Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Real, complex and functional analysis

УДК 517.968.7

ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С РЕКУРРЕНТНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

А. П. ШИЛИН[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

На замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости, рассмотрено новое гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение, которое относится к линейным уравнениям с переменными коэффициентами специального вида. Характерной особенностью является наличие в коэффициентах постоянных множителей, заданных некоторыми рекуррентными соотношениями. Уравнение сведено вначале к решению краевой задачи Римана на исходной кривой. Установлен класс функций для решения задачи Римана, после чего эта задача решается. Далее следует решать два линейных дифференциальных уравнения произвольного порядка для аналитических функций в двух разных областях комплексной плоскости. Найдены соответствующие фундаментальные системы решений, после чего использован метод вариации произвольных постоянных. На полученные решения дифференциальных уравнений накладываются ограничения, чтобы добиться их аналитичности. Все возникающие условия разрешимости исходного уравнения записаны явно. При их выполнении решение исходного уравнения также может быть записано явно. Решен пример.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; гиперсингулярный интеграл; краевая задача Римана; линейное дифференциальное уравнение; аналитическая функция.

Образец цитирования:
Шилин АП. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с рекуррентными соотношениями в коэффициентах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:6–15.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-6-15

For citation:
Shilin AP. Hypersingular integro-differential equation with recurrent relations in coefficients. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;3:6–15. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-6-15

Автор:
Андрей Петрович Шилин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета.

Author:
Andrei P. Shilin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics and mathematical physics, faculty of physics.
a.p.shilin@gmail.com

HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH RECURRENT RELATIONS IN COEFFICIENTS

A. P. SHILIN[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

A new hypersingular integro-differential equation is considered on a closed curve located on the complex plane. The equation refers to linear equations with variable coefficients of a special kind. A characteristic feature is the presence of constant multipliers in the coefficients, given by some recurrent relations. The equation is first reduced to solving the Riemann boundary value problem on the original curve. A class of functions is established for solving the Riemann problem, after which this problem is solved. Next, it is necessary to solve two linear differential equations of arbitrary order for analytical functions in two different regions of the complex plane. The corresponding fundamental systems of solutions are found, after which the method of variation of arbitrary constants is used for the solution. Restrictions are imposed on the obtained solutions of differential equations in order to achieve their analyticity. As a result, all the resulting solvability conditions of the original equation are written explicitly. The solution of the original equation after solving the differential equations can be written explicitly. Solved the example.

Keywords: integro-differential equation; hypersingular integral; Riemann boundary problem; linear differential equation; analytic function.

Введение

В последнее время возрастает интерес к гиперсингулярным интегралам, понимаемым в смысле конечной части по Адамару, поскольку найдены их важные приложения к таким разделам физических и технических наук, как аэро- и электродинамика, атомная и ядерная физика, вопросы трещиноустойчивости и др. Обзор важнейших результатов по интегральным уравнениям с такими интегралами содержится в работе [1]. В статье [2] дано точное аналитическое решение линейного гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Аналогичные уравнения более сложного вида решены затем в публикациях [3–5] и др. К этим же работам относится настоящая статья, где найдено решение нового уравнения.

Постановка задачи и общая схема решения

Пусть L – простая замкнутая гладкая положительно ориентированная кривая на расширенной комплексной плоскости, D_+ и D_- – области расширенной комплексной плоскости с границей L, $0 \in D_+$, $\infty \in D_-$. Зададим H-непрерывные (т. е. удовлетворяющие условию Гёльдера) функции $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $f(t)$, $t \in L$. Зададим также комплексные числа $a_0 = b_0 = 1, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через α_{jm}, $j = \overline{0, n}$, $m = \overline{0, j}$, целые числа, определяемые рекуррентными соотношениями

$$\alpha_{jj} = (-1)^j, \ j = \overline{0, n}; \ \alpha_{j0} = 0, \ j = \overline{1, n};$$

$$\alpha_{jm} = (1 - j - m)\alpha_{j-1,m} - \alpha_{j-1,m-1}, \ j = \overline{2, n} \ (\text{при } n \geq 2), \ m = \overline{1, j-1}.$$

Будем искать n раз H-непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{s=2k}^{n+k} \alpha_{s-k,k} t^s \Bigg(\big(a(t)a_{n+k-s} + b(t)b_{n+k-s}\big)\varphi^{(k)}(t) + \\ + \frac{\big(a(t)a_{n+k-s} - b(t)b_{n+k-s}\big)k!}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} \Bigg) = f(t), \ t \in L, \tag{1}$$

с интегралами, понимаемыми в смысле конечной части по Адамару.

