

Учреждение образования  
«Международный государственный экологический институт  
имени А.Д. Сахарова» Белорусского  
государственного университета

УТВЕРЖДАЮ  
Заместитель директора по учебной  
и воспитательной работе  
МГЭИ им. А. Д. Сахарова БГУ  
И. Э. Бученков  
«31» августа 2018 г.  
Регистрационный № УД-416-18 /уч.

**МОДУЛЬ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА-1»  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

**1-31 04 05 Медицинская физика**

2018 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО № 1-31 04 05-18 и учебного плана учреждения высшего образования № 107-18/уч. специальности 1-31 04 05 – Медицинская физика

**СОСТАВИТЕЛЬ:**

Н. Н. Бородич, старший преподаватель кафедры общей и медицинской физики учреждения образования «Международный государственный экологический институт им. А. Д. Сахарова» Белорусского государственного университета

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

Л. А. Хвошинская, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет», кандидат физико-математических наук, доцент;

Н. Б. Борковский, доцент кафедры экологических информационных систем учреждения образования «Международный государственный экологический институт им. А. Д. Сахарова» Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой общей и медицинской физики учреждения образования «Международный государственный экологический институт им. А. Д. Сахарова» Белорусского государственного университета (протокол № 2 от 06.09. 2018);

Научно-методическим советом учреждения образования «Международный государственный экологический институт им. А. Д. Сахарова» Белорусского государственного университета (протокол № 10 от 31.08. 2018)

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В связи с возросшей ролью математики в современной науке и технике будущие экологи, инженеры нуждаются в серьезной математической подготовке. Изучение математики развивает логическое мышление, приучает студента к точности, к умению выделять главное, дает необходимые сведения для понимания сложных задач, возникающих в различных областях человеческой деятельности. Математический аппарат позволяет единообразно описать широкий круг фактов и явлений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях.

Математический анализ является фундаментальной дисциплиной.

**Цели учебной дисциплины:**

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач.

**Задачи учебной дисциплины:**

- выработать умение самостоятельно расширять математические знания в контексте решения прикладных задач;
- излагать и применять основные понятия и методы математического анализа при решении практических задач из курсов физики, химии, биологии, экологии;
- способствовать развитию научного мировоззрения.

Математические модели широко применяются в механике, физике, экологии и т. д. Освоение курса высшей математики дает возможность воспринимать материал других математических дисциплин (дифференциальные уравнения, теория функций комплексного переменного и основы функционального анализа, теория вероятностей и математическая статистика, методы математической физики и численные методы), применять методы решения математических задач в курсах по экологическому мониторингу, математической экологии, физике ядра и ионизирующего излучения, теоретической механике, обработке экспериментальных данных, в регистрации и дозиметрии ионизирующего излучения, защите от ионизирующих излучений, в других специальных курсах.

Изучение и усвоение дисциплины предполагает владение следующими компетенциями: быть способным использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики.

В результате усвоения курса студент должен

**знать:**

- основные понятия теории пределов;
- дифференциальное и интегральное исчисление функции одной и многих переменных и их приложения;

- основные понятия теории рядов;
- основные операции и теоремы теории поля;
- комплексные числа;

**уметь:**

- находить пределы последовательностей и функций;
- дифференцировать и интегрировать функции одной и нескольких переменных;
- исследовать сходимость несобственных интегралов и рядов;
- разлагать функции в степенные ряды и ряды Фурье;
- вычислять поток и циркуляцию векторных полей, находить скалярный и векторный потенциалы;
- применять методы математического анализа для решения конкретных задач;

**владеТЬ:**

- навыками применения творческого и аналитического мышления;
- важнейшими навыками применения математики в решении более сложных задач прикладного характера.

Программа курса рассчитана на 420 ч, из которых аудиторных – 220 ч (110 ч – лекционных, 110 ч – практических занятий). Форма получения высшего образования – дневная. Форма текущей аттестации – экзамен в I и II семестре.

## **СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА**

### **Тема 1. Множества. Функция**

Множество и его элементы. Числовые множества. Множество действительных чисел. Множество комплексных чисел. Действия над комплексными числами. Изображение комплексных чисел. Понятие функции. Область определения и множество значений функции. Способы задания функции. График функции. Монотонность, ограниченность, четность, нечетность, периодичность функции. Сложная и обратная функции. Элементарные функции, их классификация и графики.

### **Тема 2. Числовая последовательность**

Понятие числовой последовательности. Монотонность и ограниченность последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Предел числовой последовательности. Число  $e$ .

### **Тема 3. Предел и непрерывность функции**

Понятие предела функции. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших. Основные теоремы о пределах функции. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные функции. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Классификация точек разрыва. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

### **Тема 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной**

Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Геометрический и механический смысл производной. Основные правила дифференцирования. Производная обратной функции. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически. Логарифмическая производная. Производные высших порядков. Дифференциал функции, его основные свойства. Инвариантность формы первого дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Дифференциалы высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ферма, Ролля, Коши, Лагранжа). Правило Лопитала. Применение производной к исследованию функций (монотонность, экстремумы, направление выпуклости кривой, точки перегиба). Асимптоты графика функции. Общая схема исследования и построения графика функции.

