psi} := \psi + \varphi$ удовлетворяют условиям леммы 2, где в качестве отрезка $[a,\,b]$ берутся $[b,\,u]$ и $[a,\,y]$ соответственно. Согласно лемме 1 и условию (16) для $l = 1, 2, \ldots, s$ получим

$$\left\|\varphi^{(l)}\right\|_{[b,\,u]} \le c_{10}(s)\sum_{j=1}^{s-1}(u-b)^{j-l}\left\|\psi^{(j)}\right\|_{[a,\,b]\cup[u,\,y]}. \qquad (17)$$

Следовательно, с учетом леммы 2 находим

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^s} \le c_{11}(s)\sum_{l=1}^{s}(u-b)^l\left\|\varphi^{(l)}\right\|_{[b,\,u]} \le c_{12}(s)\sum_{j=1}^{s-1}(u-b)^j\left\|\psi^{(j)}\right\|_{[a,\,b]\cup[u,\,y]}. \qquad (18)$$

Далее применим лемму 2 к функции $\hat{\psi}$:

$$\left\|\hat{\psi}\right\|_{\mathcal{H}^s} \le c_{13}(s)\sum_{l=1}^{s}(y-a)^l\left\{\left\|\psi^{(l)}\right\|_{[a,\,b]\cup[u,\,y]} + \left\|\varphi^{(l)}\right\|_{[b,\,u]}\right\}.$$

Здесь первое слагаемое из фигурных скобок дает сумму, как требуется в формуле (14). Для второго слагаемого с учетом условий (15) и (17) получаем

$$\sum_{l=1}^{s}(y-a)^{l}\left\|\varphi^{(l)}\right\|_{[b,\,u]} \le c_{14}(s)\sum_{l=1}^{s}(y-a)^{l}\sum_{j=1}^{s-1}(u-b)^{j-l}\left\|\psi^{(j)}\right\|_{[a,\,b]\cup[u,\,y]} =$$

$$= c_{15}(s)\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{s-1}(y-a)^{j}\left(\frac{u-b}{y-a}\right)^{j-l}\left\|\psi^{(j)}\right\|_{[a,\,b]\cup[u,\,y]} \le$$

$$\le s2^{s-1}c_{15}(s)\sum_{j=1}^{s-1}(y-a)^{j}\left\|\psi^{(j)}\right\|_{[a,\,b]\cup[u,\,y]}.$$

Собрав найденные оценки, находим

$$\left\|\hat{\psi}\right\|_{\mathcal{H}^s} \le c_{16}(s)\sum_{l=1}^{s}(y-a)^{l}\left\|\psi\right\|_{[a,\,b]\cup[u,\,y]}. \tag{19}$$

Поскольку $\psi = \hat{\psi} - \varphi$, то, применив $\frac{1}{s}$-неравенство треугольника из формул (18) и (19), получим выражение (14) при условии (15).

Сейчас снимем ограничения (15). Рассмотрим сначала случай $b = u$. Существует последовательность $\left\{[a_k,\, y_k]\right\}_{k=0}^{\infty}$ отрезков, удовлетворяющая следующим условиям: (i) $a_0 = a, y_0 = y$; (ii) $\left[a_{k+1},\, y_{k+1}\right] \subset \left(a_k,\, y_k\right)$ при $k \in \mathbb{N}_0$; (iii) $y_k - a_k = 2^{-k}(y-a)$ при $k \in \mathbb{N}$; (iv) $\psi(a_k) = \psi(y_k)$ при $k \in \mathbb{N}_0$; (v) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} y_k = b.$ Определим на $\mathbb{R}$ вспомогательные функции $\left\{\psi_k\right\}_{k=0}^{\infty}$:

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 0,\ x \in \mathbb{R}\setminus[a_0,\, y_0], \\ \psi(x),\ x \in [a_0,\, y_0]\setminus[a_1,\, y_1], \\ \psi(a_1),\ x \in [a_1,\, y_1]. \end{cases}$$

Далее для $k = 1, 2, \ldots$ полагаем, что

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 0,\ x \in \mathbb{R}\setminus[a_k,\, y_k], \\ \psi(x) - \psi(a_k),\ x \in [a_k,\, y_k]\setminus\left[a_{k+1},\, y_{k+1}\right], \\ \psi\left(a_{k+1}\right) - \psi(a_k),\ x \in \left[a_{k+1},\, y_{k+1}\right]. \end{cases}$$

Легко заметить, что $\psi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\psi_k(x),\ x \in \mathbb{R}$, причем ввиду условия (iii) каждая из функций $\left\{\psi_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет рассмотренному частному случаю (15). Следовательно,

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}} \le \sum_{k=0}^{\infty}\|\psi_k\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}} \le c_{17}(s)\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=1}^{s}(y_k-a_k)^{l}\left\|\psi^{(l)}\right\|_{\left[a_k,\, a_{k+1}\right]\cup\left[y_{k+1},\, y_k\right]}\right\}^{\frac{1}{s}} \le$$

$$\le c_{17}(s)\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\left\{\sum_{l=1}^{s}(y-a)^{l}\left\|\psi^{(l)}\right\|_{[a,\,b]\cup[u,\,y]}\right\}^{\frac{1}{s}} =$$

$$= 2c_{17}(s)\left\{\sum_{l=1}^{s}(y-a)^{l}\left\|\psi^{(l)}\right\|_{[a,\,b]\cup[u,\,y]}\right\}^{\frac{1}{s}}.$$

Таким образом, лемма 3 доказана, если $b = u$. Если же $b < u$, то в последних рассуждениях будет конечное число функций ψ_k.

Лемма 3 дает наиболее общее достаточное условие принадлежности функции пространству $\mathcal{H}^s$ и оценку (14) соответствующей $\frac{1}{s}$-нормы. В лемме 4 получим уточнение оценки (14) для $b = u$.

Определение 1. Функцию $\Delta \in C\left(\hat{\mathbb{R}}\right)$ будем называть треугольной с точками a, b, y и обозначать через $\Delta(x;\ a,\ b,\ y)$, если $\operatorname{supp}\Delta \subset [a,\, y]$, $\Delta(b) = 1$ и на отрезках $[a,\, b]$ и $[b,\, y]$ функция $\Delta(x)$ линейна.

Лемма 4. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$ *и* $-\infty < a < b < y < +\infty$. *Если функция* $\psi \in C(\hat{\mathbb{R}})$, $\operatorname{supp}\psi \subset [a, y]$, $\psi|_{[a,b]} \in W_\infty^s$ *и* $\psi|_{[b,y]} \in W_\infty^s$, *то* $\psi \in \mathcal{H}^s$ *и имеет место неравенство*

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^s} \le c_{18}(s) \sum_{l=1}^{s} \left\{ (b-a)^l \left\|\psi^{(l)}\right\|_{[a,b]} + (y-b)^l \left\|\psi^{(l)}\right\|_{[b,y]} \right\} +$$

$$+ c_{19}(s) |\psi(b)| \log_2^s \frac{y-a}{\min\{b-a,\, y-b\}}. \tag{20}$$

Доказательство. Имеем $\psi(x) - \psi(b)\Delta(x;\, a, b, y) = \psi_-(x) + \psi_+(x)$, где функции ψ_- и ψ_+ удовлетворяют условиям леммы 2 с отрезками $[a, b]$ и $[b, y]$ соответственно. Рассмотрим подробнее, например, функцию ψ_-. Очевидно, что

$$|\psi(b)| \cdot \|\Delta'(\cdot;\, a, b, y)\|_{[a,b]} = \frac{|\psi(b) - \psi(a)|}{b-a} \le \frac{1}{b-a} \int_a^b |\psi'(x)| dx \le \|\psi'\|_{[a,b]}.$$

Следовательно,

$$\|\psi'_-\|_{[a,b]} \le \|\psi'\|_{[a,b]} + |\psi(b)| \cdot \|\Delta'(\cdot;\, a, b, y)\|_{[a,b]} \le 2\|\psi'\|_{[a,b]}.$$

Аналогично получим, что

$$\|\psi'_+\|_{[b,y]} \le 2\|\psi'\|_{[b,y]}.$$

Отметим также, что в случае $s \ge 2$ для $j = 2, 3, \ldots, s$ имеем $\psi_-^{(j)}(x) = \psi^{(j)}(x)$ при $x \in (a, b)$ и $\psi_+^{(j)}(x) = \psi^{(j)}(x)$ при $x \in (b, y)$. Таким образом, используя лемму 2, получим

$$\|\psi_-\|_{\mathcal{H}^s} \le c_{17}(s) \sum_{l=1}^{s} (b-a)^l \left\|\psi^{(l)}\right\|_{[a,b]}, \tag{21}$$

$$\|\psi_+\|_{\mathcal{H}^s} \le c_{17}(s) \sum_{l=1}^{s} (y-b)^l \left\|\psi^{(l)}\right\|_{[b,y]}. \tag{22}$$

Поскольку $\psi(x) = \psi(b)\Delta(x;a,b,y) + \psi_-(x) + \psi_+(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то из соотношений (21) и (22) видно, что для доказательства выражения (20) достаточно получить неравенство

$$\|\Delta(\cdot;\, a, b, y)\|_{\mathcal{H}^s} \le c_{18}(s) \log_2^s \frac{y-a}{\min\{b-a,\, y-b\}}. \tag{23}$$

Пусть, например, $b - a \le y - b$. Если при этом $y - b \le 4(b-a)$, то формула (23) вытекает из леммы 3. В случае $y - b > 4(b-a)$ воспользуемся свойством инвариантности $\frac{1}{s}$-нормы пространства $\mathcal{H}^s$ относительно невырожденных линейных преобразований аргумента функции (см. раздел «Введение»). Перейдем к новой переменной t с помощью замены $x = b + t(b-a)$. При этом функция $\Delta(x;\, a, b, y)$ перейдет в треугольную функцию $\Delta(t;\, -1, 0, A)$, где $A = \frac{y-b}{b-a} > 4$.

