УДК 517.977

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. И. КАЛИНИН[1]***, Л. И. ЛАВРИНОВИЧ***[1]***, Д. Ю. ПРУДНИКОВА***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается задача оптимизации переходного процесса в квазилинейной динамической системе (содержит малый параметр при нелинейностях) с критерием качества, представляющим собой линейную комбинацию энергетических затрат и длительности процесса. Предлагается алгоритм построения асимптотических приближений заданного порядка к решению этой задачи. Суть данного алгоритма заключается в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных и длительности процесса – конечномерных элементов, по которым легко восстанавливается решение задачи. Вычислительная процедура алгоритма сводится к решению задачи оптимизации переходного процесса в линейной динамической системе, интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем. Также показывается, как можно использовать полученные асимптотические приближения для построения оптимального управления в рассматриваемой задаче при заданном значении малого параметра.

Ключевые слова: малый параметр; квазилинейная система; оптимальное управление; асимптотические приближения.

THE SMALL PARAMETER METHOD IN THE OPTIMISATION OF A QUASI-LINEAR DYNAMICAL SYSTEM PROBLEM

A. I. KALININ[a]***, L. I. LAVRINOVICH***[a]***, D. Y. PRUDNIKOVA***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: L. I. Lavrinovich (lavrinovich@bsu.by)

We consider an optimisation problem for the transient process in a quasi-linear dynamical system (contains a small parameter at non-linearities) with a performance index that is a linear combination of energy costs and the duration of the process. An algorithm for constructing asymptotic approximations of a given order to the solution of this problem

Образец цитирования:
Калинин АИ, Лавринович ЛИ, Прудникова ДЮ. Метод малого параметра в задаче оптимизации квазилинейной динамической системы. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:23–33.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-23-33

For citation:
Kalinin AI, Lavrinovich LI, Prudnikova DY. The small parameter method in the optimisation of a quasi-linear dynamical system problem. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:23–33. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-23-33

Авторы:
Анатолий Иосифович Калинин – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики.
Леонид Иванович Лавринович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики.
Дарья Юрьевна Прудникова – студентка факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – Л. И. Лавринович.

Authors:
Anatoly I. Kalinin, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of optimal control methods, faculty of applied mathematics and computer science.
kalininai@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-3223-2338
Leonid I. Lavrinovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of optimal control methods, faculty of applied mathematics and computer science.
lavrinovich@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-7698-0207
Darya Y. Prudnikova, student at the faculty of applied mathematics and computer science.
fpm.prudnikoDY@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-8645-4972

is proposed. The algorithm is based on the asymptotic decomposition by integer powers of a small parameter of the initial values of adjoint variables and the duration of the process that are finite-dimensional elements, according to which the solution of the problem is easily restored. The computational procedure of the algorithm includes solving the problem of optimising the transient process in a linear dynamical system, integrating systems of linear differential equations, and finding the roots of non-degenerate linear algebraic systems. We also show how the constructed asymptotic approximations can be used to construct optimal control in the problem under consideration for a given value of a small parameter.

Keywords: small parameter; quasi-linear system; optimal control; asymptotic approximations.

Введение

Многие прикладные задачи оптимизации динамических систем в своих математических моделях содержат малые параметры, причем зачастую модели существенно упрощаются, если эти параметры положить равными нулю. В таких случаях целесообразно использовать асимптотические методы, основное достоинство которых состоит в том, что при их применении исходные задачи, которые принято называть возмущенными, сводятся к сравнительно несложной коррекции решений более простых задач оптимального управления. В частности, это относится к задачам оптимизации квазилинейных систем, содержащих малые параметры при нелинейностях. Такие задачи в различных постановках исследовались многими авторами (см., например, [1–8]).

В настоящей статье рассматривается задача оптимизации переходного процесса в квазилинейной динамической системе с критерием качества, который представляет собой линейную комбинацию энергетических затрат и длительности процесса. Заметим, что если при нефиксированном времени перехода учесть только энергетические затраты, то, как правило, задача не будет иметь решения, а на минимизирующей последовательности длительность процесса будет стремиться к бесконечности. Цель исследования – построение асимптотических приближений к решению рассматриваемой задачи. Применяемый подход к исследованию является модификацией методики, изложенной в работах [5; 9]. Суть модификации состоит в построении асимптотических разложений по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных и длительности процесса управления.

Постановка задачи

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t),\ t \in [t_*,\ t_1]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,\ t) + B(t)u,\ \ x(t_*) = x_* \neq 0, \tag{1}$$

$$x(t_1) = 0,\ J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t_1}\left(1 + x^{\mathrm{T}}Q(t)x + u^{\mathrm{T}}P(t)u\right)dt \to \min, \tag{2}$$

где x – n-вектор; μ – малый (по модулю) параметр; $f(x,\ t)$, $x \in R^n$, $t \ge t_*$, – нелинейная вектор-функция; t_*, x_* – заданные начальный момент времени и начальное состояние динамической системы; t_1 – нефиксированный конечный момент времени ($t_1 \ge t_*$); $Q(t)$ – неотрицательно определенная симметрическая матрица, а $P(t)$ – положительно определенная симметрическая матрица для всех $t \ge t_*$.

Предположение 1. Элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $\dfrac{\partial f(x,\ t)}{\partial x}$, $x \in R^n$, $t \ge t_*$, принадлежат классу C^p, $p \ge 1$.

