

Белорусский государственный университет

**УТВЕРЖДАЮ**  
Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям  
 О.Г. Прохоренко  
«01» декабря 2022 г.  
Регистрационный № УД – 11285/уч.

**Теория вероятностей и математическая статистика**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

**1-31 03 01 Математика (по направлениям)**

Направление специальности:

**1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность)**

2022 г.

Учебная программа составлена на основе<sup>1</sup> ОСВО 1-31 03 01-2021, учебного плана № G31-1-018/уч. от 25.05.2021 по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям), направление специальности 1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность).

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Сергей Павлович Сташулёнок** – доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**Алина Геннадьевна Гутор** – старшая преподавательница кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**Пыжкова Ольга Николаевна**, заведующая кафедрой высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 5 от 25.11.2022);

Научно-методическим Советом БГУ (протокол № 2 от 29.11.2022)

Заведующий кафедрой



А.В. Лебедев

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### Цели и задачи учебной дисциплины

**Цель** учебной дисциплины – подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований.

#### Задачи учебной дисциплины:

1. Ознакомление студентов с основными принципами теории вероятностей и математической статистики и примерами их применений.

2. Дальнейшее формирование у студентов навыков абстрактного математического мышления и умения применять его в конкретных задачах, повышение их математической культуры.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Статистика» компонента учреждения высшего образования.

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» базируется на знаниях полученных при изучении следующих дисциплин: «Алгебра и теория чисел», «Дискретная математика и теория графов», «Аналитическая геометрия», «Математический анализ».

### Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» должно обеспечить формирование следующей **специализированной компетенции:**

СК-4. Анализировать основные закономерности случайных явлений, разрабатывать вероятностно-статистические модели для прикладных задач.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

#### знать:

- основные понятия теории вероятностей;
- основные математические модели случайных явлений;

#### уметь:

- использовать основные закономерности случайных явлений;
- применять методы теории вероятностей и математической статистики в других науках;

#### владеть:

- основными методами теории вероятностей.

### **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 4 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 102 часа, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### Раздел 1. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

**Тема 1.1.** *Введение.* Предмет теории вероятностей. Исторические сведения. Роль теории вероятностей в естествознании.

**Тема 1.2.** *Терминология теории вероятностей.* Предмет и задачи теории вероятностей. События, операции над событиями.

**Тема 1.3.** *Аксиоматика Колмогорова.* Свойства вероятности.

**Тема 1.4.** *Примеры вероятностных пространств.* Классическое, конечное, дискретное вероятностные пространства. Геометрическое вероятностное пространство, парадокс Бертрана. Статистическая вероятность и устойчивость частот.

### Раздел 2. НЕЗАВИСИМОСТЬ.

**Тема 2.1.** *Условные вероятности.* Определение условной вероятности. Теоремы умножения. Формула полной вероятности и формулы Байеса.

**Тема 2.2.** *Независимость событий.* Определение независимости двух событий и независимости в совокупности нескольких событий. Независимость классов событий.

**Тема 2.3.** *Независимые испытания.* Схема Бернулли.

**Тема 2.4.** *Предельные теоремы.* Локальные и интегральные предельные теоремы Муавра — Лапласа и Пуассона и их приложения. (в ознакомительном порядке)

### Раздел 3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

**Тема 3.1.** *Случайные величины и их распределения.*

**Тема 3.2.** *Классификация случайных величин.* Теорема Лебега. Распределения: биномиальное, геометрическое, пуассоновское, равномерное, нормальное, показательное, Коши и др. Функция и плотность распределения.

**Тема 3.3.** *Многомерные случайные величины.* Свойства многомерной функции распределения. Классификация многомерных случайных величин.