Введем положительную строго убывающую функцию $\omega(q) = \frac{\log_2 A}{\log_2 q}$, $q > 1$. Имеем $\omega(2) - \omega(4) = \frac{1}{2}\log_2 A > 1$. Следовательно, существует $q_0 \in [2, 4]$ такое, что $\omega(q_0) =: m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Полагая, что $\lambda_k = \Delta(q_0^k;\, -1, 0, A)$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, замечаем, что $\lambda_k \in (0, 1)$ и имеет место равенство

$$\Delta(t;\, -1, 0, A) = \Delta(t;\, -1, 0, q_0) + \lambda_1 \Delta(t;\, 0, q_0, q_0^2) +$$

$$+ \lambda_2 \Delta(t;\, q_0, q_0^2, q_0^3) + \ldots + \lambda_{m-1} \Delta(t;\, q_0^{m-2}, q_0^{m-1}, q_0^m),\ t \in \mathbb{R}.$$

Каждая из треугольных функций в правой части этого равенства удовлетворяет рассмотренному выше условию типа $b - a \le y - b \le 4(b-a)$. Тогда, применив $\frac{1}{s}$-неравенство треугольника и лемму 3, получим

$$\left\|\Delta\left(\cdot;\,-1,\,0,\,A\right)\right\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}} \le c_{19}(s)m \le c_{19}(s)\log_2\frac{y-b}{b-a}.$$

Таким образом, неравенство (23) и лемма 4 доказаны.

Лемма 5. *Пусть* $s,\,k\in\mathbb{N}$ *и* $-\infty<a<b<y<+\infty$. *Если функция* $\psi\in C\left(\hat{\mathbb{R}}\right)$, $\operatorname{supp}\psi\subset[a,\,y]$, $\psi\big|_{[a,\,b]}\in\mathcal{P}_k$ *и* $\psi\big|_{[b,\,y]}\in\mathcal{P}_k$, *то* $\psi\in\mathcal{H}^s$ *и имеет место соотношение*

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^s}\le c_{20}(s,\,k)\|\psi\|_{[a,\,y]}\log_2^s\frac{y-a}{\min\{b-a,\,y-b\}}.$$

Доказательство. Согласно неравенству А. А. Маркова [5, p. 97] для $l=1,\,2,\,\dots,\,s$ имеют место соотношения

$$(b-a)^l\left\|\psi^{(l)}\right\|_{[a,\,b]}\le c_{21}(s,\,k)\|\psi\|_{[a,\,b]},$$

$$(y-b)^l\left\|\psi^{(l)}\right\|_{[b,\,y]}\le c_{21}(s,\,k)\|\psi\|_{[b,\,y]}.$$

Остается воспользоваться леммой 4.

Лемма, аналогичная лемме 5, получена в работе [6, лемма 1] для пространства Бесова $B^{\alpha}_{\frac{1}{\alpha}}$. Чтобы доказать результаты, представленные в публикации [6], пространство Бесова $B^{\alpha}_{\frac{1}{\alpha}}$ и лемму 1 из источника [6] можно заменить на пространство $\mathcal{H}^s$ и лемму 5 соответственно.

Ниже приводится пример 1, где используются теорема 2 и лемма 2. При этом запись $a_n\asymp b_n$, $n\in\mathbb{N}$, для положительных последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ означает, что $c_{22}a_n\le b_n\le c_{23}a_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$, где $c_{23}\ge c_{22}>0$.

Пример 1. Пусть $\alpha>0$, $\beta>0$, $g_{\alpha\beta}(x)=x^{\alpha}\left|\sin\left(\pi x^{-\beta}\right)\right|$ при $x\in(0,1]$ и $g_{\alpha\beta}(0)=0$. Тогда

$$R_n\left(g_{\alpha\beta};\,[0,1]\right)\asymp n^{-\frac{\alpha}{\beta}},\ n\in\mathbb{N},\tag{24}$$

где постоянные, скрытые символом $\asymp$, зависят лишь от α и β.

Получим сначала верхнюю оценку из выражения (24). С этой целью введем последовательность $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ функций

$$\psi_k(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\left|\sin\left(\pi x^{-\beta}\right)\right| \text{ при } x\in\left[(k+1)^{-\frac{1}{\beta}},\,k^{-\frac{1}{\beta}}\right],\\[2mm] 0 \text{ при } x\in\hat{\mathbb{R}}\setminus\left[(k+1)^{-\frac{1}{\beta}},\,k^{-\frac{1}{\beta}}\right].\end{cases}\tag{25}$$

Эти функции удовлетворяют лемме 2 при любом $s\in\mathbb{N}$. Полагаем, что $s=\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]+1$. Используя лемму 2, получим

$$\|\psi_k\|_{\mathcal{H}^s}\le c_{24}(\alpha,\,\beta)k^{-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Следовательно, согласно теоремам 1 и 2 для функции $\Lambda_n=\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_n$ получаем

$$R_n\left(\Lambda_n;\,\hat{\mathbb{R}}\right)\le\frac{c_{25}(s)}{n^s}\left(\sum_{k=1}^{n}\|\psi_k\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{s}}\right)^s\le\frac{c_{26}(\alpha,\,\beta)}{n^s}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{-\frac{\alpha}{s\beta}}\right)^s\le c_{27}(\alpha,\,\beta)n^{-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Поскольку $\left\|g_{\alpha\beta}-\Lambda_n\right\|_{[0,1]}\le n^{-\frac{\alpha}{\beta}}$, то считаем, что верхняя оценка из формулы (24) доказана.

Для доказательства нижней оценки из выражения (24) воспользуемся теоремой Валле-Пуссена [7, p. 214]. Введем последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $x_{2k-1}=k^{-\frac{1}{\beta}}$ и $x_{2k}=\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{\beta}}$ при $k\in\mathbb{N}$. Ясно, что $1=x_1>x_2>x_3>\ldots$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ обозначим $\tilde{n}=2\left(\left[\frac{n}{2}\right]+2\right)$. Функция $h(x):=g_{\alpha\beta}(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n+5}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ при $k=1,\,2,\,\dots,\,\frac{\tilde{n}}{2}$ удовлетворяет соотношениям

$$h\left(x_{2k-1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n+5}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}},\ h\left(x_{2k}\right)\geq\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n+5}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Поскольку $\tilde{n}\geq n+3$, то, используя теорему Валле-Пуссена, получим

$$R_n\left(g_{\alpha\beta};\,[0,1]\right)\geq\min\left\{\left|h\left(x_m\right)\right|:m=1,2,\ldots,\tilde{n}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n+5}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Таким образом, нижняя оценка из выражения (24) доказана.

Отметим, что исследованием наилучших равномерных рациональных приближений функции $g_{\alpha\alpha}(x)$ для $\alpha\in(0,1]$ занимался Е. А. Ровба [8]. Для $n\geq 2$ он получил оценки

$$R_n\left(g_{\alpha\alpha};\,[0,1]\right)=O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\ \text{при}\ 0<\alpha<1\ \text{и}\ R_n\left(g_{11};\,[0,1]\right)=O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Несложно заметить, что справедливо следующее обобщение примера 1.

Пример 2. Пусть $\xi=\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k,\ldots\right)$ – случайная последовательность, состоящая из 1 и –1. Используя функции (25), полагаем, что

$$g_{\alpha\beta}(x,\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\psi_k(x).$$

Тогда

$$R_n\left(g_{\alpha\beta}(\cdot,\xi);\,[0,1]\right)\asymp n^{-\frac{\alpha}{\beta}},\ n\in\mathbb{N},$$

где постоянные, скрытые символом $\asymp$, зависят лишь от α и β.