Управление $u(t,\ \mu)$, $t \in [t_*,\ t_1(\mu)]$, с кусочно-непрерывными компонентами принято называть допустимым, если для порожденной им траектории $x(t,\ \mu)$, $t \in [t_*,\ t_1(\mu)]$, системы (1) выполняется условие $x(t_1(\mu),\ \mu) = 0$. Допустимое управление, минимизирующее функционал $J(u)$, называют оптимальным. Наряду с этими общеупотребительными понятиями определим то, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решению рассматриваемой задачи.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\ \mu)$, $t \in \left[t_*,\ t_1^{(N)}(\mu)\right]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка ($N = 0, 1, 2, \ldots$) в задаче (1), (2), если оно переводит систему (1) в состояние $O\left(\mu^{N+1}\right)$ и отклоняется по критерию качества $J(u)$ от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(x, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния (x_*, t_*) имеет место

$$u^{(N)}(x_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu),$$

где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in \left[t_*, t_1^{(N)}(\mu)\right]$, – асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1), (2).

В статье предлагается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N ($N < p$) можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассматриваемой задаче. Данный алгоритм опирается на конструктивное доказательство теоремы о существовании при сделанных далее предположениях гладкого оптимального управления и его асимптотических свойствах. Суть алгоритма состоит в построении полиномов Тейлора определяющих элементов оптимального управления, по которым оно легко восстанавливается. Определяющими элементами в рассматриваемой задаче являются начальные значения (в момент времени t_*) сопряженных переменных, которые в силу принципа максимума [10] соответствуют оптимальному управлению, а также длительность процесса. Эти определяющие элементы, как функции малого параметра, принадлежат классу C^p.

Базовая задача

Вычисления при построении асимптотических приближений начинаются с решения базовой задачи, которая формально получается из исходной задачи при $\mu = 0$ и, в отличие от нее, является задачей оптимизации линейной системы.

Предположение 2. Динамическая система в базовой задаче вполне управляема (см. [1]).

Это предположение выполняется тогда и только тогда (см., например, [11]), когда при некотором $t_1 > t_*$ и любом ненулевом n-векторе l имеет место

$$l^{\mathrm{T}} F_0(t) B(t) \not\equiv 0, \; t_* \le t \le t_1,$$

где $F_0(t)$ – $(n \times n)$-матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\dot{F}_0 = -F_0 A(t), \; F_0(t_1) = E_n,$$

с единичной матрицей E_n. Это условие, которое называют неявным критерием управляемости, для стационарной динамической системы эквивалентно требованию $\operatorname{rank}\left(B, AB, \dots, A^{n-1}B\right) = n$.

При выполнении предположения 2 в базовой задаче существуют допустимые управления, и тогда эта задача имеет единственное решение (см. [12]), которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [10] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T^0 = \left[t_*, t_1^0\right]$ – оптимальные управление и траектория в базовой задаче, тогда существует такое решение $\psi^0(t)$, $t \in T^0$, сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^{\mathrm{T}}(t)\psi + Q(t)x^0(t)$, что выполняются условия

$$\psi^{0\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}(t)u^0(t) - \frac{1}{2}u^{0\mathrm{T}}(t)P(t)u^0(t) = \max_{u \in R^r}\left(\psi^{0\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}(t)u - \frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}P(t)u\right), \; t \in T^0, \tag{3}$$

$$2\psi^{0\mathrm{T}}\left(t_1^0\right)B\left(t_1^0\right)u^0\left(t_1^0\right) - u^{0\mathrm{T}}\left(t_1^0\right)P\left(t_1^0\right)u^0\left(t_1^0\right) = 1. \tag{4}$$

Из условия (3) непосредственно следует

$$u^0(t) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi^0(t), \; t \in T^0. \tag{5}$$

Условие (4) с учетом формулы (5) может быть записано в виде

$$\psi^{0\mathrm{T}}\left(t_1^0\right)B\left(t_1^0\right)P^{-1}\left(t_1^0\right)B^{\mathrm{T}}\left(t_1^0\right)\psi^0\left(t_1^0\right) = 1.$$

Пусть $\nu_0 = \psi^0(t_*)$, тогда $x^0(t)$, $\psi^0(t)$, $t \in T^0$, есть решение следующей начальной задачи:

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t), \; x(t_*) = x_*, \\ \dot{\psi} = Q(t)x(t) - A^{\mathrm{T}}(t)\psi, \; \psi(t_*) = \nu_0. \end{gathered} \tag{6}$$

Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу $F(t)$, $t \geq t_*$, системы (6) как решение начальной задачи $\dot{F} = \overline{A}(t)F,\ F(t_*) = E_{2n}$, в которой

$$\overline{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t) \\ Q(t) & -A^{\mathrm{T}}(t) \end{pmatrix}.$$

Разобьем матрицу F на блоки размера $n \times n$:

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}.$$

После решения базовой задачи сформируем матрицу

$$I_0 = \begin{pmatrix} F_{12}(t_1^0) & \dot{x}^0(t_1^0) \\ 2\left(F_{22}(t_1^0)B(t_1^0)u^0(t_1^0)\right)^{\mathrm{T}} & \dfrac{d}{dt_1}\left(u^{0\mathrm{T}}(t_1^0)P(t_1^0)u^0(t_1^0)\right) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Предположение 3. Выполнено условие $\det I_0 \neq 0$.

Из результатов, полученных в работе [13], следует, что $\det F_{12}(t_1^0) \neq 0$.