### **Тема 5. Неопределенный интеграл**

Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Метод подстановки и метод интегрирования по частям. Понятие рациональной функции, разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей. Интегрирование рациональных, тригонометрических и иррациональных функций.

### **Тема 6. Определенный интеграл**

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Свойства определенного интеграла и его оценка. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Приложения определенного интеграла (площадь плоской фигуры, длина дуги кривой, объем тела вращения, площадь поверхности вращения, статические моменты и координаты центра тяжести пластин). Несобственные интегралы первого и второго рода.

### **Тема 7. Теория рядов**

Понятие числового ряда, сумма и остаток ряда. Сходимость и расходимость рядов. Гармонический ряд. Необходимое условие сходимости рядов. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов (признаки сравнения, Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши). Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость рядов. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Теоремы о непрерывности суммы функционального ряда, почленном дифференцировании и интегрировании функциональных рядов. Понятие степенного ряда. Область и радиус сходимости степенного ряда. Теоремы Абеля и Коши – Адамара. Ряд Тейлора. Условия разложения функции в ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях. Тригонометрический ряд Фурье, достаточные условия разложения функции в ряд Фурье.

### **Тема 8. Функции нескольких переменных**

Понятие функции нескольких переменных. Геометрическое изображение функции нескольких переменных. Линии и поверхности уровня. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные. Полный дифференциал функции двух переменных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Дифференцирование сложной функции. Неявные функции одной и двух переменных. Дифференцирование неявных функций. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Экстремум функции двух переменных.

Нахождение наибольших и наименьших значений функции двух переменных в замкнутой области.

### **Тема 9. Кратные интегралы**

Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Приложения двойных интегралов в геометрии и механике. Тройной интеграл, его свойства и способы вычисления. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Приложения тройных интегралов в геометрии и механике.

### **Тема 10. Криволинейные и поверхностные интегралы**

Криволинейные интегралы первого рода: определение, свойства, вычисление и основные приложения. Задача о работе силового поля. Криволинейные интегралы второго рода: определение, свойства и вычисление. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Поверхностные интегралы первого рода: определение, свойства, вычисление и основные приложения. Ориентация поверхности. Поверхностные интегралы второго рода: определение, свойства, вычисление.

### **Тема 11. Элементы теории поля**

Скалярные и векторные поля, их геометрические характеристики. Основные операторы теории поля: градиент, дивергенция, ротор. Производная по заданному направлению. Физический смысл дивергенции и ротора. Операторы Гамильтона и Лапласа, их связь с операторами теории поля. Циркуляция. Поток векторного поля. Простейшие векторные поля: соленоидальное, потенциальное, гармоническое. Теорема Остроградского – Гаусса. Теорема Стокса.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Формы контроля знаний
		Лекции	Практические(семинарские) занятия	Лабораторные занятия	Управляемая самостоятельная работа	Иное	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Множества. Функция	8	8			метод. пособие	сам. раб.
2	Числовая последовательность	2	2			метод. пособие	сам. раб.
3	Предел и непрерывность функции	6	8			метод. пособие	
4	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	18	18			метод. пособие	тест сам. раб.
5	Неопределенный интеграл	12	14			метод. пособие	тест сам. раб.
6	Определенный интеграл	12	10			метод. пособие	сам. раб.
7	Контрольная работа		2				
8	Теория рядов	14	12			метод. пособие	сам. раб.
9	Функции нескольких переменных	14	12			метод. пособие	сам. раб.
10	Кратные интегралы	8	8			метод. пособие	
11	Криволинейные и поверхностные интегралы	8	8			метод. пособие	сам. раб.
12	Элементы теории поля	8	6			метод. пособие	
13	Контрольная работа		2				
<b>ВСЕГО</b>		<b>110</b>	<b>110</b>				

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Для организации самостоятельной работы студентов по курсу следует использовать современные информационные технологии: разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (программа, методические указания к практическим занятиям, список рекомендуемой литературы и информационных ресурсов, задания в тестовой форме для самоконтроля и др.).

### **Темы самостоятельных работ**

1. Комплексные числа.
2. Предел функции. Замечательные пределы.
3. Непрерывность функции.
4. Производная функции.
5. Исследование функций с помощью производной.
6. Неопределённый интеграл.
7. Определённый интеграл.
8. Приложения определённого интеграла.
9. Числовые ряды.
10. Функциональные ряды.
11. Разложение функции в ряд Фурье.
12. Частные производные функций нескольких переменных.
13. Экстремум функций двух переменных.
14. Вычисление двойных и тройных интегралов.
15. Криволинейные интегралы I и II рода.
16. Поверхностные интегралы I и II рода.