Примеры функций класса $\mathcal{H}^{s+1}$: использование интеграла типа Коши

Пусть $I=[a,b]$ – отрезок числовой оси $\mathbb{R}$, $|I|=b-a$ – длина I. Через $V=V(I)$ обозначим множество функций $f:I\to\mathbb{R}$, которые имеют ограниченное полное изменение, выраженное через $v=v(f,I)$. В дальнейшем считаем, что если $f\in V(I)$, то функция f непрерывна справа и слева в точках a и b соответственно. Если же $x_0\in(a,b)$ и является точкой разрыва функции f, то полагаем, что $f\left(x_0\right)=\dfrac{f\left(x_0-0\right)+f\left(x_0+0\right)}{2}$. Через $V^s=V^s(I)$, $s\in\mathbb{N}$, обозначим подмножество функций $f\in W_\infty^s(I)$ таких, что $f^{(s)}\in V(I)$.

Лемма 6. *Пусть* $\psi\in C\left(\hat{\mathbb{R}}\right)$, $\operatorname{supp}\psi\subset I$ *(*$I=[a,b]$*) и* $\psi|_I\in V^s$, $s\in\mathbb{N}$. *Тогда* $\psi\in\mathcal{H}^{s+1}$ *и справедливы неравенства*

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^2}\leq c|I|v\left(\psi',I\right)\ \textit{при}\ s=1,\tag{26}$$

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^{s+1}}\leq c_1(s)\sum_{l=1}^{s-1}|I|^l\left\|\psi^{(l)}\right\|_I+c_2(s)|I|^s v\left(\psi^{(s)},I\right)\ \textit{при}\ s\geq 2.\tag{27}$$

Доказательство. Используя сдвиг аргумента функции ψ, можем убедиться, что достаточно рассмотреть случай $I=[-h,h]$, где $h=\dfrac{b-a}{2}$. Полагаем также, что $2I=[-2h,2h]$. Получим сначала оценку (26). Согласно формуле (2) имеем

$$(C\psi)''(z)=\frac{2}{\pi i}\int_I\frac{\psi(t)}{(t-z)^3}dt,\ z\in\mathbb{C}\backslash I.\tag{28}$$

Применив дважды интегрирование по частям к интегралу из выражения (28), находим

$$(C\psi)''(z)=\frac{\psi'(h-0)}{\pi i(h-z)}+\frac{\psi'(-h+0)}{\pi i(h+z)}-\frac{1}{\pi i}\int_{-h}^{h}\frac{d\psi'(t)}{t-z},\ z\in\mathbb{C}\backslash I.\tag{29}$$

Из формулы (28) видно, что функция $(C\psi)''(z)$ аналитична в $\mathbb{C}\backslash I$ и бесконечность для нее является нулем не ниже третьего порядка. Далее из равенства (29) и свойств преобразований Коши – Стилтьеса и Гильберта – Стилтьеса [9, p. 231] следует, что $(C\psi)''$ принадлежит пространству Харди $H_p\left(\hat{\mathbb{C}}\backslash I\right)$ при

$\frac{1}{3} < p < 1.$ Значит, $(C\psi)''(z)$, $z \in \Pi$, принадлежит пространству Харди $H_p(\Pi)$ при $\frac{1}{3} < p < 1.$ Таким образом, для получения неравенства (26) нам необходимо доказать, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|(C\psi)''(x)\right|^{\frac{1}{2}} dx \le c_3 |I|^{\frac{1}{2}} v(\psi', I)^{\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

С этой целью оценим соответствующие вклады в интеграл (30) по $\mathbb{R}\backslash 2I$ и $2I$. Но прежде всего докажем следующие два свойства функции $\psi(x)$:

$$\left|\psi'(-h+0)\right| + \left|\psi'(h-0)\right| \le v(\psi', I), \tag{31}$$

$$\int\limits_{I} \left|\psi(x)\right| dx \le \frac{1}{2}|I|^2 v(\psi', I). \tag{32}$$

Докажем неравенство (31). Если $\psi'(-h+0)\psi'(h-0) \le 0,$ то

$$\left|\psi'(-h+0)\right| + \left|\psi'(h-0)\right| = \left|\psi'(-h+0) - \psi'(h-0)\right| \le v(\psi', I).$$

Если же $\psi'(-h+0)\psi'(h-0) > 0$, например $\psi'(-h+0) > 0$ и $\psi'(h-0) > 0$, то существует точка $x_0 \in (-h, h)$, для которой $\psi'(x_0) < 0$. В противном случае приходим к противоречию:

$$0 = \psi(h) - \psi(-h) = \int\limits_{-h}^{h} \psi'(t)\,dt > 0.$$

Следовательно,

$$\psi'(-h+0) + \psi'(h-0) < \left(\psi'(-h+0) - \psi'(x_0)\right) + \left(\psi'(h+0) - \psi'(x_0)\right) \le$$
$$\le \left|\psi'(h+0) - \psi'(x_0)\right| + \left|\psi'(x_0) - \psi'(-h+0)\right| \le v(\psi', I)$$

и неравенство (31) доказано.

Для доказательства соотношения (32) напомним, что $\psi(-h) = \psi(h) = 0.$ Поэтому, используя дважды интегрирование по частям и формулу (31), получим

$$\int\limits_{I} \left|\psi(x)\right| dx = -\int\limits_{I} x\psi'(x) \operatorname{sign}\psi(x)\,dx \le h\int\limits_{I} \left|\psi'(x)\right| dx \le$$
$$\le h^2\left(\left|\psi'(h-0)\right| + \left|\psi'(-h+0)\right|\right) - h\int\limits_{I} x\,d\left|\psi'(x)\right| \le$$
$$\le h^2 v(\psi', I) + h^2 v(\left|\psi'\right|, I) \le \frac{1}{2}|I|^2 v(\psi', I).$$

Таким образом, неравенство (32) доказано.

Применяя формулы (28) и (32), находим, что

$$\left|(C\psi)''(x)\right| \le \frac{16}{\pi} \frac{|I|^2 v(\psi', I)}{|x|^3},\ x \in \mathbb{R}\backslash 2I,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}\backslash 2I} \left|(C\psi)''(x)\right|^{\frac{1}{2}} dx \le 8|I|^{\frac{1}{2}} v(\psi', I)^{\frac{1}{2}}. \tag{33}$$

Далее для получения оценки вклада в интеграл (30) по отрезку $2I$ слагаемые из правой части равенства (29) обозначим через $u_1(z)$, $u_2(z)$ и $u_3(z)$ соответственно. Применив формулу (31), получим

$$\int\limits_{2I} \left(\left|u_1(x)\right|^{\frac{1}{2}} + \left|u_2(x)\right|^{\frac{1}{2}}\right) dx \le c_4 |I|^{\frac{1}{2}} v(\psi', I)^{\frac{1}{2}}. \tag{34}$$

Через $\left|u_3(x)\right|^*$ обозначим симметрическую относительно точки $x = 0$ не возрастающую на полуоси $(0, +\infty)$ перестановку функции $\left|u_3(x)\right|$, $x \in \mathbb{R}$. Из свойств преобразования Коши – Стилтьеса и Гильберта – Стилтьеса [9, p. 231] получаем неравенство

$$|u_3(x)|^* \le \frac{c_5 v(\psi', I)}{|x|},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Следовательно,

$$\int_{2I} |u_3(x)|^{\frac{1}{2}} dx \le 2\left(c_5 v(\psi', I)\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2h} x^{-\frac{1}{2}} dx \le c_6 |I|^{\frac{1}{2}} v(\psi', I)^{\frac{1}{2}}. \tag{35}$$

Таким образом, из формул (29), (34) и (35) находим

$$\int_{2I} \left|(C\psi)''(x)\right|^{\frac{1}{2}} dx \le c_7 |I|^{\frac{1}{2}} v(\psi', I)^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

Наконец, из соотношений (33) и (36) получаем неравенство (26).

Докажем оценку (27). Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset I$, $\varphi|_I \in \mathcal{P}_{2s-1}$, и является единственным решением интерполяционной задачи Эрмита [5, p. 118, theorem 6.1]:

$$\varphi(-h) = \varphi(h) = 0,\ \varphi^{(j)}(-h+0) = \psi^{(j)}(-h+0),\ \varphi^{(j)}(h-0) = \psi^{(j)}(h-0), \tag{37}$$

где $j = 1, 2, \dots, s-1$. Полагаем, что $\breve{\psi}(x) = \psi(x) - \varphi(x)$. Применяя леммы 1 и 2 и теорему 1, получаем

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \le c_8(s) \sum_{j=1}^{s-1} |I|^j \left\|\psi^{(j)}\right\|_I. \tag{38}$$

Отметим также нужное неравенство

$$v\left(\varphi^{(s)}, I\right) \le c_9(s) |I|^{-s} \sum_{j=1}^{s-1} |I|^j \left\|\psi^{(j)}\right\|_I, \tag{39}$$

которое вытекает из леммы 1.