Асимптотический анализ решения исходной задачи

Говорить об асимптотически субоптимальных управлениях можно лишь в том случае, когда исходная задача имеет решение. Убедимся, что при сделанных предположениях в задаче (1), (2) с достаточно малым по модулю μ существует оптимальное управление. Доказательство будет конструктивным и предопределит дальнейшие вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений.

Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + \mu f(x, t) + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi,\ x(t_*) = x_*, \\ \dot{\psi} = Q(t)x - \left(A(t) + \mu\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right)^{\mathrm{T}}\psi,\ \psi(t_*) = \nu. \end{gathered} \tag{8}$$

В силу теоремы о дифференцируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным и параметрам существуют такие положительные числа ε_0, μ_0, что задача (8) имеет единственное решение $x(t, \nu, \mu)$, $\psi(t, \nu, \mu)$, принадлежащее классу C^p, продолжимое на любой конечный промежуток $[t_*, t_1]$, если только $\|\nu - \nu_0\| < \varepsilon_0$, $|\mu| < \mu_0$.

Теорема. *При выполнении предположений 1–3 в задаче (1), (2) с достаточно малым по модулю* μ *существует единственное оптимальное управление, которое представимо в виде*

$$u^0(t, \mu) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t, \nu(\mu), \mu),\ t \in [t_*, t_1(\mu)]. \tag{9}$$

Оптимальный конечный момент времени $t_1(\mu)$ и начальное значение (в момент времени t_0) вектора сопряженных переменных $\nu(\mu)$ удовлетворяют системе уравнений

$$x(t_1, \nu, \mu) = 0,\ \psi^{\mathrm{T}}(t_1, \nu, \mu)B(t_1)P^{-1}(t_1)B^{\mathrm{T}}(t_1)\psi(t_1, \nu, \mu) + 2\mu\psi^{\mathrm{T}}(t_1, \nu, \mu)f(0, t_1) - 1 = 0, \tag{10}$$

причем $t_1(\mu) \in C^p,\ t_1(0) = t_1^0,\ \nu(\mu) \in C^p,\ \nu(0) = \nu_0$.

Доказательство. Для сокращения записи введем в рассмотрение векторы $\eta = (\nu, t_1)$, $\eta_0 = (\nu_0, t_1^0)$ и вектор-функцию

$$R(\eta, \mu) = \begin{pmatrix} x(\eta, \mu) \\ \psi^{\mathrm{T}}(\eta, \mu)B(t_1)P^{-1}(t_1)B^{\mathrm{T}}(t_1)\psi(\eta, \mu) + 2\mu\psi^{\mathrm{T}}(\eta, \mu)f(0, t_1) - 1 \end{pmatrix},$$

что позволяет записать систему (10) в виде

$$R(\eta, \mu) = 0. \tag{11}$$

С помощью теоремы о неявной функции убедимся, что эта система уравнений однозначно разрешима относительно η при достаточно малых по модулю μ. Прежде всего заметим, что вектор-функция $R(\eta, \mu)$, определенная в области $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$, $|\mu| < \mu_0$, принадлежит классу C^p. Поскольку $x(t, \nu_0, 0) = x^0(t)$, $\psi(t, \nu_0, 0) = \psi^0(t)$, $t \in T^0$, то

$$R(\eta_0, 0) = \begin{pmatrix} x^0(t_1^0) \\ \psi^{0\mathrm{T}}(t_1^0) B(t_1^0) P^{-1}(t_1^0) B^{\mathrm{T}}(t_1^0) \psi^0(t_1^0) - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Матрица Якоби системы (11) имеет вид

$$\frac{\partial R}{\partial \eta}(\eta, 0) = \begin{pmatrix} F_{12}(t_1^0) & \dot{x}^0(t_1^0) \\ 2\left(F_{22}(t_1^0) B(t_1^0) u^0(t_1^0)\right)^{\mathrm{T}} & \dfrac{d}{dt_1}\left(u^{0\mathrm{T}}(t_1^0) P(t_1^0) u^0(t_1^0)\right) \end{pmatrix} = I_0$$

и в силу предположения 3 является невырожденной. Таким образом, для системы (10) или, что то же самое, системы (11) выполнены все условия теоремы о неявной функции. Согласно этой теореме в некоторой окрестности нуля $|\mu| < \mu_1$ однозначно определена вектор-функция $\eta(\mu)$ из класса C^p, удовлетворяющая системе уравнений (11) и условию $\eta(0) = \eta_0$.

Рассмотрим управление (9). Оно будет допустимым в исходной задаче, поскольку для порожденной им траектории $x^0(t, \mu) = x(t, \nu(\mu), \mu)$, $t \in [t_*, t_1(\mu)]$, системы (1) выполняется условие $x^0(t_1(\mu), \mu) = 0$. Вместе с тем это управление удовлетворяет принципу максимума [10] с вектором сопряженных переменных $\psi^0(t, \mu) = \psi(t, \nu(\mu), \mu)$, $t \in [t_*, t_1(\mu)]$.