Введем интеграл типа Коши

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z}, \ z \in D_{\pm},$$

и применим далее схему решений интегро-дифференциальных уравнений, указанную в работе [6]. Согласно этой схеме следует вначале исследовать краевую задачу Римана

$$F_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)}F_-(t) + \frac{f(t)}{2a(t)},\ t \in L, \tag{2}$$

для аналитических функций

$$F_-(z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=2k}^{n+k} \alpha_{s-k,\ k} b_{n+k-s} z^s \Phi_-^{(k)}(z),\ \ z \in D_-, \tag{3}$$

$$F_+(z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=2k}^{n+k} \alpha_{s-k,\ k} a_{n+k-s} z^s \Phi_+^{(k)}(z),\ \ z \in D_+, \tag{4}$$

с H-непрерывными предельными значениями $F_\pm(t)$, $t \in L$. Если задача Римана не имеет решений, то и уравнение (1) не имеет решений. Если же задача Римана окажется разрешимой, а ее решение будет найдено, то соотношения (3), (4) следует расценивать затем как линейные дифференциальные уравнения для нахождения аналитических функций $\Phi_\pm(z)$, $\Phi_-(\infty) = 0$. Если и функции $\Phi_\pm(z)$ будут найдены, то решение исходного уравнения (1) записывается по формуле Сохоцкого:

$$\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t),\ t \in L. \tag{5}$$

Решение задачи Римана

Лемма 1. *Если функция $F_-(z)$ представляется в виде соотношения (3), где $\Phi_-(\infty) = 0$, то она ограничена на бесконечности.*

Доказательство. Перегруппируем в формуле (3) слагаемые:

$$F_-(z) = \sum_{j=0}^{n} b_{n-j}\Big(\alpha_{j0} z^j \Phi_-(z) + \alpha_{j1} z^{j+1}\Phi'_-(z) + \alpha_{j2} z^{j+2}\Phi''_-(z) + \\ + \ldots + \alpha_{j,\ j-1} z^{2j-1}\Phi_-^{(j-1)}(z) + \alpha_{jj} z^{2j}\Phi_-^{(j)}(z)\Big). \tag{6}$$

Возьмем разложение функции $\Phi_-(z)$ в ряд Тейлора в окрестности бесконечности:

$$\Phi_-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k},\ c_k \in \mathbb{C}.$$

Подставим в равенство (6) это разложение, а также разложения для производных $\Phi_-(z)$, полученные почленным дифференцированием. При этом слагаемые в сумме из равенства (6), получающиеся при $j = 0$, $j = 1$, станут равными соответственно

$$b_n\alpha_{00}\Phi_-(z) = \frac{b_n c_1}{z} + \frac{b_n c_2}{z^2} + \ldots,$$

$$b_{n-1}\Big(\alpha_{10} z\Phi_-(z) + \alpha_{11} z^2\Phi'_-(z)\Big) = b_{n-1}c_1 + \frac{2b_{n-1}c_2}{z} + \ldots$$

и, следовательно, будут ограничены на бесконечности. При $j \geq 2$ некоторые слагаемые в сумме из равенства (6) окажутся с полюсами на бесконечности. Покажем, что при суммировании произойдет «погашение» полюсов. Для этого запишем лишь те слагаемые в правой части равенства (6), которые окажутся с полюсами:

$$\sum_{j=2}^{n} b_{n-j} \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk} c_k z^{j-k},$$

где $A_{jk} = (-k)\alpha_{j1} + (-k)(-k-1)\alpha_{j2} + (-k)(-k-1)(-k-2)\alpha_{j3} + \ldots + (-k)(-k-1)(-k-2)\cdots(-k-j+1)\alpha_{jj}$.

Обоснуем методом математической индукции по j, что все числа $A_{jk} = 0$. Для $j = 2$ будет всего одно число, равное $A_{21} = (-1)\alpha_{21} + (-1)(-2)\alpha_{22} = (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot(-2)\cdot 1 = 0.$ Пусть для некоторого $j \geq 2$ $A_{jk} = 0$ при всех $k = \overline{1,\ j-1}$. Теперь для всех $k = \overline{1,\ j}$ вычислим числа