Поскольку $\psi(x) = \breve{\psi}(x) + \varphi(x)$ и имеет место неравенство (38), то для доказательства соотношения (27) нам достаточно получить оценку

$$\left\|\breve{\psi}^{(s)}\right\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \le c_{10}(s) \sum_{l=1}^{s-1} |I|^l \left\|\psi^{(l)}\right\|_I + c_{11}(s) |I|^s v\left(\psi^{(s)}, I\right). \tag{40}$$

Заметим, что

$$(C\breve{\psi})^{(s+1)}(z) = \frac{(s+1)!}{\pi i} \int_I \frac{\breve{\psi}(t)}{(t-z)^{s+2}} dt,\ z \in \Pi, \tag{41}$$

и, следовательно,

$$\left|(C\psi)^{(s+1)}(x)\right| \le \frac{2^{s+2}(s+1)!}{\pi |x|^{s+2}} \int_I |\breve{\psi}(t)| dt,\ x \in \mathbb{R}\setminus 2I. \tag{42}$$

Здесь $\breve{\psi} \in V^s(I)$ и имеет на концах отрезка I нули не ниже s-го порядка. Поэтому, применяя $s+1$ раз тот же прием (интегрирование по частям), что и при доказательстве неравенства (32), получим

$$\int_I |\breve{\psi}(t)| dt \le \frac{1}{2^s} |I|^{s+1} v\left(\breve{\psi}^{(s)}, I\right). \tag{43}$$

Из соотношений (42) и (43) находим, что

$$\int_{\mathbb{R}\setminus 2I} \left|(C\breve{\psi})^{(s+1)}(x)\right|^{\frac{1}{s+1}} dx \le c_{12}(s) |I|^{\frac{s}{s+1}} v\left(\breve{\psi}^{(s)}, I\right)^{\frac{1}{s+1}}. \tag{44}$$

Сейчас получим оценку интеграла (44) по отрезку $2I$. Поскольку функция $\breve{\psi}|_I \in V^s$ и на концах отрезка I имеет нули не ниже s-го порядка, то, применяя к равенству (41) интегрирование по частям $s+1$ раз, получим

$$(C\breve{\psi})^{(s+1)}(z) = \frac{\breve{\psi}^{(s)}(h-0)}{\pi i(h-z)} + \frac{\breve{\psi}^{(s)}(-h+0)}{\pi i(h+z)} - \frac{1}{\pi i} \int_I \frac{d\breve{\psi}^{(s)}(t)}{t-z},\ z \in \Pi. \tag{45}$$

Далее, действуя аналогично, как и при доказательстве неравенства (36), находим

$$\int\limits_{2I} \left|\left(C\breve{\psi}\right)^{(s+1)}(x)\right|^{\frac{1}{s+1}} dx \le c_{13}(s)|I|^{\frac{s}{s+1}} v\left(\breve{\psi}^{(s)}, I\right)^{\frac{1}{s+1}}. \tag{46}$$

Напомним, что $\breve{\psi}(t) = \psi(t) - \varphi(t)$, $t \in I$. Поэтому с учетом выражения (39) выполняется неравенство

$$v\left(\breve{\psi}^{(s)}, I\right) \le c_{14}(s)|I|^{-s} \sum_{j=1}^{s-1} |I|^{j} \left\|\psi^{(j)}\right\|_{I} + v\left(\psi^{(s)}, I\right). \tag{47}$$

Сейчас из соотношений (38), (44), (46) и (47) следует неравенство (27).

Лемма 7 для функции $\psi \in V^s$ является аналогом леммы 3 для $\psi \in W_{\infty}^{s}$.

Лемма 7. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$ *и* $-\infty < a < b \le u < y < +\infty$. *Если* $\psi \in C\left(\hat{\mathbb{R}}\right)$, $\operatorname{supp}\psi \subset [a, y]$, $\psi|_{[a, b]} \in V^s$, $\psi|_{[u, y]} \in V^s$ *и* $\psi(x) = \mathrm{const}$ *при* $x \in [b, u]$, *то* $\psi \in \mathcal{H}^{s+1}$ *и справедливо неравенство*

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \le c_{15}(s) \sum_{j=1}^{s-1} (y-a)^{j} \left\|\psi^{(j)}\right\|_{[a, b] \cup [u, y]} + c_{16}(s)(y-a)^{s}\left(v\left(\psi^{(s)}, [a, b]\right) + v\left(\psi^{(s)}, [u, y]\right)\right).$$

Здесь сумма по j *при* $s = 1$ *заменяется нулем.*

Доказательство. Через $\lambda \in C\left(\hat{\mathbb{R}}\right)$ обозначим трапециевидную функцию такую, что $\operatorname{supp}\lambda \subset [a, y]$, $\lambda(a) = \lambda(y) = 0$, $\lambda(b) = \lambda(u) = \psi(b)$, а на отрезках $[a, b]$, $[b, u]$ и $[u, y]$ она линейна. Тогда $\bar{\psi}(x) :=$ $:= \psi(x) - \lambda(x) = \psi_{-}(x) + \psi_{+}(x)$, где ψ_{-} и ψ_{+} удовлетворяют условиям леммы 6 с отрезками $[a, b]$ и $[u, y]$ соответственно. Заметим, что $\|\lambda'\|_{[a, b]} \le \|\psi'\|_{[a, b]}$ и $\|\lambda'\|_{[u, y]} \le \|\psi'\|_{[u, y]}$. Таким образом, используя лемму 3, получим

$$\|\lambda\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \le c_{17}(s)(y-a)\|\psi'\|_{[a, b] \cup [u, y]}.$$

Согласно лемме 6 для функций ψ_{-} и ψ_{+} выполняются неравенства

$$\|\psi_{-}\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \le c_{18}(s) \sum_{j=1}^{s-1} (b-a)^{j} \left\|\psi^{(j)}\right\|_{[a, b]} + c_{19}(s)(b-a)^{s} v\left(\psi^{(s)}, [a, b]\right),$$

$$\|\psi_{+}\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \le c_{18}(s) \sum_{j=1}^{s-1} (y-u)^{j} \left\|\psi^{(j)}\right\|_{[u, y]} + c_{19}(s)(y-u)^{s} v\left(\psi^{(s)}, [u, y]\right).$$

Поскольку $\psi = \lambda + \psi_{-} + \psi_{+}$, то лемма 7 доказана.

Аппроксимация функций с монотонными производными и их четных продолжений

Среди результатов о скорости наилучших равномерных рациональных приближений функций, полученных элементарными методами, т. е. посредством конструкций аппроксимирующих рациональных дробей, основанных на рациональной функции, хорошо приближающей $\operatorname{sign} x$ на $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$, $\delta \in (0, 1)$, наиболее сложным результатом является теорема 1 из источника [10] о приближении функций с монотонными производными. В настоящем разделе, используя теорему 2 и лемму 7, получим основной результат работы [10] в усиленном виде (см. ниже теоремы 5 и 6 и ср. их с результатами из публикации [10]).

Определение 2. Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $b \in (0, +\infty)$. Через $M_s([0, b])$ обозначим множество функций $w \in C([0, b])$, удовлетворяющих следующим условиям: (i) $w(0) = 0$; (ii) $w|_{[a, b]} \in W_{\infty}^{s}$ для любого $a \in (0, b)$; (iii) для каждого $j = 1, 2, \ldots, s$ функция $g_j(x) := (-1)^{j-1} w^{(j)}(x)$ неотрицательна и не возрастает на $(0, b]$.

Лемма 8. *Пусть* $w \in M_s([0, b])$. *Тогда для* $x \in (0, b]$ *выполняются неравенства*

$$xw'(x) \le w(x), \ s \ge 1, \tag{48}$$

$$x^{j-1}\left|w^{(j)}(x)\right| \le 2^{j-1} w'\left(\frac{x}{2^{j-1}}\right), \ j = 2, 3, \ldots, s \ (s \ge 2). \tag{49}$$

Доказательство. Неравенство (48) немедленно следует из выкладки

$$w(x)=\int_0^x w'(t)\,dt \ge w'(x)\int_0^x dt = xw'(x).$$

Пусть теперь $s \ge 2$ и $2 \le j \le s$. Из свойств функций g_j и g_{j-1} находим

$$0 \le \frac{x}{2} g_j(x) \le \int_{\frac{x}{2}}^{x} g_j(t)\,dt = -\int_{\frac{x}{2}}^{x} g'_{j-1}(t)\,dt = g_{j-1}\left(\frac{x}{2}\right) - g_{j-1}(x) \le g_{j-1}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Следовательно,

$$x\left|w^{(j)}(x)\right| \le 2\left|w^{(j-1)}\left(\frac{x}{2}\right)\right| \text{ при } x \in (0, b] \text{ и } j = 2, 3, \dots, s.$$

Таким образом, неравенство (49) доказано.

