

**Белорусский государственный университет**

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«02» декабря 2022 г.

Регистрационный № УД – 11247/уч.

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности**

**1-31 03 03**

**Прикладная математика (по направлениям)**

направление специальности

1-31 03 03-01  
деятельность)

Прикладная математика (научно-производственная

2022 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 03-2013 и учебных планов № G31-173/уч., № G31и-190/уч. от 30.05.2013 г.

**СОСТАВИТЕЛЬ:**

А.М. Будник, доцент кафедры вычислительной математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

**РЕЦЕНЗЕНТ:**

М.М. Чуйко, ведущий научный сотрудник института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой вычислительной математики Белорусского государственного университета  
(протокол № 4 от 22.11.2022);

Советом факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета  
(протокол № 4 от 22.11.2022)

Заведующий кафедрой  
вычислительной математики



---

В.И. Репников

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### **Цели и задачи учебной дисциплины**

**Цель** учебной дисциплины "Методы решения задач со свободными границами" – формирование у студентов навыков исследования нелинейных задач со свободными (неизвестными) границами с использованием методов вычислительной математики.

В рамках поставленной цели **задачи** учебной дисциплины состоят в следующем:

– ознакомление с характерными задачами математической физики, в которых присутствует свободная граница и/или существует фазовый переход;

– обучение студентов основным численным методам решения задач со свободными границами;

– обучение студентов методам генерации расчетных сеток.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием: учебная дисциплина "Методы решения задач со свободными границами" относится к **циклу** дисциплин специализации компонента учреждения высшего образования.

**Связи** с другими учебными дисциплинами. Основой для изучения данной дисциплины являются такие дисциплины как: "Математический анализ", "Дифференциальные уравнения", "Уравнения математической физики", "Методы численного анализа", "Программирование". Данный курс связан с дисциплинами "Численные методы математической физики", "Компьютерное моделирование наносистем".

### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины "Методы решения задач со свободными границами" должно обеспечить формирование следующих академических, социально-личностных и профессиональных компетенций:

#### **академические компетенции:**

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и прикладных задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

#### **социально-личностные компетенции:**

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

#### **профессиональные компетенции:**

ПК-1. Работать с научно-технической, нормативно-справочной и специальной литературой.

ПК-2. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области прикладной математики.

ПК-19. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей.

ПК-23. Владеть современными средствами телекоммуникаций.

В результате изучения дисциплины студент должен:

**знать:**

- основные проблемы, возникающие при решении задач со свободными границами;
- современные численные методы решения таких задач;
- методы преобразования координат для построения расчетных сеток;

**уметь:**

- эффективно применять существующие алгоритмы для решения задач со свободными границами;
- применять методы численного моделирования равновесных форм свободной поверхности жидкости;
- использовать вычислительные алгоритмы автоматической генерации расчетных сеток;

**владеть:**

- навыками самостоятельного анализа по улучшению свойств численных алгоритмов для адаптации их к задачам рассматриваемого класса;
- навыками использования вычислительного эксперимента для компьютерного моделирования физических процессов и анализа данных.

**Структура учебной дисциплины.**

Дисциплина изучается в 6 семестре дневной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины "Методы решения задач со свободными границами" отведено:

- для очной формы получения высшего образования – 106 часов, в том числе 68 аудиторных часов: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов (из них 12 ч (ДО)), управляемая самостоятельная работа – 4 часа (ДО).

Трудоемкость учебной дисциплины – 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Раздел 1. Постановка характерных задач со свободными границами

### Тема 1.1 Введение

Характеристика задач со свободными (неизвестными) границами. Роль вычислительного эксперимента и математического моделирования при их решении.

### Тема 1.2. Формулировка задач со свободными границами

Квазистационарная задача Стефана. Нестационарная задача Стефана. Формулировка задач идеальной гидродинамики. Упругопластическое кручение цилиндрических стержней. Задачи с уравнениями для свободной границы. Классификация задач со свободными границами.

## Раздел 2. Численные методы решения задач со свободными границами

### Тема 2.1. Конечно-разностные аппроксимации

Конечно-разностная аппроксимация условий сопряжения в одномерном случае. Двумерная задача сопряжения.

### Тема 2.2. Итерационные алгоритмы реализации

Итерационный метод последовательного уточнения неизвестной границы. Метод сглаживания.