Покажем, что экстремаль $u^0(t, \mu)$, $t \in [t_*, t_1(\mu)]$, будет единственным оптимальным управлением в задаче (1), (2), если μ достаточно мало по модулю. Предположим противное, тогда существует такая последовательность $\mu_k \to 0$, что либо управление $u^0(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, t_1(\mu_k)]$, $k = 1, 2, \ldots$, не является оптимальным в исходной задаче с $\mu = \mu_k$, либо существует другое оптимальное управление. Поскольку установлено, что в задаче (1), (2) с достаточно малым по модулю μ существует допустимое управление, то эта задача имеет решение в классе измеримых функций [12]. Решение исходной задачи с $\mu = \mu_k$, отличное от $u^0(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, t_1(\mu_k)]$, обозначим через $\bar{u}(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, \bar{t}_1(\mu_k)]$, и пусть $\bar{x}(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, \bar{t}_1(\mu_k)]$, – соответствующая оптимальная траектория. Тогда

$$J(\bar{u}(\cdot, \mu_k)) - J(u^0(\cdot, \mu_k)) \le 0, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Опираясь на эти неравенства, можно убедиться в том, что $\bar{t}_1(\mu_k) \to t_1^0$ при $k \to \infty$, и последовательность измеримых вектор-функций $\bar{u}(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, t^*]$, с любым моментом времени $t^* < t_1^0$ содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к $u^0(t)$, $t \in [t_*, t^*]$. Рассуждения, которые приводят к такому выводу, аналогичны рассуждениям, использованным при доказательстве теорем в работах [14; 15]. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что сходится сама последовательность.

Поскольку управление $\bar{u}(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, \bar{t}_1(\mu_k)]$, является оптимальным, то для него выполняется принцип максимума, т. е. существуют постоянная $\lambda(\mu_k) \ge 0$ и решение $\bar{\psi}(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, \bar{t}_1(\mu_k)]$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\left(A(t) + \mu_k \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t, \mu_k), t)\right)^{\mathrm{T}} \psi + \lambda(\mu_k) Q(t) \bar{x}(t, \mu_k) \tag{12}$$

такие, что $\lambda(\mu_k) + \|\bar{\psi}(\cdot, \mu_k)\| \ne 0$ и почти всюду на $t \in [t_*, \bar{t}_1(\mu_k)]$ выполняются условия

$$\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(t, \mu_k) B(t) \bar{u}(t, \mu_k) - \lambda(\mu_k) \frac{1}{2} \bar{u}^{\mathrm{T}}(t, \mu_k) P(t) \bar{u}(t, \mu_k) =$$
$$= \max_{u \in R^r} \left(\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(t, \mu_k) B(t) u - \lambda(\mu_k) \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} P(t) u \right), \tag{13}$$

$$\left(2-\lambda(\mu_k)\right)\bar{\psi}^{\mathrm{T}}\left(\bar{t}_1(\mu_k), \mu_k\right)B\left(\bar{t}_1(\mu_k)\right)P^{-1}\left(\bar{t}_1(\mu_k)\right)B^{\mathrm{T}}\left(\bar{t}_1(\mu_k)\right)\bar{\psi}\left(\bar{t}_1(\mu_k), \mu_k\right)+ \\ +2\mu\bar{\psi}^{\mathrm{T}}\left(\bar{t}_1(\mu_k), \mu_k\right)f\left(0, \bar{t}_1(\mu_k)\right)-1=0. \tag{14}$$

Пусть $\bar{\nu}(\mu_k)=\bar{\psi}(t_*, \mu_k)$, $k=1, 2, \ldots$. Поскольку вектор $\left(\bar{\nu}(\mu_k), \lambda(\mu_k)\right)$ определен с точностью до положительного множителя, то без ограничения общности можно считать, что $\left\|\left(\bar{\nu}(\mu_k), \lambda(\mu_k)\right)\right\|=\left\|(\nu_0, 1)\right\|$, $k=1, 2, \ldots$. Из ограниченной последовательности векторов $\left(\bar{\nu}(\mu_k), \lambda(\mu_k)\right)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что сходится сама последовательность, и обозначим ее предел через $(\bar{\nu}, \lambda)$. Тогда последовательность $\bar{\psi}(t, \mu_k)$, $t\in\left[t_*, \bar{t}_1(\mu_k)\right]$, как видно из системы (12), будет равномерно сходиться к решению $\bar{\psi}(t)$, $t\in\left[t_*, t_1^0\right]$, начальной задачи

$$\dot{\psi}=-A^{\mathrm{T}}(t)\psi+\lambda Q(t)x^0(t),\ \psi(t_*)=\bar{\nu},$$

на любом промежутке $\left[t_*, t^*\right]$, $t^*<t_1^0$.

Переходя к пределу в соотношении (13) при $k\to\infty$, получаем, что почти всюду на $\left[t_0, t_1^0\right]$

$$\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(t)B(t)u^0(t)-\frac{\lambda}{2}u^{0\mathrm{T}}(t)P(t)u^0(t)=\max_{u\in R^r}\left(\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(t)B(t)u-\frac{\lambda}{2}u^{\mathrm{T}}P(t)u\right). \tag{15}$$

Понятно, что $\lambda\geq 0$, $\left\|(\bar{\nu}, \lambda)\right\|=\left\|(\nu_0, 1)\right\|$. Из соотношений (3), (15), используя неявный критерий управляемости, получаем, что $\lambda=1$, $\bar{\nu}=\nu_0$, $\bar{\psi}(t)=\psi_0(t)$, $t\in\left[t_*, t_1^0\right]$. Поскольку $\lambda(\mu_k)>0$ для достаточно больших k, то из соотношения (13) следует, что почти всюду на $\left[t_*, \bar{t}_1(\mu_k)\right]$

$$\bar{u}(t, \mu_k)=\frac{P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}(t, \mu_k)}{\lambda(\mu_k)}.$$