$$A_{j+1,k}=(-k)\alpha_{j+1,1}+(-k)(-k-1)\alpha_{j+1,2}+(-k)(-k-1)(-k-2)\alpha_{j+1,3}+$$
$$+\ldots+(-k)(-k-1)(-k-2)\cdots(-k-j)\alpha_{j+1,j+1}=(-k)\big[-(j+1)\alpha_{j1}\big]+$$
$$+(-k)(-k-1)\big[-(j+2)\alpha_{j2}-\alpha_{j1}\big]+(-k)(-k-1)(-k-2)\big[-(j+3)\alpha_{j3}-\alpha_{j2}\big]+$$
$$+\ldots+(-k)(-k-1)(-k-2)\cdots(-k-j)\big[-\alpha_{jj}\big]=\big[(-k)(-(j+1))-(-k)(-k-1)\big]\alpha_{j1}+$$
$$+\big[(-k)(-k-1)(-(j+2))-(-k)(-k-1)(-k-2)\big]\alpha_{j2}+$$
$$+\big[(-k)(-k-1)(-k-2)(-(j+3))-(-k)(-k-1)(-k-2)(-k-3)\big]\alpha_{j3}+\ldots+$$
$$+\big[(-k)(-k-1)\cdots(-k-j+1)(-2j)-(-k)(-k-1)\cdots(-k-j+1)(-k-j)\big]\alpha_{jj}=$$
$$=(k-j)\big[(-k)\,\alpha_{j1}+(-k)(-k-1)\alpha_{j2}+(-k)(-k-1)(-k-2)\alpha_{j3}+\ldots+$$
$$+(-k)(-k-1)\cdots(-k-j+1)\,\alpha_{jj}\big]=(k-j)A_{jk}.$$

Для $k=j$ полученные числа обратятся в ноль за счет множителя $k-j$, а для $k=\overline{1,\ j-1}$ – за счет индуктивного предположения. Лемма доказана.

Теперь понятно, что решение задачи Римана (2) следует находить в классе функций, ограниченных на бесконечности. Согласно монографии [7] такое решение зависит от индекса $\alpha=\operatorname{Ind}_L\dfrac{b(t)}{a(t)}$ и имеет вид

$$F_{\pm}(z)=X_{\pm}(z)\big(\Psi_{\pm}(z)+P(z)\big),\ z\in D_{\pm},$$

где $X_{\pm}(z)$ – канонические функции задачи (их явный вид здесь не приводим); $\Psi_{\pm}(z)=\dfrac{1}{4\pi i}\displaystyle\int_L\dfrac{f(\tau)d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)(\tau-z)}$; $P(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\alpha}d_kz^k$ – многочлен степени α с произвольными комплексными коэффициентами d_k при $\alpha\ge 0$, $P(z)\equiv 0$ при $\alpha<0$. При $\alpha\ge -1$ задача (2) разрешима безусловно, а при $\alpha<-1$ для ее решения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_L\frac{f(\tau)\tau^k d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)}=0,\ k=\overline{0,\ -\alpha-2}. \tag{7}$$

Решение дифференциальных уравнений

Пусть задача (2) разрешима, а ее решение найдено. Переходим к решению уравнения (3).

Лемма 2. *Если λ_1 – корень уравнения*

$$\sum_{j=0}^{n}b_{n-j}\lambda^j=0, \tag{8}$$

то функция $e^{\frac{\lambda_1}{z}}$ удовлетворяет однородному уравнению (3).

Доказательство. Вычисление производных функции $e^{\frac{\lambda_1}{z}}$ приводит к формулам

$$\left(e^{\frac{\lambda_1}{z}}\right)^{(k)}=e^{\frac{\lambda_1}{z}}\sum_{s=0}^{k}\frac{\alpha_{ks}\lambda_1^s}{z^{k+s}},\ k=\overline{0,\ n}.$$

Подставим выражения для этих производных в правую часть уравнения (3). Тогда после перегруппировки слагаемых правой части можно придать вид

$$e^{\frac{\lambda_1}{z}}\sum_{j=0}^{n}b_{n-j}B_j,$$

где

$$B_j = \sum_{m=0}^{j} \left(\alpha_{jm}\alpha_{mm} + \alpha_{j,\, m+1}\alpha_{m+1,\, m} + \alpha_{j,\, m+2}\alpha_{m+2,\, m} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \alpha_{j,\, j-1}\alpha_{j-1,\, m} + \alpha_{jj}\,\alpha_{jm}\right) z^{j-m}\lambda_1^m,\ j = \overline{0,\, n}. \tag{9}$$

