УДК 517.956.3

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОБ АБСОЛЮТНО НЕУПРУГОМ УДАРЕ ПО ДЛИННОМУ УПРУГОМУ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМУ СТЕРЖНЮ С ЛИНЕЙНЫМ УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ НА КОНЦЕ

В. И. КОРЗЮК[1), 2)]***, Я. В. РУДЬКО***[2), 3)]

[1)]*Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь*
[2)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[3)]*Открытые информационные системы, ул. Великий Гостинец, 143б, 222310, г. Молодечно, Беларусь*

Изучается классическое решение смешанной задачи в четверти плоскости для одномерного волнового уравнения, которая моделирует распространение волн смещений при продольном ударе по стержню, когда груз остается в соприкосновении со стержнем и стержень имеет линейный упругий элемент на конце. На нижнем основании задаются условия Коши, причем второе из них имеет разрыв первого рода в точке. На боковой границе задается граничное условие, содержащее неизвестную функцию и ее частные производные первого и второго порядков. Решение строится методом характеристик в явном аналитическом виде. Доказывается его единственность и устанавливаются условия, при которых существует кусочно-гладкое решение. Рассматривается задача с условиями сопряжения.

Ключевые слова: одномерное волновое уравнение; неоднородное уравнение; смешанная задача; негладкие краевые условия; продольный удар; метод характеристик.

CLASSICAL SOLUTION OF ONE PROBLEM OF A PERFECTLY INELASTIC IMPACT ON A LONG ELASTIC SEMI-INFINITE BAR WITH A LINEAR ELASTIC ELEMENT AT THE END

V. I. KORZYUK[a, b]***, J. V. RUDZKO***[b, c]

[a]*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, 11 Surhanava Street, Minsk 220072, Belarus*
[b]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[c]*Otkrytye informatsionnye sistemy, 143b Vialiki Hasciniec Street, Maladziečna 222310, Belarus*

Corresponding author: J. V. Rudzko (janycz@yahoo.com)

In this article, we study the classical solution of the mixed problem in a quarter of a plane for a one-dimensional wave equation. This mixed problem models the propagation of displacement waves during a longitudinal impact on a bar, when the load remains in contact with the bar and the bar has a linear elastic element at the end. On the lower boundary, the

Образец цитирования:
Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню с линейным упругим элементом на конце. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:34–46.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-34-46

For citation:
Korzyuk VI, Rudzko JV. Classical solution of one problem of a perfectly inelastic impact on a long elastic semi-infinite bar with a linear elastic element at the end. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:34–46. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-34-46

Авторы:
Виктор Иванович Корзюк – академик НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник отдела математической физики[1)], профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета[2)].
Ян Вячеславович Рудько – математик-программист[3)].

Authors:
Viktor I. Korzyuk, academician of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (physics and mathematics), full professor; chief researcher at the department of mathematical physics[a] and professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics[b].
korzyuk@bsu.by
Jan V. Rudzko, mathematician-programmer[c].
janycz@yahoo.com
https://orcid.org/0000-0002-1482-9106

Cauchy conditions are specified, and the second of them has a discontinuity of the first kind at one point. The boundary condition, including the unknown function and its first and second order partial derivatives, is set at the side boundary. The solution is built using the method of characteristics in an explicit analytical form. The uniqueness is proven and the conditions are established under which a piecewise-smooth solution exists. The problem with matching conditions is considered.

Keywords: one-dimensional wave equation; inhomogeneous equation; mixed problem; non-smooth boundary conditions; longitudinal impact; method of characteristics.

Введение

Основное явление в теории механического удара – это распространение волн смещений в твердых телах. Экспериментальное изучение почти всех явлений удара весьма затруднительно. При аналитическом изучении вызванных ударом колебаний интерес представляют задачи, где рассматриваются и описываются колебательные процессы, при которых груз после удара остается в соприкосновении с ударяемым телом [1; 2]. Как правило, математические модели подобных явлений представляют собой смешанные задачи для уравнений с частными производными с граничными условиями в начальный момент времени рассматриваемого процесса колебаний, которые отличны от нуля на множестве нулевой меры [3–6].

