

Математическое моделирование распространения коронавирусной инфекции с применением дробно-дифференциальных операторов

Т. А. Ефимова^a, И. А. Тимощенко^{a,b}, М.А. Глецевич^a, Н. Г. Абрашина-Жадаева^a

^a Белорусский Государственный Университет, Минск, Беларусь

^b НИУ «Институт ядерных проблем» БГУ, Минск, Беларусь

E-mail: efimovataya77@gmail.com

Введение. Новый коронавирус (SARS-CoV-2), или COVID-19 – одна из самых серьезных эпидемиологических проблем, с которыми сталкивалось современное человечество. Внезапное появление болезни и ее невероятно быстрое распространение привели к коллапсу многих мировых систем: от здравоохранения до экономики. Разработка математических моделей распространения и поведения вируса направлена на то, чтобы предотвратить подобные ситуации в будущем.

В данной работе мы предлагаем модифицированную дробно-дифференциальную модель распространения COVID-19, основанную на модели [1]:

$$\begin{aligned}D_t^{\alpha_1} s(t) &= \beta_i s i - \beta_e s e, \\D_t^{\alpha_2} e(t) &= \beta_i s i + \beta_e s e - \sigma e - \varphi_e e, \\D_t^{\alpha_3} i(t) &= \sigma e - \varphi_d i - \varphi_r i, \\D_t^{\alpha_4} r(t) &= \varphi_r i + \varphi_e e, \\D_t^{\alpha_5} d(t) &= \varphi_d i,\end{aligned}\tag{1}$$

где $s(t)$ – число здоровых людей, восприимчивых к болезни, $e(t)$ – число заразившихся людей, у которых заболевание находится в инкубационном периоде, $i(t)$ – число заболевших людей, $r(t)$ – число переболевших людей, более не восприимчивых к заболеванию, $d(t)$ – число умерших людей. Данные функции нормированы на все население страны. Далее σ – величина, обратная инкубационному периоду болезни, φ_r – коэффициент выздоровления, φ_e – коэффициент бессимптомного выздоровления, φ_d – коэффициент смертности среди заболевших, β_e – коэффициент бессимптомных контактов, β_i – коэффициент контактов с симптомами. В предложенной модели был использован оператор дробной производной по времени в смысле Герасимова-Капуто:

$$D_t^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1.\tag{2}$$

Статистические данные [2] дают информацию только о новых выявленных случаях заражения и числе смертей от болезни, поэтому параметры модели могут быть определены только из аппроксимации зависимостей $\sigma e(t)$ и $d(t)$. Численное решение рассматриваемой модели основано на дробной модификации численных методов Адамса-Бэшфорта-Молтона [3]. При верификации алгоритма порядок дробной производной варьировался от 0 до 1.

В качестве исследуемых стран были выбраны Великобритания и Канада, так как там достаточно рано началась эпидемия и велась подробная отчетность о происходящем. В Канаде вспышка коронавирусной инфекции началась стремительно. 18 марта чрезвычайное положение было объявлено во всех регионах страны. Однако в Великобритании вспышка носила еще более агрессивный характер: уже 13 марта общее количество выявленных случаев заражения достигло 800 человек. Эти факты подтверждают полученные нами результаты: контактная скорость заражения очень

высока как для больных с выраженными симптомами, так и для бессимптомных переносчиков.

Таблица 1. Рассчитанные значения параметров модели для Канады и Великобритании.

Параметр	Канада	Великобритания
β_e , дней ⁻¹	4.88	5.03
β_i , дней ⁻¹	7.01	4.54
φ_r , дней ⁻¹	1.99	1.55
φ_d , дней ⁻¹	0.74	1.98
φ_e , дней ⁻¹	4.76	4.76
σ , дней ⁻¹	1\14	1\14

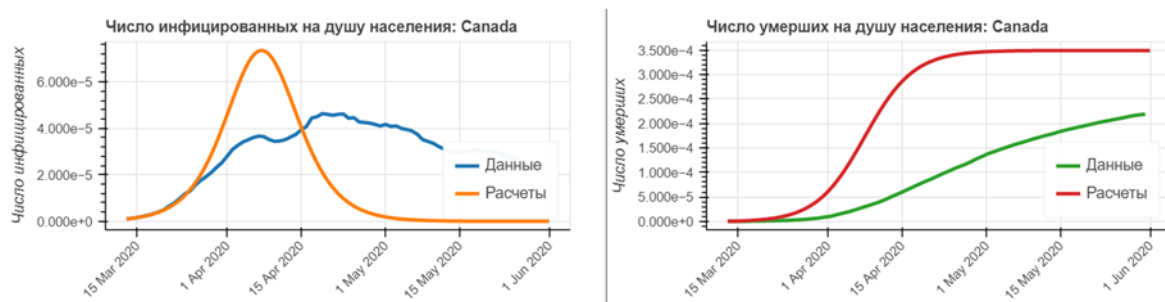


Рис. 1. Сравнение официальных данных для новых случаев заражения в день и умерших людей в Канаде с рассчитанными в предложенной модели с порядком производной 1.