При $m = j$ слагаемое в сумме из (9) будет иметь вид $\alpha_{jj}\alpha_{jj}\lambda^j = \lambda^j$. Обоснуем методом математической индукции по j, что остальные слагаемые в сумме из (9) обратятся в ноль за счет сумм в (9), находящихся в скобках. При $j = 0$ «остальных» слагаемых нет. При $j = 1$ для $m = 0$ $\alpha_{10}\alpha_{00} + \alpha_{11}\alpha_{10} = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0.$ Пусть для некоторого $j \geq 1$ при всех $m = 0, 1, \ldots, j - 1$

$$\alpha_{jm}\alpha_{mm} + \alpha_{j,\, m+1}\alpha_{m+1,\, m} + \alpha_{j,\, m+2}\alpha_{m+2,\, m} + \ldots + \alpha_{j,\, j-1}\alpha_{j-1,\, m} + \alpha_{jj}\,\alpha_{jm} = 0.$$

Докажем, что тогда для всех $m = 0, 1, \ldots, j$

$$\alpha_{j+1,\, m}\alpha_{mm} + \alpha_{j+1,\, m+1}\alpha_{m+1,\, m} + \alpha_{j+1,\, m+2}\alpha_{m+2,\, m} + \ldots + \alpha_{j+1,\, j}\,\alpha_{jm} + \alpha_{j+1,\, j+1}\alpha_{j+1,\, m} = 0. \tag{10}$$

Для $m = 0$ последнее равенство справедливо, так как $\alpha_{j+1,\, 0} = \alpha_{10} = \alpha_{20} = \ldots = \alpha_{j0} = 0$. Для $m = 1, 2, \ldots, j$ сумма в левой части (10) получается равной

$$\left(-(j+m)\alpha_{jm} - \alpha_{j,\, m-1}\right)\alpha_{mm} + \left(-(j+m+1)\alpha_{j,\, m+1} - \alpha_{jm}\right)\alpha_{m+1,\, m} +$$
$$+ \left(-(j+m+2)\alpha_{j,\, m+2} - \alpha_{j,\, m+1}\right)\alpha_{m+2,\, m} + \ldots + \left(-2j\alpha_{jj} - \alpha_{j,\, j-1}\right)\alpha_{jm} - \alpha_{jj}\alpha_{j+1,\, m} =$$
$$= \left[-(j+m)\alpha_{jm}\alpha_{mm} - (j+m+1)\alpha_{j,\, m+1}\alpha_{m+1,\, m} - (j+m+2)\alpha_{j,\, m+2}\alpha_{m+2,\, m} - \ldots - 2j\alpha_{jj}\alpha_{jm}\right] +$$
$$+ \left[-\alpha_{j,\, m-1}\left(-\alpha_{m-1,\, m-1}\right) - \alpha_{jm}\left(-2m\alpha_{mm} - \alpha_{m,\, m-1}\right) - \alpha_{j,\, m+1}\left(-(2m+1)\alpha_{m+1,\, m} - \alpha_{m+1,\, m-1}\right) - \ldots - \right.$$
$$\left. - \alpha_{j,\, j-1}\left(-(j+m-1)\alpha_{j-1,\, m} - \alpha_{j-1,\, m-1}\right) - \alpha_{jj}\left(-(j+m)\alpha_{jm} - \alpha_{j,\, m-1}\right)\right] =$$
$$= \left[-(j+m)\alpha_{jm}\alpha_{mm} - (j+m+1)\alpha_{j,\, m+1}\alpha_{m+1,\, m} - (j+m+2)\alpha_{j,\, m+2}\alpha_{m+2,\, m} - \ldots - 2j\alpha_{jj}\alpha_{jm}\right] +$$
$$+ \left[2m\alpha_{jm}\alpha_{mm} + (2m+1)\alpha_{j,\, m+1}\alpha_{m+1,\, m} + \ldots + (j+m-1)\alpha_{j,\, j-1}\alpha_{j-1,\, m} + (j+m)\alpha_{jj}\alpha_{jm}\right] +$$
$$+ \left[\alpha_{j,\, m-1}\alpha_{m-1,\, m-1} + \alpha_{jm}\alpha_{m,\, m-1} + \alpha_{j,\, m+1}\alpha_{m+1,\, m-1} + \ldots + \alpha_{j,\, j-1}\alpha_{j-1,\, m-1} + \alpha_{jj}\alpha_{j,\, m-1}\right].$$

Сумма в последних квадратных скобках равна нулю по индуктивному предположению. В первых и вторых квадратных скобках приводим подобные члены:

$$(m-j)\left[\alpha_{jm}\alpha_{mm} + \alpha_{j,\, m+1}\alpha_{m+1,\, m} + \ldots + \alpha_{j,\, j-1}\alpha_{j-1,\, m} + \alpha_{jj}\alpha_{jm}\right] = 0$$

– снова по индуктивному предположению.

Таким образом, подстановка $\Phi_-(z) = e^{\frac{\lambda_1}{z}}$ в правую часть однородного уравнения (3) приводит после сокращения на $e^{\frac{\lambda_1}{z}}$ к верному равенству $0 = \sum\limits_{j=0}^{n} b_{n-j}\lambda_1^j$, что и доказывает лемму.