Отсюда и из формул (1), (8), (12) видно, что $\bar{x}(t, \mu_k)=x\left(t, \dfrac{\bar{\nu}(\mu_k)}{\lambda(\mu_k)}, \mu_k\right)$, $t\in\left[t_*, \bar{t}_1(\mu_k)\right]$, а так как $\bar{x}\left(\bar{t}_1(\mu_k), \mu_k\right)=0$, то с учетом равенства (14) вектор $\dfrac{\bar{\nu}(\mu_k)}{\lambda(\mu_k)}$, а также момент времени $\bar{t}_1(\mu_k)$ являются решением системы (10) при $\mu=\mu_k$. В силу однозначной разрешимости этой системы в окрестности точки $\left(\nu_0, t_1^0, 0\right)$ имеем $\nu(\mu_k)=\dfrac{\bar{\nu}(\mu_k)}{\lambda(\mu_k)}$, $\bar{t}_1(\mu_k)=t_1(\mu_k)$ для достаточно больших k и, соответственно, $\bar{u}(t, \mu_k)=u^0(t, \mu_k)$ почти всюду на $\left[t_*, t_1(\mu_k)\right]$. Поскольку получено противоречие, теорема доказана.

Построение асимптотически субоптимальных управлений

Продолжим изложение алгоритма построения асимптотических приближений к решению задачи (1), (2), опираясь на утверждения теоремы. Пусть задано натуральное число N, $N<p$. Поскольку вектор $\eta(\mu)=\left(\nu(\mu), t_1(\mu)\right)$ принадлежит классу C^p и $\eta(0)=\left(\nu_0, t_1^0\right)$, то имеет место асимптотическое равенство $\eta(\mu)=\eta^{(N)}(\mu)+O\left(\mu^{N+1}\right)$, где

$$\eta^{(N)}=\left(\nu^{(N)}(\mu), t_1^{(N)}(\mu)\right),\ \nu^{(N)}(\mu)=\nu_0+\sum_{k=1}^{N}\mu^k\nu_k,\ t_1^{(N)}(\mu)=t_1^0+\sum_{k=1}^{N}\mu^k t_{1k} \tag{16}$$

есть полиномы Тейлора N-й степени. Вектор-функция

$$u^{(N)}(t, \mu)=P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi\left(t, \nu^{(N)}(\mu), \mu\right),\ t\in\left[t_*, t_1^{(N)}(\mu)\right], \tag{17}$$

будет асимптотическим субоптимальным управлением N-го порядка в исходной задаче. Для ее построения нужно найти коэффициенты ν_k, t_{1k}, $k=\overline{1, N}$, полиномов (16), что можно сделать с помощью методики, изложенной в работе [5]. Согласно этой методике прежде всего нужно разложить левую часть уравнения (11) по степеням малого параметра, применяя классическую технику Пуанкаре к системе (8). Вектор-функции $x(t, \nu, \mu)$, $\psi(t, \nu, \mu)$ в каждой точке области определения имеют частные производные по μ до порядка p включительно, поэтому они представимы в виде

$$x(t, \nu, \mu) = \sum_{k=0}^{N} \mu^k x_k(t, \nu) + O\left(\mu^{N+1}\right), \ \psi(t, \nu, \mu) = \sum_{k=0}^{N} \mu^k \psi_k(t, \nu) + O\left(\mu^{N+1}\right). \tag{18}$$

С помощью формализма Пуанкаре составим дифференциальные уравнения для функций $x_k(t, \nu)$, $\psi_k(t, \nu)$, $k = \overline{0, N}$, при фиксированном ν:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_0 = A(t)x_0 + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_0, \ x_0(t_*) = x_*, \\
\dot{\psi}_0 = Q(t)x_0 - A^{\mathrm{T}}(t)\psi_0, \ \psi_0(t_*) = \nu, \\
\dot{x}_1 = A(t)x_1 + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 + f\left(x_0(t), t\right), \ x_1(t_*) = 0, \\
\dot{\psi}_1 = Q(t)x_1 - A^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 - \frac{\partial h}{\partial x}\left(x_0(t), \psi_0(t), t\right), \ \psi_1(t_*) = 0, \\
\dot{x}_2 = A(t)x_2 + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_2 + \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0(t), t\right)x_1(t), \ x_2(t_*) = 0, \\
\dot{\psi}_2 = Q(t)x_2 - A^{\mathrm{T}}(t)\psi_2 - \frac{\partial h}{\partial x}\left(x_0(t), \psi_1(t), t\right) - \frac{\partial^2 h}{\partial^2 x}\left(x_0(t), \psi_0(t), t\right)x_1(t), \ \psi_2(t_*) = 0, \ldots,
\end{gathered} \tag{19}$$

где $h(x, \psi, t) = \psi^{\mathrm{T}} f(x, t)$. Как видно из уравнений (19), нахождение коэффициентов представлений (18) при заданном ν сводится к последовательному решению начальных задач для систем линейных дифференциальных уравнений.