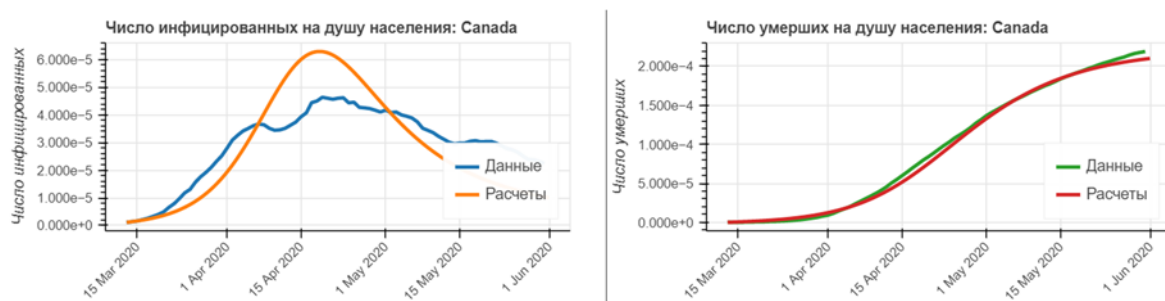


Рис. 2. Сравнение официальных данных для новых случаев заражения в день и умерших людей в Канаде с рассчитанными в предложенной модели с порядком производной 0.7.

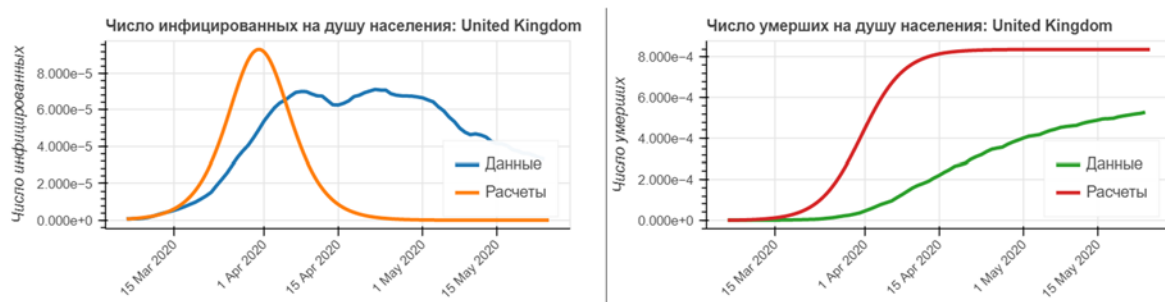


Рис. 3. Сравнение официальных данных для новых случаев заражения в день и умерших людей в Великобритании с рассчитанными в предложенной модели с порядком производной 1.

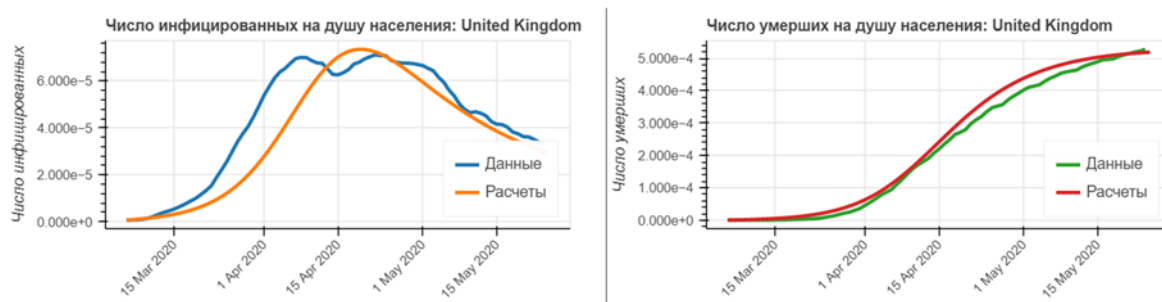


Рис. 4. Сравнение официальных данных для новых случаев заражения в день и умерших людей в Великобритании с рассчитанными в предложенной модели с порядком производной 0.7.

Из сравнительного анализа (рисунки 1–4) можно сделать вывод, что математическая модель описывает число смертей гораздо лучше, чем число новых случаев заражения. Это связано с объективными причинами, поскольку не каждый человек тестируется на наличие инфекции, а точное количество бессимптомных случаев в принципе невозможно получить, и наоборот, данные о случаях смерти от COVID-19 являются гораздо более объективными и надежными.

Заключение. На основании полученных результатов можно утверждать, что использование дробно-дифференциальных операторов абсолютно оправдано. Благодаря уменьшению порядка дробных производных можно добиться большей точности прогнозирования без необходимости введения большого количества параметров [4], затрудняющих подсчеты и общую оценку ситуации.

Литература.

1. Efimova T., Timoshchenko I., Abrashina-Zhadaeva N. / Fractional differential model of the spread of COVID-19 // Journal of Belarusian State University. Physics. No. 3. 2021. P. 40-48
2. Published online at Our World in Data.org. URL: <https://ourworldindata.org/explorers/coronavirus-data-explorer> (access date 19.04.2022)
3. Li C., Tao C. / On the fractional Adams Method // Computers & Mathematics with Application. 2009. Vol. 58. Issue 8. P. 1573-1588
4. Mellone A., Gong Z., Scarciotti G. / Modelling, prediction and design of COVID-19 lockdowns by stringency and duration // Sci Rep 11, 15708(2021)