Будем считать в дальнейшем для простоты, что все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения (8) являются однократными. В этом случае функции $e^{\frac{\lambda_1}{z}}, e^{\frac{\lambda_2}{z}}, \ldots, e^{\frac{\lambda_n}{z}}$ составляют фундаментальную систему решений однородного уравнения (3). Через W обозначим определитель Вронского функций $e^{\frac{\lambda_j}{z}}$, а через V – определитель Вандермонда чисел $\lambda_j,\ j = \overline{1,\, n}$.

Лемма 3. *Справедлива формула*

$$W = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{z}} V}{z^{n(n-1)}}. \tag{11}$$

Доказательство. Имеем

$$W=\begin{vmatrix} e^{\frac{\lambda_1}{z}}\sum\limits_{s=0}^{0}\dfrac{\alpha_{0s}\lambda_1^s}{z^{0+s}} & \dots & e^{\frac{\lambda_n}{z}}\sum\limits_{s=0}^{0}\dfrac{\alpha_{0s}\lambda_n^s}{z^{0+s}} \\ e^{\frac{\lambda_1}{z}}\sum\limits_{s=0}^{1}\dfrac{\alpha_{1s}\lambda_1^s}{z^{1+s}} & \dots & e^{\frac{\lambda_n}{z}}\sum\limits_{s=0}^{1}\dfrac{\alpha_{1s}\lambda_n^s}{z^{1+s}} \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{\frac{\lambda_1}{z}}\sum\limits_{s=0}^{n-1}\dfrac{\alpha_{n-1,s}\lambda_1^s}{z^{n-1+s}} & \dots & e^{\frac{\lambda_n}{z}}\sum\limits_{s=0}^{n-1}\dfrac{\alpha_{n-1,s}\lambda_n^s}{z^{n-1+s}} \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя общие экспоненциальные множители элементов каждого столбца и знак «минус» в четных строках. Оставшийся определитель представим в виде надлежащей суммы таких определителей, элементами которых будут отдельные слагаемые элементов исходного определителя. Из этих определителей ненулевым будет лишь определитель из всех последних слагаемых, остальные определители обратятся в ноль из-за пропорциональности каких-либо строк. В результате получится

$$W=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}{z}}\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dfrac{\lambda_1}{z^2} & \dots & \dfrac{\lambda_n}{z^2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\lambda_1^{n-1}}{z^{2n-2}} & \dots & \dfrac{\lambda_n^{n-1}}{z^{2n-2}} \end{vmatrix}.$$

К формуле (11) придем, если теперь вынесем из каждой j-й строки за знак последнего определителя множитель $\dfrac{1}{z^{2j-2}}$, $j=\overline{1,n}$. Лемма доказана.

Аналогично формуле (11) будет получаться

$$W_j=\frac{(-1)^{\frac{(n+2)(n+3)}{2}}e^{\frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_{j-1}+\lambda_{j+1}+\ldots+\lambda_n}{z}}V_j}{z^{(n-1)(n-2)}},\quad j=\overline{1,n}, \tag{12}$$

где W_j – определитель Вронского функций $e^{\frac{\lambda_1}{z}},\ \ldots,\ e^{\frac{\lambda_{j-1}}{z}},\ e^{\frac{\lambda_{j+1}}{z}},\ \ldots,\ e^{\frac{\lambda_n}{z}}$; V_j – определитель Вандермонда чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n$. (При $n = 1$ полагаем, что $W_1 = 1$.)

Для решения уравнения (3) применим метод вариации произвольных постоянных. Согласно этому методу решение может быть записано в виде

$$\Phi_-(z)=\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{C}_j^-(z)+C_j^-\right)e^{\frac{\lambda_j}{z}}, \tag{13}$$

где $\tilde{C}_j^-(z)$ – первообразные в D_- функций $\dfrac{(-1)^jF_-(z)W_j}{z^{2n}W}$, C_j^- – произвольные комплексные постоянные, $j=\overline{1,n}$. Из формул (11), (12) заключаем, что $\dfrac{(-1)^jF_-(z)W_j}{z^{2n}W}=O\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$, $z\to\infty$, поэтому упомянутые первообразные существуют. После несложных упрощений формуле (13) удобно придать вид

$$\Phi_-(z)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(-1)^n}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\lambda_k-\lambda_j\right)}\int\limits_{\infty}^{z}\frac{F_-(\zeta)e^{-\frac{\lambda_j}{\zeta}}d\zeta}{\zeta^2}+C_j^-\right)e^{\frac{\lambda_j}{z}} \tag{14}$$