Для функции $g \in C([0, b])$, $b > 0$, через g^+ обозначим ее продолжение на $\hat{\mathbb{R}}$, выполненное следующим образом: $g^+(x) = g(|x|)$ при $|x| \le b$ и $g^+(x) = g(b)$ при $|x| > b$.

Теорема 4. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, $b > 0$ и $w \in M_s([0, b])$. Тогда (i) $w^+ \in \mathcal{H}^1$ и $\left\|w^+\right\|_{\mathcal{H}^1} \le c_1 w(b)$; (ii) если дополнительно сходится интеграл $\int_0^b \sqrt[s+1]{xw'(x)}\,\frac{dx}{x} =: A_s(w)$, то $w^+ \in \mathcal{H}^{s+1}$ и $\left\|w^+\right\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \le c_1(s) A_s^{s+1}(w)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $b = 1$. Случай $b > 0$ следует отсюда с помощью замены переменной $x = bt$, $0 \le t \le 1$. Для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ введем функцию

$$\psi_k(x) = \begin{cases} w\left(2^{-k}\right) - w\left(2^{-k-1}\right) \text{ при } |x| \le 2^{-k-1}, \\ w\left(2^{-k}\right) - w(|x|) \text{ при } 2^{-k-1} < |x| \le 2^{-k}, \\ 0 \text{ при } 2^{-k} < |x| < +\infty. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$w^+(x) = w(1) - \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{50}$$

Функции удовлетворяют условиям леммы 3 при $s = 1$. Следовательно,

$$\left\|\psi_k\right\|_{\mathcal{H}^1} \le c_1 2^{-k-2} w'\left(2^{-k-1}\right),\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Используя равенство (50), получаем утверждение (i):

$$\left\|w^+\right\|_{\mathcal{H}^1} \le \sum_{k=0}^{\infty} \left\|\psi_k\right\|_{\mathcal{H}^1} \le c_1 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} w'\left(2^{-k}\right) \le c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} w'(t)\,dt \le c_1 \int_0^1 w'(t)\,dt = c_1 w(1).$$

Предположив, что $A_s(w) < \infty$, докажем утверждение (ii). Согласно лемме 7, находим

$$\left\|\psi_k\right\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \le c_2(s) \sum_{l=1}^{s} 2^{-kl} \left|w^{(l)}\left(2^{-k}\right)\right|.$$

Используя лемму 8, упростим правую часть последнего неравенства:

$$\left\|\psi_k\right\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \le c_3(s) 2^{-k} w'\left(2^{-k-s+1}\right).$$

Следовательно,

$$\left\|w^+\right\|_{\mathcal{H}^{s+1}}^{\frac{1}{s+1}} \le c_4(s) \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-k} w'\left(2^{-k-s+1}\right)\right)^{\frac{1}{s+1}} \le c_5(s) A_s(w).$$

Теорема 4 доказана.

Из теорем 2 и 4 немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$, $b > 0$ *и* $w \in M_s([0, b])$. *Тогда*

(i) $R_n(w^+; \hat{\mathbb{R}}) \le \frac{c_6}{n} w(b)$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $R_n(w^+; \hat{\mathbb{R}}) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$;

(ii) если дополнительно $A_s(w) < \infty$, *то* $R_n(w^+; \hat{\mathbb{R}}) \le \frac{c_7(s)}{n^{s+1}} A_s^{s+1}(w)$, $n \in \mathbb{N}$, *и справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(n^{s+1} R_n(w^+; \hat{\mathbb{R}})\right)^2 \le c_8(s) A_s^{2(s+1)}(w).$$

Отметим, что ранее пространства Харди – Соболева для изучения скорости наилучших рациональных приближений в круге, на окружности и на отрезке применялись в работах [7; 11; 12]. В частности, идея доказательства теоремы, подобной теореме 5 (утверждение (i)), в периодическом случае применялась в монографии [7, p. 330].

Далее докажем теорему 6, дополняющую теорему 5 в случае $A_s(w) = \infty$.

Теорема 6. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$, $b > 0$ *и* $w \in M_s([0, b])$. *Тогда*

$$R_n(w^+; \hat{\mathbb{R}}) \le \frac{c_9(s)}{n^{s+1}} \left(\int_{2^{-n} b}^{b} \sqrt[s+1]{\frac{w(x)}{\ln\left(\frac{b}{x}\right)}} \frac{dx}{x} \right)^{s+1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства теоремы 6 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9 [13, c. 422]. *Пусть* $\varphi \in L_\infty([0, 1])$, $\varphi(x) \ge 0$ *на* $[0, 1]$, $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$ *и* $p \in (0, 1)$. *Тогда*

$$\int_0^1 (x\varphi(x))^p \frac{dx}{x} \le \left(\frac{1-p}{p}\right)^p \int_0^1 \left(\frac{\Phi(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^p \frac{dx}{x}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 6. Как и при доказательстве теоремы 4, можем считать, что $b = 1$. Предполагая, что $n \ge 2s$, обозначим $m = \left[\frac{n}{2}\right]$. Используя равенство (50), получаем

$$w^+(x) = w(1) - \theta_m(x) - \eta_m(x), \tag{51}$$

где

$$\theta_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \psi_k(x), \ \eta_m(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \psi_k(x) = \begin{cases} w(2^{-m}) - w(|x|) \text{ при } |x| \le 2^{-m}, \\ 0 \text{ при } |x| > 2^{-m}. \end{cases}$$

Из теоремы 5 (утверждение (i)) получаем

$$R_m(\eta_m; \mathbb{R}) \le \frac{c_6}{m} w(2^{-m}). \tag{52}$$

Действуя аналогично, как и при доказательстве теоремы 4 (утверждение (ii)), находим, что

$$\|\theta_m\|_{\mathcal{H}^{s+1}}^{\frac{1}{s+1}} \le c_{10}(s) \int_{2^{-m-s+1}}^{1} \sqrt[s+1]{x w'(x)} \frac{dx}{x}. \tag{53}$$

Теперь воспользуемся леммой 9. В ней получаем $\varphi(x) = 0$ при $x \in [0, 2^{-m-1+s}]$ и $\varphi(x) = w'(x)$ при $x \in (2^{-m-1+s}, 1]$; $p = \frac{1}{s+1}$. Тогда

$$\int_{2^{-m-s+1}}^{1} \sqrt[s+1]{x w'(x)} \frac{dx}{x} \le \sqrt[s+1]{s} \int_{2^{-m-s+1}}^{1} \sqrt[s+1]{\frac{w(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} \frac{dx}{x}. \tag{54}$$

Далее применим теорему 5 (утверждение (ii)), а также неравенства (53) и (54). В итоге получим

$$R_m\left(\varphi_m;\,\hat{\mathbb{R}}\right)\le \frac{c_{11}(s)}{m^{s+1}}\left(\int\limits_{2^{-m-s+1}}^{1}\sqrt[s+1]{\frac{w(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\,\frac{dx}{x}\right)^{s+1}. \tag{55}$$

Заметим, что $w(x)\ge w\left(2^{-m-s+1}\right)$ при $x\in\left[2^{-m-1+s},\,1\right]$ и $w\left(2^{-m-s+1}\right)\ge 2^{-s+1}w\left(2^{-m}\right)$. Следовательно,

$$\frac{1}{m^{s+1}}\left(\int\limits_{2^{-m-s+1}}^{1}\sqrt[s+1]{\frac{w(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\,\frac{dx}{x}\right)^{s+1}\ge c_{12}(s)\,w\left(2^{-m}\right). \tag{56}$$

Поскольку $R_n\left(w^+;\,\hat{\mathbb{R}}\right)\le R_m\left(\theta_m;\,\hat{\mathbb{R}}\right)+R_m\left(\eta_m;\,\hat{\mathbb{R}}\right)$, то из соотношений (52), (55) и (56) получим

$$R_n\left(w^+;\,\hat{\mathbb{R}}\right)\le \frac{c_{13}(s)}{m^{s+1}}\left(\int\limits_{2^{-m-s+1}}^{1}\sqrt[s+1]{\frac{w(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\,\frac{dx}{x}\right)^{s+1}. \tag{57}$$

Ввиду предположения, что $n\ge 2s$, имеем $m+s-1\le n$. Поэтому из неравенства (57) следует теорема 6 для $n\ge 2s$. Чтобы доказать теорему 6 для всех $n\ge 1$, возможно, понадобится увеличить постоянную $c_9(s)$.