**Тема 3.4.** *Независимость случайных величин.* Критерии независимости.

### Раздел 4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

**Тема 4.1.** *Математическое ожидание и его свойства* Свойство мультипликативности математических ожиданий.

**Тема 4.2.** *Моменты случайных величин.* Дисперсия и ее свойства.

### Раздел 5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ.

**Тема 5.1.** Понятие о законе больших чисел и центральной предельной теореме (в обзорном порядке).

## **Раздел 6. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.**

**Тема 6.1.** *Предмет и задачи математической статистики.*

**Тема 6.2.** *Основные понятия выборочной теории:* выборка, вариационный ряд, гистограмма, полигон частот, эмпирическая функция распределения.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСП	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	<b>4 семестр</b>							
<b>1.</b>	<b>ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА</b>	<b>12</b>	<b>8</b>				<b>2</b>	
1.1.	Введение. Предмет теории вероятностей. Исторические сведения. Роль теории вероятностей в естествознании.	2						
1.2.	Терминология теории вероятностей. Предмет и задачи теории вероятностей. События, операции над событиями.	2						
1.3.	Аксиоматика Колмогорова. Свойства вероятности.	4						
1.4.	Примеры вероятностных пространств. Классическое, конечное, дискретное вероятностные пространства. Геометрическое вероятностное пространство, парадокс Бертрана. Статистическая	4	8				2	Отчёт с устной защитой

	вероятность и устойчивость частот.							
<b>2.</b>	<b>НЕЗАВИСИМОСТЬ</b>	<b>6</b>	<b>4</b>					
2.1.	Условные вероятности. Определение условной вероятности. Теоремы умножения. Формула полной вероятности и формулы Байеса.	2	1					Опрос
2.2.	Независимость событий. Определение независимости двух событий и независимости в совокупности нескольких событий. Независимость классов событий.	2	1					Опрос
2.3.	Независимые испытания. Схема Бернулли	2	1					
2.4.	Предельные теоремы. Локальные и интегральные предельные теоремы Муавра — Лапласа и Пуассона и их приложения.		1					Отчёт с устной защитой
<b>3.</b>	<b>СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ</b>	<b>8</b>	<b>6</b>					
3.1.	Случайные величины и их распределения.	2	2					
3.2.	Классификация случайных величин. Теорема Лебега. Распределения: биномиальное, геометрическое, пуассоновское, равномерное, нормальное, показательное, Коши и др. Функция и плотность распределения.	2	1					Опрос
3.3.	Многомерные случайные величины. Свойства многомерной функции распределения. Классификация многомерных случайных величин	2	1					Опрос

3.4.	Независимость случайных величин. Критерии независимости.	2	2					Отчёт с устной защитой
<b>4.</b>	<b>ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН</b>	<b>4</b>	<b>8</b>				<b>2</b>	
4.1.	Математическое ожидание и его свойства. Свойство мультипликативности математических ожиданий.	2	4					
4.2.	Моменты случайных величин. Дисперсия и ее свойства.	2	4				2	Контрольная работа
<b>5.</b>	<b>ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ</b>	<b>2</b>						
5.1.	Понятие о законе больших чисел и центральной предельной теореме	2						
<b>6.</b>	<b>ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					
6.1	Предмет и задачи математической статистики	1						
6.2.	Основные понятия выборочной теории: выборка, вариационный ряд, гистограмма, полигон частот, эмпирическая функция распределения	1	4					Опрос
	<b>ВСЕГО</b>	<b>34</b>	<b>30</b>				<b>4</b>	

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Лазакович Н.В., Сташулёнок С.П., Яблонский О.Л. Теория вероятностей : учебник. – 3-е изд., с изменен.. – Минск : БГУ, 2013: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/93935>
2. Севастьянов, Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям "Математика" и "Механика" / Б. А. Севастьянов. - Изд. стер. - Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2020. - 255 с.
3. **Теория вероятностей** : практикум : учеб. пособие для студ вузов по мат. спец. : в 2 ч. Ч. 1 / [авт.: Н. В. Лазакович, Е. М. Радыно, С. П. Сташулёнок, С. Л. Штин, О.Л. Яблонский] ; под ред. Н. В. Лазаковича. - Минск : БГУ, 2011. - 147 с.: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/38806>.
4. **Теория вероятностей** : практикум : учеб. пособие для студ вузов по мат. спец. : в 2 ч. Ч. 2 / [авт.: Н. В. Лазакович, Е. М. Радыно, С. П. Сташулёнок, А. Г. Яблонская, О.Л. Яблонский] ; под ред. Н. В. Лазаковича. - Минск : БГУ, 2014. - 175 с.: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/113437>.
5. Матальцкий, М. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. уво по физико-математическим спец. / М. А. Матальцкий, Г. А. Хацкевич. - Минск : Вышэйшая школа, 2017. - 591 с.