(при $n = 1$ произведение $\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\lambda_k - \lambda_j\right)$ заменяется на 1). Интегралы вида $\int\limits_{\infty}^{z}$ выделяют те первообразные, которые на бесконечности обращаются в ноль. Благодаря этому легко добиться выполнения условия $\Phi_-(\infty) = 0$: произвол постоянных C_j^- в формуле (14) должен быть ограничен требованием

$$\sum_{j=1}^{n} C_j^- = 0. \tag{15}$$

Переходим к решению уравнения (4). Предположим, что уравнение

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\mu^j = 0, \tag{16}$$

как и аналогичное уравнение (8), имеет однократные корни $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Пусть $\tilde{C}_j^+(z)$ – первообразные в D_+ функций $\dfrac{(-1)^n F_+(z)e^{-\frac{\mu_j}{z}}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\mu_k - \mu_j\right)z^2}$, C_j^+ – произвольные комплексные числа, $j = \overline{1, n}$. Формула решения уравнения (4)

$$\Phi_+(z) = \sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{C}_j^+(z) + C_j^+\right)e^{\frac{\mu_j}{z}} \tag{17}$$

аналогична формуле (14) решения уравнения (3), однако эта формула не даст аналитическую в D_+ функцию. Во-первых, могут не существовать упомянутые первообразные. Для их существования (в области $D_+ \setminus \{0\}$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{F_+(z)e^{-\frac{\mu_j}{z}}}{z^2} = 0,\ j = \overline{1, n}. \tag{18}$$

Если эти условия выполнены, то можно взять

$$\tilde{C}_j^+(z) = \frac{(-1)^n}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\mu_k - \mu_j\right)}\int\limits_{z_0}^{z}\frac{F_+(\zeta)e^{-\frac{\mu_j}{\zeta}}d\zeta}{\zeta^2} + K_j,\ j = \overline{1, n},$$

где $z_0 \in D_+$, $z_0 \neq 0$; K_j – некоторые комплексные постоянные, а интегрирование ведется по любой кривой в D_+, не проходящей через точку $z = 0$. Отметим, что при $\alpha \geq 0$ выполнение условий (18) будет означать совместность линейной алгебраической системы

$$\sum_{k=0}^{\alpha}\gamma_{jk}d_k = \delta_j,\ j = \overline{1, n}, \tag{19}$$

где для всех указанных j, k

$$\gamma_{jk} = \operatorname*{res}_{z=0}\left(X_+(z)z^{k-2}e^{-\frac{\mu_j}{z}}\right),\ \delta_j = -\operatorname*{res}_{z=0}\frac{X_+(z)\Psi_+(z)e^{-\frac{\mu_j}{z}}}{z^2}.$$

Во-вторых, постоянные C_j^+ в формуле (17) не могут оставаться произвольными, иначе сумма $\sum\limits_{j=1}^{n} C_j^+ e^{\frac{\mu_j}{z}}$, выражающая в этой формуле общее решение однородного уравнения (4), будет иметь в нуле существенно особую точку. Из-за линейной независимости функций $e^{\frac{\mu_j}{z}}$ избежать существенно особой точки можно, лишь взяв в указанной сумме все постоянные C_j^+ равными нулю.

Теперь остается приемлемым для дальнейших рассуждений только частное решение

$$\Phi_+(z) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(-1)^n}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\mu_k-\mu_j\right)}\int_{z_0}^{z}\frac{F_+(\zeta)e^{-\frac{\mu_j}{\zeta}}d\zeta}{\zeta^2}+K_j\right)e^{\frac{\mu_j}{z}}, \tag{20}$$

но и в нем еще подбором констант K_j надо устранить возможную существенно особую точку в нуле. Для этого записываем соответствующее лорановское разложение и приравниваем к нулю коэффициенты при отрицательных степенях z. В результате приходим к бесконечной линейной алгебраической системе

$$\sum_{j=1}^{n}\mu_j^m K_j = q_m,\ m=1,2,3,\ldots, \tag{21}$$

где для всех m, j

$$q_m = -\frac{m!}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}M_j\int_{\Gamma}\frac{e^{\frac{\mu_j}{t}}dt}{t^{1-m}}\int_{z_0}^{t}\frac{F_+(\zeta)e^{-\frac{\mu_j}{\zeta}}d\zeta}{\zeta^2},\ M_j=\frac{(-1)^n}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\mu_k-\mu_j\right)}.$$

Здесь Γ – окружность с центром в нуле достаточно малого радиуса.