### **Темы индивидуальных домашних заданий**

1. Функции и их основные свойства.
2. Предел числовой последовательности.
3. Производная неявно заданной функции.
4. Неопределённый интеграл.
5. Определённый интеграл и его приложения.
6. Числовые и степенные ряды.
7. Функции нескольких переменных.
8. Экстремум функций двух переменных.
9. Криволинейные интегралы I и II рода.
10. Поверхностные интегралы I и II рода.
11. Циркуляция. Поток векторного поля.
12. Основные операторы теории поля.

С целью диагностики знаний, умений и навыков студентов по данной дисциплине рекомендуется использовать:

- 1) контрольные работы;
- 2) самостоятельные работы;
- 3) тесты;
- 4) коллоквиумы по пройденному теоретическому материалу;
- 5) устный опрос в ходе практических занятий;
- 6) проверку конспектов лекций студентов.

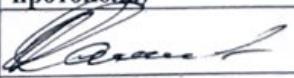
**ЛИТЕРАТУРА*****Основная***

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Т. Письменный.– Минск: АйрисПресс, 2017.– 608 с.
2. Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи: учеб. пособие / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2011.– 416 с.
3. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев.– М.: Астрель, 2007.
4. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 2 -х ч. / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко.– Минск: Вышэйш. шк., 2009.
5. Гусак, А. А. Основы высшей математики / А. А. Гусак, Е. А. Бричкова.– Минск: ТетраСистемс, 2012.– 208 с.

***Дополнительная***

1. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричкова.– Минск: ТетраСистемс, 2010.
2. Зельдович, Я. Б. Высшая математика для начинающих / Я. Б. Зельдович.– М.: Физматлит, 2017.– 520 с.
3. Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи. В 5 ч. Ч. 3/ А. П. Рябушко, Т. А. Жур.– Минск: Вышэйш. шк., 2017.– 398 с.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
<i>Согласование не требуется</i>			

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО**  
**на 2019/2020 учебный год**

№	Дополнения и изменения	Основание
1.	<i>Дополнение к учебной программе</i>	

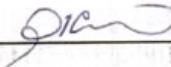
Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры общей и медицинской физики (протокол №1 от 29 августа 2019 года).

Заведующий кафедрой

 Н.А. Савастенко, к. физ.- мат. наук, доцент

**УТВЕРЖДАЮ**

Декан факультета мониторинга  
окружающей среды

 В. В. Жилко, к. х. н., доцент

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО**  
**на 2020/2021 учебный год**

№	Дополнения и изменения	Основание
1.	<p><b>В основной список литературы включить</b></p> <p>1. Кротов, В.Г. Математический анализ: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям / В. Г. Кротов. – Минск: БГУ, 2017. – 375 с.</p> <p>2. Альсевич, Л.А. Математический анализ. Последовательности и функции: практикум: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям / Л.А. Альсевич, С.Г. Красовский, А.Ф. Наумович. – Минск: Вышэйшая школа, 2019. – 326 с.</p>	
2.	<p><b>Из основного списка литературы перенести в дополнительный</b></p> <p>1. Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи: учеб. пособие / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2011.– 416 с.</p> <p>2. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев.– М.: Астрель, 2007. – 656 с.</p> <p>3. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 2 -х ч. / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко.– Минск: Вышэйш. шк., 2009.</p> <p>4. Гусак, А. А. Основы высшей математики / А. А. Гусак, Е. А. Бричкова.– Минск: ТетраСистемс, 2012.– 208 с.</p>	

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры общей и медицинской физики (протокол №1 от 31.08.2020 года).

Заведующий кафедрой Н.А. Савастенко, к. физ.- мат. наук, доцент

**УТВЕРЖДАЮ**

Декан факультета мониторинга окружающей среды В.В. Жилко, к.х.н., доцент

М14

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО**  
**на 2021/2022 учебный год**

<b>№</b>	<b>Дополнения и изменения</b>	<b>Основание</b>
1.	<b>В основной список литературы включить</b>  1. Лурье, И. Г. Высшая математика. Практикум: учебное пособие / И. Г. Лурье, Т. П. Фунтикова. – М. : Вузовский учебник, 2018. – 256 с. 2. Рябушко, А. П. Высшая математика: в 5 ч. / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : Вышэйшая школа, 2016-2018. – Ч.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – 2017. – 305 с. 3. Рябушко, А. П. Высшая математика : в 5 ч. / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : Вышэйшая школа, 2016-2018. – Ч.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы. – 2017. – 321 с. 4. Рябушко, А. П. Высшая математика: в 5 ч. / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : Вышэйшая школа, 2016-2018. – Ч.4. Криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Функции комплексной переменной. – 2017. – 257 с.	
2.	<b>Из основного списка литературы перенести в дополнительный</b>	

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры общей и медицинской физики (протокол №1 от 30.08.2021 года).

Заведующий кафедрой  Н.А. Савастенко, к. физ.- мат. наук, доцент

**УТВЕРЖДАЮ**

Декан факультета мониторинга окружающей среды  В.В. Жилко, к.х.н., доцент