Настоящая работа посвящена построению и исследованию свойств решения одномерной смешанной задачи, содержащей в граничном условии функцию и ее производные первого и второго порядков, для неоднородного волнового уравнения с заданными разрывными условиями. Указанная задача исследуется методом характеристик [7; 8].

Близкими к данной работе являются статьи [6; 9–13].

Постановка задачи

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ упругий полубесконечный однородный стержень постоянного поперечного сечения, конец которого $x = 0$ имеет упругое закрепление, подвергся продольному удару некоторым грузом по концу $x = 0$, причем в дальнейшем груз остался в соприкосновении со стержнем (т. е. удар был абсолютно неупругим). Кроме того, полагаем, что на стержень действует внешняя объемная сила, а смещения точек стержня и скорость их изменения в начальный момент времени не равны нулю. Тогда, пренебрегая весом стержня как силой и его возможными вертикальными отклонениями, для определения смещений u находим решение волнового уравнения в области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}^2$

$$\left(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2\right)u(t, x) = f(t, x), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$u(0, x) = \varphi(x),\ x \in [0, \infty),\ \partial_t u(0, x) = \psi(x) = \begin{cases} \psi_1,\ x = 0, \\ \psi_2(x),\ x \in (0, \infty), \end{cases} \tag{2}$$

и граничному условию

$$\left(\partial_t^2 + b^2\partial_x + c^2\right)u(t, 0) = \mu(t) = \begin{cases} \mu_1,\ t = 0, \\ \mu_2(t),\ t \in (0, \infty). \end{cases} \tag{3}$$

В задаче (1)–(3) $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, $b^2 = \dfrac{SE}{M}$, $c^2 = \dfrac{k}{M}$, где $E > 0$ – модуль упругости стержня; $\rho > 0$ – плотность материала стержня; $S > 0$ – площадь поперечного сечения стержня; $M > 0$ – масса ударившего груза; $k > 0$ – коэффициент жесткости линейного упругого элемента, к которому прикреплен конец $x = 0$ стержня. Величина $\psi_2(0+) - \psi_1$ имеет физический смысл скорости ударяющего груза, а величина $\mu(t)$ – воздействующей на конец стержня внешней силы, деленной на массу ударившего груза, причем величина μ_1 не задается произвольно [14], а зависит от функций f, φ, ψ и будет определена далее.

Будем полагать, что функции f, φ, ψ_2, μ_2 достаточно гладкие, а именно $f \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi_2 \in C^1([0, \infty))$, $\mu_2 \in C^1([0, \infty))$, и для определенности $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Построение решения

Для построения решения задачи (1)–(3) рассмотрим вспомогательную задачу для волнового уравнения (1) на замыкании $\bar{Q}$ области Q. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$u(0, x) = \varphi(x),\ x \in [0, \infty),\ \partial_t u(0, x) = \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x),\ x \in [0, x^*),\ x^* > 0, \\ \tilde{\psi}_2(x),\ x \in (x^*, \infty), \end{cases} \quad (4)$$

и граничное условие

$$\left(\partial_t^2 + b^2\partial_x + c^2\right)u(t, 0) = \tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \tilde{\mu}_1(t),\ t \in \left(0, \dfrac{x^*}{a}\right), \\ \tilde{\mu}_2(t),\ t \in \left(\dfrac{x^*}{a}, \infty\right). \end{cases} \quad (5)$$

При этом полагаем, что $\tilde{\psi}_1 \in C^1\left(\left[0, x^*\right]\right)$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1\left(\left[x^*, \infty\right)\right)$, $\tilde{\psi}_2(x) = \psi_2(x)$ для $x \in \left(x^*, \infty\right)$, $\tilde{\psi}_1(0) = \psi_1$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0, \dfrac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\dfrac{x^*}{a}, \infty\right)\right)$, $\tilde{\mu}_2(t) = \mu_2(t)$ для $t \in \left(\dfrac{x^*}{a}, \infty\right)$, $\tilde{\mu}_1(0) = \mu_1$.

Как известно, общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения [7]. Пусть $w : \bar{Q} \to \mathbb{R}$ – частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее однородным условиям Коши $w(0, x) = \partial_t w(0, x) = 0$ и $\partial_t^2 w(0, x) = f(0, x)$. Такое решение w существует [7; 8; 15], и оно имеет вид [15]

$$w(t, x) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x - a(t-\tau)}^{x + a(t-\tau)} f(\tau, |\lambda|)\, d\lambda. \quad (6)$$

Если $f \in C^1(\bar{Q})$, то $w \in C^2(\bar{Q})$.