В теоремах 5 и 6 получены оценки наилучших равномерных рациональных приближений не только функций класса $M_s([0,\,b])$, но и их четных продолжений. Оказывается, что это не случайность, а проявление общей закономерности, сформулированной в следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть* $s\in\mathbb{N}$ *и* $b\in(0,\,+\infty]$. *Тогда для любой функции* $f\in C([0,\,b])$ *и любого* $n\in\mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$R_{2n}\left(f(|\cdot|);\,[-b,\,b]\right)\le \frac{c_{14}(s)}{n^s}\left[\sum_{k=0}^{n}\sqrt[s]{R_k\left(f;\,[0,\,b]\right)}\right]^s. \tag{58}$$

Эта теорема для отрезка $[0,\,1]$ ранее была приведена без доказательства вторым автором настоящей статьи в монографии [7, p. 341]. Для доказательства теоремы 7 понадобится следующая теорема.

Теорема 8 [1]. *Пусть* $s\in\mathbb{N}$, $\gamma>0$ *и* $b=1$ *или* $b=+\infty$. *Тогда для любой функции* $f\in C([0,\,b])$ *и* $f_\gamma(x)=f\left(x^\gamma\right)$, $x\in[0,\,b]$, *выполняется неравенство*

$$R_n\left(f_\gamma;\,[0,\,b]\right)\le \frac{c_{15}(s,\,\gamma)}{n^s}\left[\sum_{k=0}^{n}\sqrt[s]{R_k\left(f;\,[0,\,b]\right)}\right]^s.$$

Доказательство теоремы 7. Через $r_n^*\in\mathcal{R}_n$ обозначим элемент наилучшего приближения функции $f_{\frac{1}{2}}(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$, $x\in[0,\,b]$, т. е.

$$\left\|f_{\frac{1}{2}}-r_n^*\right\|_{[0,\,b]}=R_n\left(f_{\frac{1}{2}};\,[0,\,b]\right). \tag{59}$$

Из теоремы Чебышева об альтернансе (см., например, [7, p. 214]) следует, что $r_n^*\left(x^2\right)\in\mathcal{R}_{2n}$ – элемент наилучшего приближения функции $f_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)=f\left(|x|\right)$, $x\in[-b,\,b]$. Таким образом, из равенства (59) получаем

$$R_{2n}\left(f(|\cdot|);\,[-b,\,b]\right)=R_n\left(f_{\frac{1}{2}};\,[0,\,b]\right).$$

Теперь из последнего равенства и теоремы 8 следует теорема 7.

Следствие 1. *Пусть* $f \in C([0, b])$, $b \in (0, +\infty]$, *и* $\alpha \in (0, +\infty)$. *Тогда для* $n \in \mathbb{N}$ *равносильны следующие условия: (i)* $R_n(f; [0, b]) = O(n^{-\alpha})$; *(ii)* $R_n(f(|\cdot|); [-b, b]) = O(n^{-\alpha})$.

Рассмотрим примеры функций, принадлежащих классу $M_s([0, b])$. Очевидно, что функция $x^{\alpha} \in M_s([0, b])$ при всех $\alpha \in (0, 1]$ и $b > 0$. Однако наилучшие рациональные приближения функции x^{α} хорошо изучены [7; 14], и в данном случае применение теорем 5 и 6 практически ничего нового не дает. Наиболее содержательными примерами являются функции с логарифмическими особенностями, именно функции вида

$$h_{\nu\beta}(x) = \left(\ln_{(\nu)} \frac{a}{x}\right)^{-\beta},\ 0 < x \le 1;\ h_{\nu\beta}(0) = 0.$$

Здесь $\nu \in \mathbb{N}$ означает порядок итерации логарифма, т. е. $\ln_{(1)}(\cdot) = \ln(\cdot)$ и $\ln_{(\nu)}(\cdot) = \ln\left(\ln_{(\nu-1)}(\cdot)\right)$ при $\nu \ge 2$. Число $\beta > 0$, а $a > 1$ и достаточно большое, чтобы функция $\ln_{(\nu)} \frac{a}{x}$ была положительная при $x \in (0, 1]$. Именно $a > 1$ при $\nu = 1$, $a > e$ при $\nu = 2$, $a > e^e$ при $\nu = 3$ и т. д.

Следствие 2. *При указанных выше условиях на* ν, β *и* a *справедливы соотношения*

$$R_n\left(h_{1\beta}^{+}; \hat{\mathbb{R}}\right) \asymp \frac{1}{n^{1+\beta}} \text{ при } n \ge 1, \tag{60}$$

$$R_n\left(h_{\nu\beta}^{+}; \hat{\mathbb{R}}\right) \asymp \frac{1}{n\left(\ln_{(\nu-1)} n\right)^{\beta}} \text{ при } \nu \ge 2 \text{ и } n \ge n(\nu). \tag{61}$$

Изучением наилучших рациональных приближений функции $h_{\nu\beta}$ на отрезке $[0, 1]$ занимались А. А. Гончар [15], А. П. Буланов [16], А. А. Пекарский [10; 12] и другие авторы (см. [10; 12; 15]). В работах [10; 12] получены точные порядковые оценки для $R_n\left(h_{\nu\beta}; [0, 1]\right)$. Из них вытекают нижние оценки в соотношениях (60) и (61). Отметим еще публикацию [17], в которой найдена сильная асимптотика наилучших рациональных приближений функций с логарифмическими особенностями в BMOA – пространстве аналитических функций ограниченной средней осцилляции.

Для доказательства верхних оценок из соотношений (60) и (61) заметим, что $h_{\nu\beta} \in M_1([0, 1])$ при всех $\nu \in \mathbb{N}$ и $\beta > 0$. Поэтому, применяя теорему 6 при $s = 1$, получим выражение (61) для всех $\nu \ge 2$ и $\beta > 0$, а также формулу (60) в случае $\beta \in (0, 1)$. Чтобы получить соотношение (60) для $\beta \ge 1$ естественно воспользоваться теоремой 6 при $s = [\beta] + 2$. К сожалению, в этом случае включение $h_{1\beta} \in M_s([0, 1])$ может не выполняться для малых a. Однако легко заметить, что существует $b = b(\beta, a) \in (0, 1)$, удовлетворяющее условию $h_{1\beta}\big|_{[0, b]} \in M_s([0, b])$, поэтому функцию $h_{1\beta}^{+}$ представим в виде

$$h_{1\beta}^{+}(x) = g(x; b) + q(x; b) + \lambda(b),\ x \in \hat{\mathbb{R}}, \tag{62}$$

где $g(x; b) = \min\left\{h_{1\beta}^{+}(x), h_{1\beta}^{+}(b)\right\}$, $q(x; b) = h_{1\beta}(x) - g(x; b) - \lambda(b)$, $\lambda(b) = h_{1\beta}(1) - h_{1\beta}(b)$.

Для $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ полагаем, что $m = \left[\frac{n}{2}\right]$. Из равенства (62) находим

$$R_n\left(h_{1\beta}^{+}; \hat{\mathbb{R}}\right) \le R_m\left(g(\cdot; b); \hat{\mathbb{R}}\right) + R_m\left(q(\cdot; b); \hat{\mathbb{R}}\right).$$

Далее к первому слагаемому правой части последнего неравенства следует применить теорему 6, а ко второму – лемму3 и теорему 2. Тогда соотношение (60) будет доказано для $\beta \ge 1$.

Аппроксимация нечетного продолжения функций с монотонными производными

Пусть $f \in C([0, 1])$ и $f(0) = 0$. В этом случае непрерывны на отрезке $[-1, 1]$ как четное, так и нечетное продолжение функции f, т. е. $f^{+}(x) = f(|x|)$ и $f^{-}(x) = f(|x|) \cdot \operatorname{sign} x$. Очевидно, что

$$R_n\left(f^{\pm}; [-1, 1]\right) \ge R_n\left(f; [0, 1]\right),\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{63}$$

Согласно теореме 7 неравенство (63) можно обратить для функции f^{+}, если последовательность $\left\{R_n\left(f;\,[0,1]\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ имеет порядок стремления к нулю не выше степенного. Естественно возникает вопрос: «Можно ли аналогично обратить неравенство (63) для функции f^{-}?» Из полученного ниже следствия 3 видно, что обращение неравенства (63) для функции f^{-} невозможно без потери скорости стремления к нулю последовательности $\left\{R_n\left(f^{-};\,[-1,1]\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ по сравнению с последовательностью $\left\{R_n\left(f;\,[0,1]\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$. При этом потеря скорости составляет один порядок, т. е. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Используя лемму 5.4 монографии [14, p. 112], обращение неравенства (63) можно получить в следующем виде:

$$R_n\left(f^{\pm};\,[-1,1]\right)\le R_{\left[\frac{n}{8}\right]}\left(f;\,[0,1]\right)+4\omega\left(e^{-\sqrt{n}};\,f\right)+e^{-\varkappa\sqrt{n}}\,\|f\|_{[0,1]},\ n\in\mathbb{N},\tag{64}$$

где $[a]$ – целая часть числа a; $\varkappa\in\left(0,\,\dfrac{1}{2}\right]$ – абсолютная постоянная; $\omega(\cdot;\,f)$ – модуль непрерывности функции f.