В силу представлений (18) левая часть уравнения (11) допускает асимптотическое представление

$$R(\eta, \mu) = \sum_{k=0}^{N} \mu^k R_k(\eta) + O\left(\mu^{N+1}\right),$$

в котором

$$\begin{gathered}
R_0(\eta) = \begin{pmatrix} x_0(t_1, \nu) \\ \psi_0^{\mathrm{T}}(t_1, \nu)B(t_1)P^{-1}(t_1)B^{\mathrm{T}}(t_1)\psi_0(t_1, \nu) - 1 \end{pmatrix}, \\
R_k(\eta) = \begin{pmatrix} x_k(t_1, \nu) \\ \sum_{i=0}^{k}\left(\psi_i^{\mathrm{T}}(t_1, \nu)B(t_1)P^{-1}(t_1)B^{\mathrm{T}}(t_1)\psi_{k-i}(t_1, \nu)\right) + 2\psi_{k-1}(t_1, \nu) f(0, t_1) \end{pmatrix}, \ k = \overline{1, N}.
\end{gathered} \tag{20}$$

Составим системы линейных уравнений для векторов $\eta_k = (\nu_k, t_{1k})$, $k = \overline{1, N}$. В соответствии со схемой, приведенной в работе [5], применим для этого метод неопределенных коэффициентов, а именно разложим с помощью формулы Тейлора вектор-функцию

$$\sum_{k=0}^{N} \mu^k R_k\left(\eta^{(N)}(\mu)\right)$$

по степеням μ до порядка N включительно и приравняем коэффициенты разложения (начиная с коэффициента при μ) к нулю. В результате получим следующие невырожденные системы линейных уравнений для последовательного нахождения векторов η_k, $k = \overline{1, N}$:

$$I_0\eta_1 = -R_1(\eta_0), \ I_0\eta_2 = -R_2(\eta_0) - \frac{\partial R_1}{\partial \eta}(\eta_0)\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_1^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 R_0(\eta_0)}{\partial \eta^2}\eta_1, \ldots. \tag{21}$$

Как видно из формулы (20), чтобы сформировать правые части этих систем, необходимо знать значения функций $x_k(t, \nu)$, $\psi_k(t, \nu)$ и их частных производных по компонентам вектора η в точке η_0. Значения функций находятся посредством интегрирования уравнений (19). Формальным дифференцированием этих уравнений получаем начальные задачи для производных. Например:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_0}{\partial \nu} = A(t)\frac{\partial x_0}{\partial \nu} + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu},\ \frac{\partial x_0}{\partial \nu}(t_*) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} = Q(t)\frac{\partial x_0}{\partial \nu} - A^{\mathrm{T}}(t)\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu},\ \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}(t_*) = E_n.$$

При вычислении правых частей систем (21) следует учитывать, что $x_0(t, \nu_0) = x^0(t)$, $\psi_0(t, \nu_0) = \psi^0(t)$, $t \in T^0$. Тогда, как видно из формул (19), (20),

$$R_1(\eta) = \begin{pmatrix} x_1^0\left(t_1^0\right) \\ 2\psi_0^{\mathrm{T}}\left(t_1^0\right)B\left(t_1^0\right)P^{-1}\left(t_1^0\right)B^{\mathrm{T}}\left(t_1^0\right)\psi_1^0\left(t_1^0\right) + 2\psi_0^{\mathrm{T}}\left(t_1^0\right)f\left(0, t_1^0\right) \end{pmatrix},$$

а вектор-функция $x_1^0(t)$, $t \geq t_*$, вместе с $\psi_1^0(t)$, $t \geq t_*$, является решением начальной задачи

$$\dot{x}_1 = A(t)x_1 + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 + f\left(x_0(t), t\right),\ x_1(t_*) = 0,$$

$$\dot{\psi}_1 = Q(t)x_1 - A^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 - \frac{\partial h}{\partial x}\left(x_0(t), \psi_0(t), t\right),\ \psi_1(t_*) = 0.$$

Последовательно решая системы (21), находим векторы η_k, $k = \overline{1, N}$, и составляем полином (16). Управление (17), как уже отмечалось, является асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в исходной задаче. Для его построения необходимо решить начальную задачу (8) при $\nu = \nu^{(N)}(\mu)$. Вместе с тем $\psi\left(t, \nu^{(N)}(\mu), \mu\right) = \overline{\psi}^{(N)}(t, \mu) + O\left(\mu^{N+1}\right)$, где

$$\overline{\psi}^{(N)}(t, \mu) = \sum_{k=0}^{N} \mu^k \overline{\psi}_k(t),\ t \geq t_*,$$

а $\overline{\psi}_k(t)$ находятся в результате последовательного решения задач Коши, отличающихся от уравнений (19) только начальными условиями для ψ_k: $\overline{\psi}_k(t_*) = \nu_k$, $k = \overline{0, N}$. Управление

$$\overline{u}^{(N)}(t, \mu) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\overline{\psi}^{(N)}(t, \mu),\ t \in \left[t_*, t_1^{(N)}(\mu)\right],$$

наряду с уравнением (17) является асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в задаче (1), (2).

Заметим, что $\overline{\psi}^{(0)}(t, \mu) = \psi^0(t)$, $t \in T^0$, и, соответственно, $\overline{u}^{(0)}(t, \mu) = u^0(t)$, $t \in T^0$, т. е. решение базовой задачи является асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в исходной задаче. Также обратим внимание на то, что при построении асимптотически субоптимального управления первого порядка можно ограничиться решением начальной задачи (21), поскольку это управление представимо в виде

$$\overline{u}^{(1)}(t, \mu) = u^0(t) + \mu u^1(t),\ t \in \left[t_*, t_1^{(1)}(\mu)\right],$$

где

$$u^1(t) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\left(\psi_1^0(t) + F_{22}(t)\nu_1\right).$$

Построенные асимптотические приближения корней системы уравнений (11) можно использовать для решения этой системы, а значит, и рассмотренной задачи при заданном значении μ. Для этого нужно применить процедуру доводки [16], т. е. найти с помощью метода Ньютона корни системы уравнений (11), взяв в качестве начального приближения $\eta^{(N)}(\mu)$.