Тогда общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$u(t, x) = w(t, x) + g^{(1)}(x - at) + g^{(2)}(x + at), \quad (7)$$

где $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ – некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции. Для построения решения разделим область Q на шесть подобластей (см. рисунок):

$$Q^{(1)} = Q \cap \left\{(t, x) \,\middle|\, x + at < x^*,\ x - at < x^*,\ x - at > 0\right\},$$

$$Q^{(2)} = Q \cap \left\{(t, x) \,\middle|\, x + at > x^*,\ x - at > x^*,\ x - at > 0\right\},$$

$$Q^{(3)} = Q \cap \left\{(t, x) \,\middle|\, x + at > x^*,\ x - at < x^*,\ x - at > 0\right\},$$

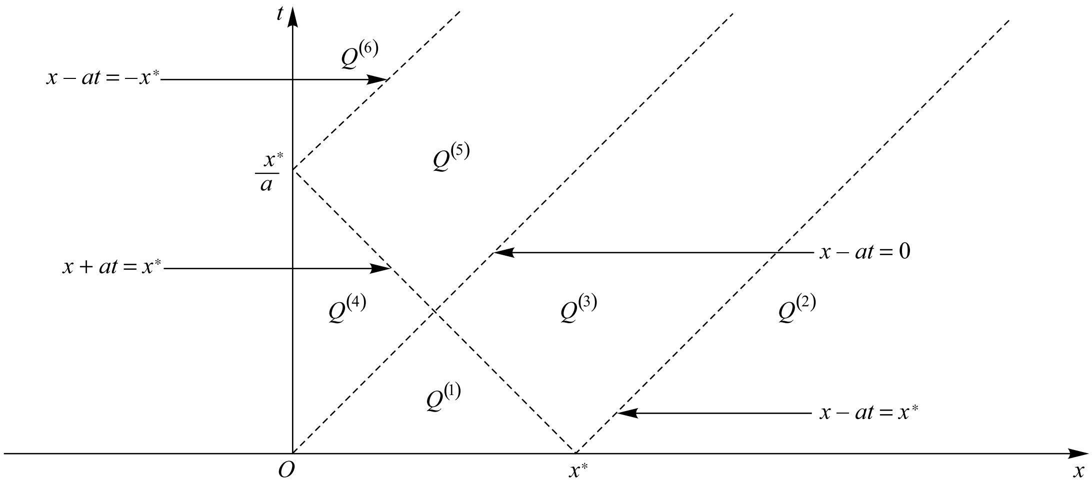
$$Q^{(4)} = Q \cap \left\{(t, x) \,\middle|\, x + at < x^*,\ x - at < x^*,\ x - at < 0\right\},$$

$$Q^{(5)} = Q \cap \left\{(t, x) \,\middle|\, x + at > x^*,\ x - at > -x^*,\ x - at < 0\right\},$$

$$Q^{(6)} = Q \cap \left\{(t, x) \,\middle|\, x - at < -x^*\right\}.$$

Определим функции $u^{(i)}$ как локальные решения задачи (1), (4), (5) в подобластях $Q^{(i)}, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Пусть

$$u(t, x) = u^{(i)}(t, x),\ \ i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ \ (t, x) \in Q^{(i)}. \quad (8)$$



Разделение области Q характеристиками $x - at = 0$, $x + at = x^*$, $x - at = x^*$ и $x - at = -x^*$ на шесть подобластей ($Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, $Q^{(5)}$ и $Q^{(6)}$)
Division of the domain Q by the characteristics $x - at = 0$, $x + at = x^*$, $x - at = x^*$ and $x - at = -x^*$ into six subdomains ($Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, $Q^{(5)}$ and $Q^{(6)}$)

В силу разрыва во втором из начальных условий задача (1), (4), (5) не имеет классического решения, определенного на всем множестве $\bar{Q}$. Но тем не менее можно определить классическое решение задачи (1), (4), (5) на меньшем множестве $\bar{Q} \backslash \Gamma$ так, чтобы функция u удовлетворяла начальным и граничным условиям, принадлежала классу $C^2\left(\bar{Q} \backslash \Gamma\right)$ и на Γ задавались дополнительные условия согласования.