Заметим, что функция $h_{\nu\beta}$ из следствия 2 является модулем непрерывности самой себя. Применив неравенство (64) к функции $h_{\nu\beta}$, легко убедимся, что для $R_n\left(h_{\nu\beta}^{+};\,[-1,1]\right)$ будем иметь весьма грубую оценку. В то же время из полученного ниже следствия 3 видно, что для $R_n\left(h_{\nu\beta}^{-};\,[-1,1]\right)$ с $\nu\ge 2$ при $n\to\infty$ будем иметь точный порядок стремления к нулю.

Для $f\in C\left([0,1]\right)$ с $f(0)=0$ А. А. Гончар [15] изучал наилучшие равномерные рациональные приближения функций с изломом, т. е. функций вида

$$f^{\perp}(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\in[-1,\,0),\\ f(x) \text{ при } x\in[0,\,1].\end{cases}$$

При дополнительном условии, что $f(x)$ возрастает на отрезке $[0,1]$, в работе [15] получена следующая нижняя оценка:

$$R_n\left(f^{\perp};\,[-1,1]\right)\ge\max_{\delta\in(0,1)} f(\delta)\left[1+\exp\left(\frac{\pi^2 n}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)}\right)\right]^{-1},\ n\in\mathbb{N}.\tag{65}$$

Для некоторых функций f в публикации [15] найдены также верхние оценки $R_n\left(f^{\perp};\,[-1,1]\right)$. Например, для функции $h_{1\beta}(x)$ из следствия 1 (см. раздел «Аппроксимация функций с монотонными производными и их четных продолжений») в работе [15] получены соотношения

$$c_1(\beta)\frac{1}{n^{\beta}}\le R_n\left(h_{1\beta}^{\perp};\,[-1,1]\right)\le c_2(\beta)\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\beta},\ n\ge 2.\tag{66}$$

Ясно, что левое неравенство в формуле (66) вытекает из выражения (65). Далее в следствии 3 покажем, что $\ln n$ в правой части соотношения (66) можно опустить.

Теорема 9. *Пусть* $s\in\mathbb{N}$ *и* $w\in M_s\left([0,1]\right)$. *Тогда*
(i)

$$R_n\left(w^{\perp};\,[-1,1]\right)\le\frac{c_3(s)}{n^{s+1}}\left(\int\limits_{2^{-n}}^{1}\sqrt[s+1]{w(x)}\,\frac{dx}{x}\right)^{s+1},\ n\in\mathbb{N};\tag{67}$$

(ii) если дополнительно сходится интеграл $\int\limits_0^1\sqrt[s+1]{w(x)}\,\dfrac{dx}{x}=:B_s(w)$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(n^{s+1}R_n\left(w^{\perp};\,[-1,1]\right)\right)^2\le c_4(s)\,B_s^{2(s+1)}(w).\tag{68}$$

Доказательство. (i) Для $k = 0, 1, \ldots, n$ построим (см. определение 1) треугольные функции $\Delta_k(x) := \Delta\left(x;\ 2^{-k-1},\ 2^{-k},\ 2^{-k+1}\right)$. Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta_k(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in \left(-\infty,\ 2^{-n-1}\right] \cup \left[2, +\infty\right), \\ 2^{n+1}x - 1 \text{ при } x \in \left(2^{-n-1},\ 2^{-n}\right], \\ 1 \text{ при } x \in \left(2^{-n}, 1\right], \\ 2 - x \text{ при } x \in (1, 2). \end{cases} \tag{69}$$

Доопределим функцию $w^{\perp}(x)$ на $\mathbb{R}$, полагая, что $w^{\perp}(x) = 0$ при $x < -1$ и $w^{\perp}(x) = w(1)$ при $x > 1$. Введем функции $\lambda_k(x) = \Delta_k(x) w^{\perp}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n$) и

$$\Lambda_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{70}$$

Из формулы (69) следует, что

$$0 \le w^{\perp}(x) - \Lambda_n(x) \le w\left(2^{-n}\right) \text{ при } x \in [-1, 1]. \tag{71}$$

Каждая функция $\lambda_k(x)$ удовлетворяет условиям леммы 7 с $a = 2^{-k-1}$, $b = u = 2^{-k}$ и $y = 2^{-k+1}$. Следовательно,

$$\left\|\lambda_k\right\|_{\mathcal{H}^{s+1}}^{\frac{1}{s+1}} \le c_6(s)\left(w\left(2^{-k}\right)\right)^{\frac{1}{s+1}}.$$

Применив к выражению (70) $\dfrac{1}{s+1}$-неравенство треугольника с учетом последнего неравенства, получим

$$\left\|\Lambda_n\right\|_{\mathcal{H}^{s+1}}^{\frac{1}{s+1}} \le c_7(s) \sum_{k=0}^{n} \left(w\left(2^{-k}\right)\right)^{\frac{1}{s+1}} \le c_8(s) \int_{2^{-n}}^{1} \left(w(x)\right)^{\frac{1}{s+1}} \frac{dx}{x}. \tag{72}$$

Из соотношений (71) и (72) и теоремы 2 следует, что

$$R_n\left(w^{\perp};\ [-1, 1]\right) \le w\left(2^{-n}\right) + \frac{c_9(s)}{n^{s+1}} \left(\int_{2^{-n}}^{1} \sqrt[s+1]{w(x)}\, \frac{dx}{x} \right)^{s+1}.$$

Для завершения доказательства теоремы 9 (утверждение (i)) остается заметить, что первое слагаемое правой части последнего неравенства «поглощается» вторым слагаемым.

(ii) В этом случае вместо формулы (70) следует использовать равенство

$$\Lambda_\infty(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in [-\infty, 0] \cup [2, +\infty], \\ w(x) \text{ при } x \in (0, 1], \\ (2 - x) w(1) \text{ при } x \in (1, 2), \end{cases} \tag{73}$$

где функции $\lambda_k(x)$ для $k \ge n + 1$ определяются аналогично, как и для $k \le n$. Действуя так же, как и при доказательстве неравенства (72), получим

$$\left\|\Lambda_\infty\right\|_{\mathcal{H}^{s+1}}^{\frac{1}{s+1}} \le c_{10}(s) B_s(w). \tag{74}$$

Из формул (73) и (74) и теоремы 2 следует соотношение (68).

Теорема 10. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$ *и* $w \in M_s([0, 1])$. *Тогда (i)* $R_n\left(w^{-};\ [-1, 1]\right) \le \dfrac{c_{11}(s)}{n^{s+1}} \left(\displaystyle\int_{2^{-n}}^{1} \sqrt[s+1]{w(x)}\, \frac{dx}{x} \right)^{s+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

(ii) если дополнительно $B_s(w) < \infty$, *то* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{s+1} R_n\left(w^{-};\ [-1, 1]\right)\right)^2 \le c_{12}(s) B_s^{2(s+1)}(w)$.

Доказательство. (i) Можем считать, что $n \ge 2$. Полагаем, что $m = \left[\dfrac{n}{2}\right]$. Поскольку $w^{-}(x) = w^{\perp}(x) - w^{\perp}(-x)$ при $x \in [-1, 1]$, то

$$R_n\left(w^-;\,[-1,\,1]\right)\le 2R_m\left(w^\perp;\,[-1,\,1]\right). \tag{75}$$

Остается воспользоваться теоремой 9 (утверждение (i)).

(ii) В этом случае следует применить формулу (75) и теорему 9 (утверждение (ii)).

Теорема 11. *Пусть функции* $s\in\mathbb{N}$ *и* $w\in M_s\left([0,\,1]\right)$ *такие, что*

$$\int_t^1 \sqrt[s+1]{\frac{w(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\,\frac{dx}{x}=o\left(\sqrt[s+1]{w(t)}\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)\ \textit{при}\ t\to+0. \tag{76}$$

Тогда при $n\ge n(s,\,w)$ *выполняется неравенство*

$$R_n\left(w^-;\,[-1,\,1]\right)\ge c_0 w\left(2^{-n}\right), \tag{77}$$

где $c_0=\left[1+\exp\left(\dfrac{2\pi^2}{\ln 2}\right)\right]^{-1}$.