Матрица системы (21) имеет характер бесконечной матрицы Вандермонда попарно различных чисел. Ранг такой матрицы равен n, поэтому при $\alpha \le -1$ решение системы (21) может быть разве что единственным. При $\alpha \ge 0$ системе (21) можно придать вид

$$\sum_{j=1}^{n}\mu_j^m K_j + \sum_{k=0}^{\alpha}p_{mk}d_k = r_m,\ m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где

$$p_{mk} = \frac{m!}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}M_j\int_{\Gamma}\frac{e^{\frac{\mu_j}{t}}dt}{t^{1-m}}\int_{z_0}^{t}X_+(\zeta)\zeta^{k-2}e^{-\frac{\mu_j}{\zeta}}d\zeta,$$

$$r_m = -\frac{m!}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}M_j\int_{\Gamma}\frac{e^{\frac{\mu_j}{t}}dt}{t^{1-m}}\int_{z_0}^{t}\frac{X_+(\zeta)\Psi_+(\zeta)e^{-\frac{\mu_j}{\zeta}}d\zeta}{\zeta^2},$$

и тогда также за счет части постоянных d_k, оставшихся после решения системы (19) произвольными, можно добиваться разрешимости системы (21).

Основной результат. Пример

Теперь в отношении исходного уравнения можно сформулировать окончательный результат.

Теорема. *Если выполняются условия (7) при* $\alpha < -1$, *корни уравнений (8), (16) однократны, справедливы равенства (18) и система (21) совместна, то решения уравнения (1) существуют и все они записываются по формуле (5), где* $\Phi_+(t)$, $\Phi_-(t)$ *получаются из формул (14), (20). При этом в формуле (14) постоянные* C_j^- *связаны равенством (15), а в остальном произвольны; постоянные* K_j *в формуле (20) являются общим решением системы (21).*

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$t^4(t+1)\varphi''(t)+\left(2t^4+5t^3+7t^2\right)\varphi'(t)+2(t+6)\varphi(t)+$$
$$+\frac{2t^4(t-1)}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3}+\frac{2t^4+t^3-7t^2}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+\frac{2(t-6)}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=$$
$$=12t^5+12t^4+4t^3-2e^{\frac{1}{t^2}},\ |t|=1. \tag{22}$$

В таком виде можно записать на единичной окружности уравнение (1), если $n = 2$, $a(t) = t$, $b(t) = 1$, $b_1 = -7$, $b_2 = 12$, $a_1 = -3$, $a_2 = 2$, $f(t) = 12t^5 + 12t^4 + 4t^3 - 2e^{\frac{1}{t^2}}$.

Задача Римана (2) приобретает вид

$$F_+(t) = \frac{1}{t}F_-(t) + 6t^4 + 6t^3 + 2t^2 - \frac{e^{\frac{1}{t^2}}}{t},\ |t| = 1.$$

Получается, что $\alpha = \operatorname{Ind}_{|t|=1}\frac{1}{t} = -1$, условий разрешимости нет, единственное решение в классе ограниченных на бесконечности функций имеет вид

$$F_+(z) = 6z^4 + 6z^3 + 2z^2,\ F_-(z) = e^{\frac{1}{z^2}}.$$

Теперь следует решать дифференциальные уравнения

$$z^4\Phi''_-(z) + \left(2z^3 + 7z^2\right)\Phi'_-(z) + 12\Phi_-(z) = e^{\frac{1}{z^2}},\ |z| > 1, \tag{23}$$

$$z^4\Phi''_+(z) + \left(2z^3 + 3z^2\right)\Phi'_+(z) + 2\Phi_+(z) = 6z^4 + 6z^3 + 2z^2,\ |z| < 1. \tag{24}$$

Для уравнения (23) соответствующее уравнение (8) имеет вид $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$, откуда $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, поэтому фундаментальную систему решений однородного уравнения составят функции $e^{\frac{3}{z}}$, $e^{\frac{4}{z}}$. Решение уравнения (23) методом вариации произвольных постоянных с учетом условия (15) приводит к формуле с единственной произвольной постоянной C

$$\Phi_-(z) = \left(\int\limits_{\infty}^{z}\frac{e^{\frac{1}{\zeta^2} - \frac{3}{\zeta}}d\zeta}{\zeta^2} + C\right)e^{\frac{3}{z}} - \left(\int\limits_{\infty}^{z}\frac{e^{\frac{1}{\zeta^2} - \frac{4}{\zeta}}d\zeta}{\zeta^2} + C\right)e^{\frac{4}{z}}.$$