Определение 1. Функцию u, определяемую формулой (8), назовем классическим решением задачи (1), (4), (5), если $u^{(j)} \in C^2\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$ для каждого $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, функция $u^{(j)}$ удовлетворяет уравнению (1) в подобластях $Q^{(j)}$, функция u – первому из условий Коши (4), функция $u^{(1)}$ – второму из условий Коши (4) на полуоткрытом отрезке $\left[0, x^*\right)$, функция $u^{(2)}$ – этому же условию на полупрямой $\left(x^*, \infty\right)$, а функции $u^{(4)}$ и $u^{(6)}$ – граничному условию (5) на множествах $\left[0, \frac{x^*}{a}\right)$ и $\left(\frac{x^*}{a}, \infty\right)$ соответственно. Кроме того, функция u должна принадлежать классу $C\left(\bar{Q}\right)$, а ее частные производные первого порядка должны удовлетворять следующим условиям сопряжения:

$$\left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right](t, at) = \left[\left(\partial_x u\right)^+ - \left(\partial_x u\right)^-\right](t, at) =$$
$$= \left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right]\left(t, at - x^*\right) = \left[\left(\partial_x u\right)^+ - \left(\partial_x u\right)^-\right]\left(t, at - x^*\right) = 0.$$

Здесь использованы обозначения $(\ )^{\pm}$ – предельные значения функции u и ее производных ∂_t, ∂_t^2 с разных сторон на характеристиках вида $x = r(t)$, т. е. $\left(\partial_t^p u\right)^{\pm}\left(t, r(t)\right) = \lim\limits_{\Delta t \to 0+} \partial_t^p u\left(t, r(t) \pm \Delta t\right)$, где $p = 1, 2$ и r – функция действительного переменного.

Определение 2. Функцию u из класса

$$C\left(\bar{Q}\right) \cap C^2\left(\bar{Q} \cap \left\{(t, x) \middle| x - at > 0\right\}\right) \cap C^2\left(\bar{Q} \cap \left\{(t, x) \middle| x - at < 0\right\}\right)$$

назовем классическим решением задачи (1)–(3), если она и ее частные производные первого и второго порядков (там, где существуют) являются поточечным пределом классических решений задачи (1), (4), (5) и их частных производных первого и второго порядков соответственно при $x^* \to 0$.

В силу представления (7) имеем

$$u^{(i)}(t, x) = w(t, x) + g^{(1, i)}(x - at) + g^{(2, i)}(x + at),\ i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ (t, x) \in Q^{(i)}, \tag{9}$$

где $g^{(1, i)}$ и $g^{(2, i)}$ – некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Удовлетворяя условия Коши в подобластях $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$, получаем формулы

$$\begin{aligned}
&g^{(1,1)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{x^*}^{x}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + C^{(1)},\ x \in \left(0,\ x^*\right),\\
&g^{(2,1)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x^*}^{x}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi - C^{(1)},\ x \in \left(0,\ x^*\right),\\
&g^{(1,2)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{x^*}^{x}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi + C^{(2)},\ x \in \left(x^*,\ \infty\right),\\
&g^{(2,2)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x^*}^{x}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi - C^{(2)},\ x \in \left(x^*,\ \infty\right),
\end{aligned} \tag{10}$$

где $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ – произвольные постоянные из множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Тогда функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ примут вид

$$\begin{aligned}
&u^{(1)}(t,\ x) = w(t,\ x) + \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi,\ (t,\ x) \in Q^{(1)},\\
&u^{(2)}(t,\ x) = w(t,\ x) + \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi,\ (t,\ x) \in Q^{(2)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Из формул (11) видно, что функции $u^{(j)}$ принадлежат классу дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^2\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$, $j = 1, 2$, если, например, $\varphi \in C^2([0,\ \infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1\left(\left[0,\ x^*\right]\right)$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1\left(\left[x^*,\ \infty\right]\right)$, $f \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, где $\overline{Q^{(j)}}$ и $\overline{Q}$ – замыкания подобластей $Q^{(j)}$ и области Q соответственно. Кроме того, функция $u^{(1,2)}(t,\ x) = u^{(j)}(t,\ x)$, $(t,\ x) \in \overline{Q^{(j)}}$, является непрерывной на части границы $\gamma^{(1,3)} \cup \gamma^{(2,3)}$ подобласти $Q^{(3)}$, где $\gamma^{(j,3)} = \overline{Q^{(j)}} \cap \overline{Q^{(3)}}$, $j = 1, 2$. Учитывая данный факт, функцию $u^{(3)}$ определяем как решение в подобласти $Q^{(3)}$ с условиями на характеристиках.