## Раздел 3. Обращение переменных

### Тема 3.1. Простейшие случаи

Одномерный случай. Новые переменные в эллиптических задачах. Конкретные системы обращения переменных.

### Тема 3.2. Общий подход

Метод обращения переменных для ортогональных координат. Метод обращения переменных для неортогональных координат.

## Раздел 4. Методы построения расчетных сеток

### Тема 4.1. Преобразование систем координат

Алгебраические методы преобразования координат. Преобразование общего вида. Метод двух границ (двух поверхностей).

### Тема 4.2. Методы, основанные на решении дифференциальных уравнений

Использование задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Метод дуг и метод объемов построения расчетных сеток. Адаптивные сетки.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Лабораторные Занятия/ДО	Количество часов УСП	
1	2	3	4	5	6	7	8
<b>1</b>	<b>Постановка характерных задач со свободными границами</b>						
1.1	Введение	2		2			Экспресс-опрос
1.2	Формулировка задач со свободными границами	6		4	2 (ДО)		Экспресс-опрос
<b>2</b>	<b>Численные методы решения задач со свободными границами</b>						
2.1	Конечно-разностные аппроксимации	6		2	4 (ДО)		Экспресс-опрос, контрольная работа
2.2	Итерационные алгоритмы реализации	4		2		2 (ДО)	Отчет по лабораторной работе
<b>3</b>	<b>Обращение переменных</b>						
3.1	Простейшие случаи	4		2	2 (ДО)		Коллоквиум
3.2	Общий подход	4		2	2 (ДО)		Экспресс-опрос
<b>4</b>	<b>Методы построения расчетных сеток</b>						
4.1	Преобразование систем координат	4		2	2 (ДО)		Экспресс-опрос
4.2	Методы, основанные на решении дифференциальных уравнений	4		2		2 (ДО)	Отчет по лабораторной работе
	<b>Всего</b>	<b>34</b>		<b>18</b>	<b>12</b>	<b>4</b>	

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Вабищевич, П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей / П.Н. Вабищевич. – М.: Издательство Московского университета, 1987. – 164 с.
2. Мышкис, А.Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / А.Д. Мышкис, В.Г. Бабский и др. – Киев: Наукова думка, 1992. – 592 с.
3. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2 т. Т. 2 / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
4. Калиткин, Н.Н. Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики / Н.Н. Калиткин, П.В. Корякин. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 304 с.
5. Лабунцов, Д.А. Механика двухфазных систем: уч. пособие для вузов / Д.А. Лабунцов, В.В. Ягов – М.: Издательский дом МЭИ, 2016. – 239 с.

### Перечень дополнительной литературы

6. Вабищевич, П.Н. Численные методы. Вычислительный практикум / П.Н. Вабищевич. – М.: Либроком, 2010. – 320 с.
7. Калиткин, Н.Н. Численные методы: в 2 кн. Кн. 1. Численный анализ / Н.Н. Калиткин, Е.А. Альшина. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 304 с.
8. Розенцвейг, Р. Феррогидродинамика / Р. Розенцвейг. – М.: Мир, 1989. – 356 с.
9. Финн, Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория / Р. Финн. – М.: Мир, 1989. – 310 с.

### Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для текущего контроля качества усвоения знаний студентами используется следующий диагностический инструментарий:

- отчеты по лабораторным работам;
- письменные контрольные работы;
- устные экспресс-опросы;
- коллоквиум.

**Лабораторные работы**, как правило, представляют собой задания, включающие постановку дифференциальной задачи, описывающей заданную физическую систему, а также программную реализацию указанного численного метода, проведение вычислительного эксперимента и

комментарии по его итогам. Рекомендуемая форма отчетности по лабораторной работе – письменный отчет. Лабораторная работа оценивается по стандартной 10-балльной шкале. Оценка за лабораторную работу может быть снижена в случае несвоевременного выполнения.

**Письменные контрольные работы** проводятся для контроля знаний по одному или нескольким разделам дисциплины. Они включают 4–5 заданий и оцениваются по 10-балльной шкале. В случае неудовлетворительной оценки контрольная работа может быть переписана.