Пример. В классе управляющих воздействий $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right)$, $t \geq t_*$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{x}_1 = \mu x_2 x_3 + u_1,\ \dot{x}_2 = \mu x_1 x_3 + u_2,\ \dot{x}_3 = -2\mu x_1 x_2 + u_3,$$

$$x_i(t_*) = \omega_i,\ x_i(t_1) = 0,\ i = \overline{1,3},$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t_1}\left(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4u_1^2 + 4u_2^2 + 4u_3^2\right)dt \to \min,$$

которая, в частности, моделирует процесс торможения вращений твердого тела, близкого к сферически симметричному [4]. В ней $0 < \mu \ll 1$. Построим асимптотически субоптимальные управления нулевого и первого порядков в этой задаче.

Предположение 2 в базовой задаче выполнено. Матрица (7) в данном случае имеет вид

$$I_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{sh}\left(\left(t_1^0 - t_*\right)/2\right) & 0 & 0 & \frac{\omega_1}{2\mathrm{sh}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right)} \\ 0 & \frac{1}{2}\mathrm{sh}\left(\left(t_1^0 - t_*\right)/2\right) & 0 & \frac{\omega_2}{2\mathrm{sh}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\mathrm{sh}\left(\left(t_1^0 - t_*\right)/2\right) & \frac{\omega_3}{2\mathrm{sh}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right)} \\ \omega_1\mathrm{cth}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right) & \omega_2\mathrm{cth}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right) & \omega_3\mathrm{cth}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right) & \frac{4\mathrm{ch}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right)\omega^2}{\mathrm{sh}^3\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right)} \end{pmatrix},$$

где $t_1^0 = t_1^0(\omega, t_*) = t_* - 2\ln\left(\sqrt{\omega^2 + 1} - \sqrt{\omega^2}\right)$, $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$, и является невырожденной. Таким образом, выполняется предположение 3.

Решением базовой задачи является управление

$$u_i^0(t) = -\frac{\mathrm{ch}\left(\left(t_1^0 - t\right)/2\right)}{2\mathrm{sh}\left(\left(t_1^0 - t_*\right)/2\right)}\omega_i,\ i = \overline{1,3},\ t \in \left[t_*, t_1^0\right], \tag{22}$$

которое представляет собой асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в исходной задаче.

Поскольку в данном случае $t_{11} = 0$, то программное асимптотически субоптимальное управление первого порядка представимо в виде

$$\overline{u}_i^{(1)}(t, \mu) = u_i^0(t, \mu) + \mu u_i^1(t),\ i = \overline{1,3},\ t \in \left[t_*, t_1^0\right],$$

где

$$u^1(t) = \left(\frac{\mathrm{ch}\left(\left(t + t_* - 2t_1^0\right)/2\right) + \mathrm{ch}\left(\left(t - t_*\right)/2\right) - \mathrm{ch}\left(t_1^0 - t\right) - 1}{2\mathrm{sh}^2\left(\left(t_1^0 - t_*\right)/2\right)}\right)\begin{pmatrix}\omega_2\omega_3 \\ \omega_1\omega_3 \\ \omega_1\omega_2\end{pmatrix}. \tag{23}$$

Из формул (22), (23) следует, что асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка имеет вид

$$u_i^{(0)}(x, t) = -\frac{1}{2}\mathrm{cth}\left(\left(t_1^0(x, t) - t\right)/2\right)x_i,\ i = \overline{1,3},$$

где $t_1^0(x, t) = t - \ln\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)$, а асимптотически субоптимальная обратная связь первого порядка совпадает с асимптотически субоптимальной обратной связью нулевого порядка.

Для оценки точности построенных асимптотических приближений были найдены состояния, в которые динамическую систему переводят программные асимптотически субоптимальные управления нулевого и первого порядков при $t_* = 0$, $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 1$ и конкретных значениях малого параметра. Результаты вычислений приведены в таблице (с точностью до 10^{-6}).

Результаты вычислений
Calculation results

Субоптимальные управления	μ = 0,1			μ = 0,01		
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
Управление нулевого порядка	0,361 197	0,060 407	0,338 947	0,027 447	0,008 893	0,050 527
Управление первого порядка	0,058 040	0,003 344	0,120 750	0,000 801	0,000 126	0,001 001

Заключение

В статье предложены и обоснованы алгоритмы построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи. Суть применяемого подхода к исследованию состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных, которые в силу принципа максимума соответствуют оптимальному управлению, и длительности процесса. Основное достоинство предлагаемых алгоритмов прежде всего состоит в том, что вместо исходной, по существу, нелинейной задачи решается задача оптимизации линейной системы. Кроме того, вычислительная процедура алгоритмов включает в себя решение начальных задач для систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем.