Согласно представлению (9) и формулам (11) имеем равенства

$$\begin{aligned}
&g^{(1,3)}\left(x^*\right) + g^{(2,3)}\left(x^* + 2at\right) = \frac{1}{2}\left(\varphi\left(x^* + 2at\right) + \varphi\left(x^*\right)\right) +\\
&\quad + \frac{1}{2a}\int\limits_{x^*}^{x^*+2at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi + C^{(1)} - C^{(2)},\ t \in [0,\ \infty),\\
&g^{(1,3)}\left(x^* - 2at\right) + g^{(2,3)}\left(x^*\right) = \frac{1}{2}\left(\varphi\left(x^* - 2at\right) + \varphi\left(x^*\right)\right) +\\
&\quad + \frac{1}{2a}\int\limits_{x^*-2at}^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + C^{(1)} - C^{(2)},\ t \in [0,\ \infty).
\end{aligned} \tag{12}$$

Соотношение (9) для $i = 3$ и равенства (12) в совокупности определяют функцию $u^{(3)}$:

$$\begin{aligned}
&u^{(3)}(t,\ x) = w(t,\ x) + \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} +\\
&+ \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_{x^*}^{x+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi + C^{(1)} - C^{(2)},\ (t,\ x) \in \overline{Q^{(3)}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

В подобласти $Q^{(4)}$ находим решение $u^{(4)}$ уравнения (1). Согласно представлению (8) и граничному условию (5)

$$\left(\partial_t^2 + b^2\partial_x + c^2\right)u(t,\,0) = b^2\left(\partial_x w(t,\,0) + Dg^{(1,\,4)}(-at) + Dg^{(2,\,4)}(at)\right) + \partial_t^2 w(t,\,0) +$$
$$+\, c^2\left(w(t,\,0) + g^{(1,\,4)}(-at) + g^{(2,\,4)}(at)\right) + a^2\left(D^2 g^{(1,\,4)}(-at) + D^2 g^{(2,\,4)}(at)\right) = \tilde{\mu}_1(t),\ t \in \left(0,\,\frac{x^*}{a}\right).$$

Отсюда имеем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $g^{(1,\,4)}$

$$c^2\left(w\left(-\frac{z}{a},\,0\right) + g^{(1,\,4)}(z) + g^{(2,\,4)}(-z)\right) + a^2\left(D^2 g^{(1,\,4)}(z) + a^2 D^2 g^{(2,\,4)}(-z)\right) +$$
$$+\, b^2\left(\partial_x w\left(-\frac{z}{a},\,0\right) + Dg^{(1,\,4)}(z) + Dg^{(2,\,4)}(-z)\right) = \tilde{\mu}_1\left(-\frac{z}{a}\right) - \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a},\,0\right),\ z \in \left(-x^*,\,0\right). \tag{14}$$

В представлении решения (7) функция $g^{(2)}$ должна быть определена для всех положительных значений аргумента. Она определена уже согласно формулам (10). Поэтому для $z \in \left(-x^*,\,0\right)$ в выражении (14) полагаем $g^{(2,\,4)}(-z) = g^{(2,\,1)}(-z)$. Таким образом, уравнение (14) рассматриваем как дифференциальное уравнение относительно функции $g^{(1,\,4)}$ на отрезке $z \in \left[-x^*,\,0\right]$. С помощью формул (10) через значения функций $g^{(1,\,1)}$ и $g^{(1,\,2)}$ функция $g^{(1)}$ представления (7) определена для положительных значений аргумента. Учитывая непрерывность функции $g^{(1)}$ в целом, должны выполняться условия

$$\begin{gathered} g^{(1,\,4)}(0) = \varphi^{(0)} = g^{(1,\,1)}(0) = C^{(1)} + \frac{\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)\,d\xi, \\ Dg^{(1,\,4)}(0) = \varphi^{(0)} = Dg^{(1,\,1)}(0) = \frac{1}{2}D\varphi(0) - \frac{1}{2a}\tilde{\psi}_1(0). \end{gathered} \tag{15}$$