**Устный экспресс-опрос** студентов проводится в свободной форме в течение лабораторных и лекционных занятий.

**Коллоквиум** проводится в устной форме и оценивается по 10-балльной шкале.

Формой текущей аттестации по дисциплине "Методы решения задач со свободными границами" учебным планом предусмотрен зачет.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в итоговую отметку:

- отчеты по лабораторным работам – 50 %;
- контрольные работы – 20 %;
- коллоквиум – 20 %,
- устный экспресс-опрос – 10 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости и отметки, полученной при сдаче зачета, с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей успеваемости составляет 50 %, зачетной отметки – 50 %.

## **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

### **Раздел 2. Численные методы решения задач со свободными границами**

#### **Задание 1. Определить форму равновесной поверхности жидкости, находящейся на горизонтальной поверхности (2 ч/ДО)**

1. Построить безразмерную математическую модель задачи.
2. Решить полученную дифференциальную задачу итерационно-разностным методом.
3. Методом продолжения по параметру исследовать влияние на равновесную поверхность действующей на жидкость силы. Результаты представить графически.

**Форма контроля** – отчет по лабораторной работе.

#### **Раздел 4. Методы построения расчетных сеток**

##### **Задание 2. Используя преобразование координат построить сетку в расчетной области (2 ч/ДО)**

1. Построить преобразование координат, которое отображает физическую область на прямоугольник и обеспечивает сгущение узлов в окрестности ее нижней границы.

2. Вычислить метрические координаты преобразования во внутренних узлах сетки аналитически и численно.

3. Изобразить распределение узлов в физической области графически.

**Форма контроля** – отчет по лабораторной работе.

#### **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации занятий используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности.

Также при организации образовательного процесса используется **метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

#### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине "Методы решения задач со свободными границами" следует использовать современные информационные технологии: разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к коллоквиуму, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.). Эффективность самостоятельной работы студентов проверяется в ходе текущего и итогового контроля знаний. Для общей оценки качества усвоения студентами учебного материала рекомендуется использование рейтинговой системы.

## Примерный перечень вопросов к коллоквиуму

1. Постановка нестационарной задачи Стефана.
2. Постановка квазистационарной задачи Стефана.
3. Постановка задач идеальной гидродинамики.
4. Задачи упругопластического кручения стержней.
5. Формулировка задач феррогидростатики.
6. Постановка задачи о форме капли магнитной жидкости.
7. Классификация задач со свободными границами.
8. Метод последовательного уточнения неизвестной границы на примере задачи Стефана.
9. Аппроксимация условий сопряжения в одномерном случае.
10. Двумерная задача сопряжения.
11. Метод последовательного уточнения неизвестной границы на примере задачи о форме капли магнитной жидкости (постановка безразмерной задачи и построение сетки).
12. Метод последовательного уточнения неизвестной границы на примере задачи о форме капли магнитной жидкости (организация итерационного процесса).
13. Метод сглаживания.

## Примерный перечень вопросов к зачету

1. Обращение переменных в одномерном случае.
2. Новые переменные в эллиптических задачах.
3. Метод обращения переменных в случае ортогональных координат.
4. Метод обращения переменных в случае неортогональных координат.
5. Новые переменные в эллиптических задачах со свободной границей.
6. Преобразование координат.
7. Алгебраические методы преобразования координат (преобразование со сгущением узлов сетки в заданной области).
8. Алгебраические методы преобразования координат (нормализующее преобразование).
9. Алгебраические методы преобразования координат (преобразование общего вида). Численное преобразование.
10. Алгебраические методы преобразования координат (метод двух границ).
11. Использование эллиптических уравнений для построения преобразований.
12. Использование гиперболических уравнений для построения преобразований.
13. Адаптивные сетки, основанные на методике уменьшения ошибки.
14. Адаптивные сетки. Вариационный метод.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Численные методы математической физики	Кафедра вычислительной математики	Нет предложений	Изменений не требуется (протокол № 4 от 22.11.2022)
Компьютерное моделирование наносистем	Кафедра вычислительной математики	Нет предложений	Изменений не требуется (протокол № 4 от 22.11.2022)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО  
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
вычислительной математики (протокол №\_\_\_ от \_\_\_\_\_)

Заведующий кафедрой

доцент, канд. ф.-м. н.

(степень, звание)

\_\_\_\_\_ (подпись)

В.И. Репников

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

доцент, доктор. техн. н.

(степень, звание)

\_\_\_\_\_ (подпись)

А.М. Недзведь

(И.О.Фамилия)