### Перечень дополнительной литературы

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. URSS, 2022.
2. Жданович В.Ф., Лазакович Н.В. Радыно Н.Я. Задания к лабораторным работам по курсу теории вероятностей и математической статистики в двух частях. Ч.1. Минск, 1998.
3. Жданович В.Ф., Лазакович Н.В. Радыно Н.Я., Сташулёнок С.П. Задания к лабораторным работам по курсу теории вероятностей и математической статистики в двух частях. Ч.2. Минск, 1999.
4. Лазакович Н.В., Сташулёнок С.П., Яблонский О.Л. Курс теории вероятностей: электронное учебное пособие. – Минск : Электронная книга БГУ, 2003: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/10291>.
5. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. URSS, 2021.
6. Белько, И. В. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по экон. спец. / И. В. Белько, И. М. Морозова, Е. А. Криштапович. - Минск : Новое знание, 2016 ; Москва : ИНФРА-М. - 298 с.

7. Высшая математика. Практикум : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по естественнонаучным и экономическим специальностям : в 2 ч. / [авт.: О. М. Матейко и др.] ; под ред. С. А. Самаля. - Минск : РИВШ, 2020-. - ISBN 978-985-586 403-403-  
Ч. 2 : . - 2022. - 359 с.
8. Трушков, А. С. Статистическая обработка информации. Основы теории и компьютерный практикум + CD : учебное пособие / А. С. Трушков. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 152 с. — ISBN 978-5-8114-4322-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/126947>.
9. Коршунов, Д. А. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей : учебное пособие для вузов / Д. А. Коршунов, С. Г. Фосс, И. М. Эйсымонт. — 3-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 220 с. — ISBN 978-5-8114-8328-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/187568>.

#### **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Контроль работы студента проходит в форме опроса, контрольной работы в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой. Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» учебным планом предусмотрен зачет.

#### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

##### *Тема 1.4. Примеры вероятностных пространств. (2 ч)*

Студент изучает классическое, конечное, дискретное вероятностные пространства. Геометрическое вероятностное пространство, парадокс Бертрана.

**Форма контроля** – опрос.

##### *Тема 4.2. Моменты случайных величин. Дисперсия и ее свойства.*

(2 ч)

Студент изучает понятия моментов случайных величин, дисперсии, формулы для вычисления.

**Форма контроля** – контрольная работа.

## **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса *используется метод группового обучения*, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим занятиям;
- научно-исследовательские работы;
- анализ статистических и фактических материалов по заданной теме, проведение расчетов, составление схем и моделей на основе статистических материалов;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

### **Примерный перечень вопросов к зачету**

1. Пространство элементарных событий. Случайные события, действия над ними. Алгебры и сигма-алгебры событий.
2. Размещения, перестановки, сочетания. Их количество. Классическое определение вероятности.
3. Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство. Свойства вероятности. Конечное и классическое вероятностные пространства. Дискретное вероятностное пространство.
4. Геометрическое вероятностное пространство. Задача о встрече. Парадокс Бертрана.
5. Условные вероятности. Теоремы умножения.
6. Формулы полной вероятности и Байеса.
7. Независимость событий. Пример Бернштейна.

8. Схема независимых испытаний Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра – Лапласа (без доказательства).
9. Случайная величина. Функция распределения случайной величины. Свойства.
10. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения. Плотность случайной величины. Функции от случайных величин.
11. Многомерные случайные величины (случайные векторы). Дискретное многомерное распределение и распределение с плотностью.
12. Независимость случайных величин.
13. Математическое ожидание случайной величины. Определение. Свойства.
14. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин.
15. Формулы для подсчета математических ожиданий.
16. Дисперсия. Свойства дисперсии.
17. Коэффициент корреляции. Его свойства. Моменты случайных величин.
18. Понятие о центральной предельной теореме и законах больших чисел.
19. Предмет и задачи математической статистики. Основные понятия выборочной теории: статистическая модель, выборка, выборка из распределения, гистограмма, полигон частот. Примеры статистических моделей.
20. Эмпирическая функция распределения, её свойства. Теорема Гливенко (без доказательства). Примеры вычисления эмпирической функции распределения.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Функциональный анализ	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 5 от 25.11.2022)
Дифференциальные уравнения	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 5 от 25.11.2022)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО  
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_