Доказательство. Очевидно, что $2w^\perp(x)=w^-(x)+w^+(x)$, $x\in[-1,\,1]$. Следовательно, для $n\in\mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$2R_{2n}\left(w^\perp;\,[-1,\,1]\right)\le R_n\left(w^-;\,[-1,\,1]\right)+R_n\left(w^+;\,[-1,\,1]\right),$$

$$R_n\left(w^-;\,[-1,\,1]\right)\ge 2R_{2n}\left(w^\perp;\,[-1,\,1]\right)-R_n\left(w^+;\,[-1,\,1]\right). \tag{78}$$

Для нижней оценки $R_{2n}\left(w^\perp;\,[-1,\,1]\right)$ воспользуемся неравенством (65) с $2n$ вместо n и с $\delta=2^{-n}$, а для верхней оценки $R_n\left(w^+;\,[-1,\,1]\right)$ – теоремой 6. В итоге из соотношения (78) получим

$$R_n\left(w^-;\,[-1,\,1]\right)\ge 2c_0 w\left(2^{-n}\right)-\frac{c_{13}(s)}{n^{s+1}}\left(\int_{2^{-n}}^1 \sqrt[s+1]{\frac{w(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\,\frac{dx}{x}\right)^{s+1}.$$

Неравенство (77) доказано.

Из теорем 9–11 и неравенства (65) для функций $h_{\nu\beta}(x)$ (см. раздел «Аппроксимация функций с монотонными производными и их четных продолжений») получаем следствие 3 (ср. со следствием 2).

Следствие 3. *При указанных в разделе «Аппроксимация функций с монотонными производными и их четных продолжений» условиях на параметры* ν, β, *а для функций* $h_{\nu\beta}$ *выполняются эквивалентности*

$$R_n\left(h_{1\beta}^-;\,[-1,\,1]\right)\asymp\frac{1}{n^\beta}\ \textit{при}\ n\ge 1,$$

$$R_n\left(h_{\nu\beta}^-;\,[-1,\,1]\right)\asymp\frac{1}{\left(\ln_{(\nu-1)}n\right)^\beta}\ \textit{при}\ \nu\ge 2\ \textit{и}\ n\ge n(\nu).$$

Такие же эквивалентности справедливы и для $R_n\left(h_{\nu\beta}^\perp;\,[-1,\,1]\right)$.

Заключение

Для исследования скорости наилучших равномерных приближений функций в настоящей работе применяется действительное пространство Харди – Соболева на прямой. Рассмотрены примеры функций и скорости их наилучших равномерных рациональных приближений. Изучены скорости наилучших приближений функций с монотонными производными, также приближения их четного и нечетного продолжений. Улучшены оценки наилучших рациональных приближений таких функций, полученные ранее с помощью конструкции аппроксимирующих дробей, хорошо приближающих функцию $\operatorname{sign}x$ на отрезке $[-1,\,-\delta]\cup[\delta,\,1]$, $\delta\in(0,\,1)$. Оценки наилучшего рационального приближения даны как с учетом модуля непрерывности, так и без него. Найдены также оценки наилучших рациональных приближений функций с изломом. В частности, полученные результаты улучшают оценки А. А. Гончара для рациональных приближений функций с изломом и с логарифмическими особенностями.

Библиографические ссылки

1. Пекарский АА. Равномерные рациональные приближения и пространства Харди – Соболева. *Математические заметки.* 1994;56(4):132–140.

2. Garnett JB. *Bounded analytic function.* 1st edition, revised. New York: Springer; 2007. XIV, 463 p. (Graduate texts in mathematics; volume 236). DOI: 10.1007/0-387-49763-3.

3. Coifman RR, Weiss G. Extension of Hardy spaces and their use in analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1977;83(4):569–645.

4. Кротов ВГ. Дифференциальные свойства граничных функций из пространств Харди. *Mathematische Nachrichten.* 1986; 126(1):241–253.

5. DeVore RA, Lorentz GG. *Constructive approximation.* Berlin: Springer; 1993. 462 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 303).

6. Пекарский АА. Скорость рациональной аппроксимации и дифференциальные свойства функций. *Analysis Mathematica.* 1991;17(2):153–171. DOI: 10.1007/BF01906601.

7. Lorentz GG, Golitschek MV, Makovoz Y. *Constructive approximation. Advanced problem.* Berlin: Springer; 1996. 660 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 304).

8. Ровба ЕА. Приближение аналитических функций со счетным числом особенностей на вещественной оси рациональными функциями. *Вестник Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина. Серия 1. Математика. Механика. Физика.* 1976;2:52–54.

9. King FW. *Hilbert transform. Volume 1.* Cambridge: Cambridge University Press; 2009. 896 p.

10. Пекарский АА. Рациональные приближения выпуклых функций. *Математические заметки.* 1985;38(5):679–690.

11. Пекарский АА. Классы аналитических функций, определяемые наилучшими рациональными приближениями в H^p. *Математический сборник.* 1985;127(1):3–20.

12. Пекарский АА. Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке. *Математический сборник.* 1987;133(1):86–102.

13. Харди Г, Литтлвуд Дж, Полиа Г. *Неравенства.* Левин ВИ, переводчик. Москва: Государственное издательство иностранной литературы; 1948. 456 с.

14. Petrushev PP, Popov VA. *Rational approximation of real functions.* Cambridge: Cambridge University Press; 1987. 384 p.

15. Гончар АА. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями. *Математический сборник.* 1967;73(4):630–638.

16. Буланов АП. Приближение выпуклых функций с заданным модулем непрерывности рациональными функциями. *Математический сборник.* 1978;105(1):3–27.

17. Pushnitski A, Yafaev D. Best rational approximation of functions with logarithmic singularities. *Constructive approximation.* 2017;46(2):243–269. DOI: 10.1007/s00365-016-9347-1.

References

1. Pekarskii AA. Uniform rational approximations and Hardy – Sobolev spaces. *Matematicheskie zametki.* 1994;56(4):132–140. Russian.

2. Garnett JB. *Bounded analytic function.* 1st edition, revised. New York: Springer; 2007. XIV, 463 p. (Graduate texts in mathematics; volume 236). DOI: 10.1007/0-387-49763-3.

3. Coifman RR, Weiss G. Extension of Hardy spaces and their use in analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1977;83(4):569–645.

4. Krotov VG. Differential properties of boundary functions of Hardy spaces. *Mathematische Nachrichten.* 1986;126(1):241–253. Russian.

5. DeVore RA, Lorentz GG. *Constructive approximation.* Berlin: Springer; 1993. 462 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 303).

6. Pekarskii AA. The rate of rational approximation and differentiability properties of functions. *Analysis Mathematica.* 1991; 17(2):153–171. Russian. DOI: 10.1007/BF01906601.

7. Lorentz GG, Golitschek MV, Makovoz Y. *Constructive approximation. Advanced problem.* Berlin: Springer; 1996. 660 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 304).

8. Rovba EA. [Approximation, by rational functions, of analytic functions with a countable number of singularities on the real axis]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta imeni V. I. Lenina. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. Fizika.* 1976;2:52–54. Russian.

9. King FW. *Hilbert transform. Volume 1.* Cambridge: Cambridge University Press; 2009. 896 p.

10. Pekarskii AA. Rational approximations of convex functions. *Matematicheskie zametki.* 1985;38(5):679–690. Russian.

11. Pekarskii AA. Classes of analytic functions determined by best rational approximations in H^p. *Matematicheskii sbornik.* 1985; 127(1):3–20. Russian.

12. Pekarskii AA. Tchebycheff rational approximation in the disk, on the circle, and on a closed interval. *Matematicheskii sbornik.* 1987;133(1):86–102. Russian.

13. Hardy G, Littlewood J, Polya G. *Neravenstva* [Inequalities]. Levin VI, translator. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo inostrannoi literatury; 1948. 456 p. Russian.

14. Petrushev PP, Popov VA. *Rational approximation of real functions.* Cambridge: Cambridge University Press; 1987. 384 p.

15. Gonchar AA. On the rapidity of rational approximation of continuous functions with characteristic singularities. *Matematicheskii sbornik.* 1967;73(4):630–638. Russian.

16. Bulanov AP. Approximation, by rational functions, of convex functions with given modulus of continuity. *Matematicheskii sbornik.* 1978;105(1):3–27. Russian.

17. Pushnitski A, Yafaev D. Best rational approximation of functions with logarithmic singularities. *Constructive approximation.* 2017;46(2):243–269. DOI: 10.1007/s00365-016-9347-1.

Получена 09.04.2022 / исправлена 30.09.2022 / принята 30.09.2022.
Received 09.04.2022 / revised 30.09.2022 / accepted 30.09.2022.