Библиографические ссылки

1. Красовский НН. *Теория управления движением: линейные системы.* Москва: Наука; 1968. 476 с.
2. Киселев ЮН. Асимптотическое решение задачи оптимального быстродействия для систем управления, близких к линейным. *Доклады Академии наук СССР.* 1968;182(1):31–34.
3. Falb PL, de Jong JL. *Some successive approximation methods in control and oscillation theory.* New York: Academic Press; 1969. VIII, 240 p. (Mathematics in science and engineering; volume 59).
4. Черноусько ФЛ, Акуленко ЛД, Соколов БН. *Управление колебаниями.* Москва: Наука; 1980. 383 с. (Теоретические основы технической кибернетики).
5. Калинин АИ. *Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем.* Минск: Экоперспектива; 2000. 187 с.
6. Акуленко ЛД. Оптимальное управление движениями бифилярного маятника. *Прикладная математика и механика.* 2004;68(5):793–806.
7. Калинин АИ, Лавринович ЛИ. Асимптотика решения задачи минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления.* 2019;5:32–43. DOI: 10.1134/S0002338819050056.
8. Габасов Р, Калинин АИ, Кириллова ФМ, Лавринович ЛИ. К асимптотическим методам оптимизации квазилинейных систем управления. *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2019;25(3):62–72. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-62-72.
9. Калинин АИ. Асимптотическая оптимизация возмущенных динамических систем. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2016;3:143–147.
10. Понтрягин ЛС, Болтянский ВГ, Гамкрелидзе РВ, Мищенко ЕФ. *Математическая теория оптимальных процессов.* 4-е издание. Москва: Наука; 1983. 392 с.
11. Габасов Р, Кириллова ФМ. *Оптимизация линейных систем: методы функционального анализа.* Минск: Издательство БГУ; 1973. 246 с.
12. Мордухович БШ. Существование оптимальных управлений. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.* 1976;6:207–271.
13. Калинин АИ. О проблеме синтеза оптимальных систем управления. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2018;58(3):397–402. DOI: 10.7868/S0044466918030079.
14. Калинин АИ. Метод возмущений для асимптотического решения квазилинейной задачи оптимального быстродействия. *Дифференциальные уравнения.* 1990;26(4):585–594.
15. Калинин АИ. Оптимизация квазилинейных систем управления. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1988;28(3):325–334.
16. Габасов Р, Кириллова ФМ. *Конструктивные методы оптимизации. Часть 2. Задачи управления.* Минск: Университетское; 1984. 207 с.

References

1. Krasovskii NN. *Teoriya upravleniya dvizheniem: lineinye sistemy* [Theory of control of motion: linear systems]. Moscow: Nauka; 1968. 476 p. Russian.
2. Kiselev YuN. [Asymptotic solution of time-optimal problem for near-linear control systems]. *Doklady Akademii nauk SSSR.* 1968;182(1):31–34. Russian.

3. Falb PL, de Jong JL. *Some successive approximation methods in control and oscillation theory.* New York: Academic Press; 1969. VIII, 240 p. (Mathematics in science and engineering; volume 59).

4. Chernous'ko FL, Akulenko LD, Sokolov BN. *Upravlenie kolebaniyami* [Control of oscillations]. Moscow: Nauka; 1980. 383 p. (Teoreticheskie osnovy tekhnicheskoi kibernetiki). Russian.

5. Kalinin AI. *Asimptoticheskie metody optimizatsii vozmushchennykh dinamicheskikh sistem* [Asymptotic methods for optimisation of disturbed dynamical systems]. Minsk: Ekoperspektiva; 2000. 187 p. Russian.

6. Akulenko LD. [Optimal control of motions of a bifilar pendulum]. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 2004;68(5):793–806. Russian.

7. Kalinin AI, Lavrinovich LI. [Asymptotics of the solution to the minimisation problem of the integral quadratic performance index on trajectories of a quasi-linear system]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya.* 2019;5:32–43. Russian. DOI: 10.1134/S0002338819050056.

8. Gabasov R, Kalinin AI, Kirillova FM, Lavrinovich LI. On asymptotic optimization methods for quasilinear control systems. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN.* 2019;25(3):62–72. Russian. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-62-72.

9. Kalinin AI. Asymptotic optimization of perturbed dynamical systems. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2016;3:143–147. Russian.

10. Pontryagin LS, Boltyanskii VG, Gamkrelidze RV, Mishchenko EF. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. 4th edition. Moscow: Nauka; 1983. 392 p. Russian.

11. Gabasov R, Kirillova FM. *Optimizatsiya lineinykh sistem: metody funktsional'nogo analiza* [Optimisation of linear systems: functional analysis methods]. Minsk: Publishing House of the Belarusian State University; 1973. 246 p. Russian.

12. Mordukhovich BSh. [Existence of optimal controls]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki.* 1976;6:207–271. Russian.

13. Kalinin AI. [To the synthesis of optimal control systems]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki.* 2018; 58(3):397–402. Russian. DOI: 10.7868/S0044466918030079.

14. Kalinin AI. [An algorithm for the asymptotic solution of a singularly perturbed non-linear time-optimality problem]. *Differentsial'nye uravneniya.* 1990;26(4):585–594. Russian.

15. Kalinin AI. [Optimisation of quasi-linear control systems]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki.* 1988; 28(3):325–334. Russian.

16. Gabasov R, Kirillova FM. *Konstruktivnye metody optimizatsii. Chast' 2. Zadachi upravleniya* [Constructive optimisation methods. Part 2. Control problems]. Minsk: Universitetskoe; 1984. 207 p. Russian.

Получена 29.03.2022 / исправлена 02.06.2022 / принята 02.06.2022.
Received 29.03.2022 / revised 02.06.2022 / accepted 02.06.2022.