Для уравнения (24) соответствующее уравнение (16) имеет вид $\mu^2 - 3\mu + 2 = 0$, откуда $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$. Фундаментальную систему решений однородного уравнения составят функции $e^{\frac{1}{z}}$, $e^{\frac{2}{z}}$. Решение уравнения (24) методом вариации произвольных постоянных приводит к формуле

$$\Phi_+(z) = \left(\tilde{C}_1^+(z) + C_1^+\right)e^{\frac{1}{z}} - \left(\tilde{C}_2^+(z) + C_2^+\right)e^{\frac{2}{z}}, \tag{25}$$

где $\tilde{C}_1^+(z)$, $\tilde{C}_2^+(z)$ – какие-либо первообразные функций соответственно $\left(6z^2 + 6z + 2\right)e^{-\frac{1}{z}}$, $\left(6z^2 + 6z + 2\right)e^{-\frac{2}{z}}$ в области $0 < |z| < 1$. Поскольку

$$\operatorname*{res}_{z=0}\left(6z^2 + 6z + 2\right)e^{-\frac{1}{z}} = \operatorname*{res}_{z=0}\left(6z^2 + 6z + 2\right)e^{-\frac{2}{z}} = 0,$$

то такие первообразные существуют, и последующие вычисления дают в качестве этих первообразных, например, функции соответственно $2z^2(z + 1)e^{-\frac{1}{z}}$, $z^2(2z + 1)e^{-\frac{2}{z}}$. Тогда формула (25) при $C_1^+ = C_2^+ = 0$ приведет к аналитической в области $|z| < 1$ функции $\Phi_+(z) = z^2$. Поскольку такая функция при $\alpha = -1$ может быть единственной, записывать и анализировать условия вида (21) не требуется. Окончательно согласно формуле (5) получим следующее решение уравнения (22):

$$\varphi(t) = t^2 - \left(\int\limits_{\infty}^{t}\frac{e^{\frac{1}{\zeta^2} - \frac{3}{\zeta}}d\zeta}{\zeta^2} + C\right)e^{\frac{3}{t}} + \left(\int\limits_{\infty}^{t}\frac{e^{\frac{1}{\zeta^2} - \frac{4}{\zeta}}d\zeta}{\zeta^2} + C\right)e^{\frac{4}{t}},$$

где $|t| = 1$; $\forall C \in \mathbb{C}$; интегралы берутся по любым кривым в области $|z| > 1$.

Заключение

Проведен полный конструктивный анализ исходного уравнения (1). Решен в явном виде пример, показывающий наличие случаев, когда выполняются все условия существования решения. Заметим еще, что возможность решить однородные уравнения 2-го порядка вида (23), (24) отмечена в справочнике [8, с. 443, пример 2.352].

Библиографические ссылки

1. Бойков ИВ. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений. *Динамические системы.* 2019;9(3):244–272.
2. Зверович ЭИ. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* 2010;54(6):5–8.
3. Зверович ЭИ, Шилин АП. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук.* 2018; 54(4):404–407. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407.
4. Шилин АП. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлерова типа. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук.* 2020;56(1):17–29. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29.
5. Шилин АП. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с определителями типа вронскианов. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук.* 2021;57(3):296–310. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-3-296-310.
6. Шилин АП. Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;3:48–56. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-48-56.
7. Гахов ФД. *Краевые задачи.* 3-е издание. Москва: Наука; 1977. 640 с.
8. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* 6-е издание. Фомин СВ, переводчик. Санкт-Петербург: Лань; 2003. 576 с.

References

1. Boykov IV. Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations. *Dinamicheskie sistemy*. 2019;9(3): 244–272. Russian.
2. Zverovich EI. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2010;54(6):5–8. Russian.
3. Zverovich EI, Shilin AP. Integro-differential equations with singular and hypersingular integrals. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2018;54(4):404–407. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407.
4. Shilin AP. A hypersingular integro-differential equation of the Euler type. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2020;56(1):17–29. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29.
5. Shilin AP. A solution of the hypersingular integro-differential equation with determinants of the Vronsky type. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2021;57(3):296–310. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-3-296-310.
6. Shilin AP. Hypersingular integro-differential equations with power factors in coefficients. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;3:48–56. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-48-56.
7. Gakhov FD. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. 3rd edition. Moscow: Nauka; 1977. 640 p. Russian.
8. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook on ordinary differential equations]. 6th edition. Fomin SV, translator. Saint Petersburg: Lan'; 2003. 576 p. Russian.

Получена 01.06.2022 / исправлена 30.09.2022 / принята 30.09.2022.
Received 01.06.2022 / revised 30.09.2022 / accepted 30.09.2022.