Уравнение (14) относительно функции $g^{(1,\,4)}$ вместе с условиями (15) рассматриваем как задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Решая эту задачу, получаем

$$g^{(1,\,4)}(z) = \exp\left(-\frac{b^2 z}{2a^2}\right)\left(\varphi^{(0)}\mathrm{ch}\left(\frac{z\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) + \frac{b^2\varphi^{(0)} + 2a^2\psi^{(0)}}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\mathrm{sh}\left(\frac{z\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)\right) +$$
$$+\int_0^z \frac{2\mathcal{M}_4(\xi)}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\exp\left(\frac{b^2(\xi - z)}{2a^2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{(z-\xi)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)d\xi, \tag{16}$$

где

$$\mathcal{M}_4(z) = \tilde{\mu}_1\left(-\frac{z}{a}\right) - \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a},\,0\right) - b^2\left(\partial_x w\left(-\frac{z}{a},\,0\right) + Dg^{(2,\,4)}(-z)\right) -$$
$$-\, c^2\left(w\left(-\frac{z}{a},\,0\right) + g^{(2,\,4)}(-z)\right) - a^2 D^2 g^{(2,\,4)}(-z),\ z \in \left(-x^*,\,0\right).$$

В результате имеем

$$u^{(4)}(t,\,x) = \int_0^{x-at}\frac{2\mathcal{M}_4(\xi)}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\exp\left(\frac{b^2(\xi - (x-at))}{2a^2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{(x - at - \xi)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)d\xi +$$
$$+\exp\left(-\frac{b^2(x-at)}{2a^2}\right)\left(\varphi^{(0)}\,\mathrm{ch}\left(\frac{(x-at)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) + \frac{b^2\varphi^{(0)} + 2a^2\psi^{(0)}}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\mathrm{sh}\left(\frac{(x-at)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)\right) +$$
$$+\,\frac{\varphi(x+at)}{2} + w(t,\,x) + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x+at}\tilde{\psi}_1(\xi)\,d\xi - C^{(1)},\ (t,\,x) \in Q^{(4)}. \tag{17}$$

Поскольку области определения по внешнему аргументу функций $g^{(1,5)}$ и $g^{(1,4)}$ совпадают, то в представлении (9) для $i = 5$ полагаем $g^{(1,5)}(x - at) = g^{(1,4)}(x - at)$ для $(t, x) \in Q^{(5)}$. По этой же причине полагаем $g^{(2,5)}(x + at) = g^{(2,2)}(x + at)$ для $(t, x) \in Q^{(5)}$. В силу формул (9), (10) и (16) получаем решение $u^{(5)}$ в подобласти $Q^{(5)}$ в виде

$$u^{(5)}(t, x) = \int_0^{x-at} \frac{2\mathcal{M}_4(\xi)}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}} \exp\left(\frac{b^2(\xi - (x - at))}{2a^2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(x - at - \xi)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) d\xi +$$

$$+ \exp\left(-\frac{b^2(x - at)}{2a^2}\right)\left(\varphi^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{(x - at)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) + \frac{b^2\varphi^{(0)} + 2a^2\psi^{(0)}}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}} \operatorname{sh}\left(\frac{(x - at)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)\right) +$$

$$+ \frac{\varphi(x + at)}{2} + w(t, x) + \frac{1}{2a} \int_{x^*}^{x+at} \tilde{\psi}_2(\xi) d\xi - C^{(2)}, \ (t, x) \in Q^{(5)}. \tag{18}$$

В подобласти $Q^{(6)}$ решение $u^{(6)}$ построим так, чтобы оно было непрерывно дифференцируемым при переходе через характеристику $x - at = -x^*$. Это можно сделать следующим образом. Согласно представлению (9) функция $u^{(6)}$ определяется через значения функций $g^{(1,6)}$ и $g^{(2,6)}$. Заметим, что для $(t, x) \in Q^{(6)}$ справедливы соотношения $x - at \in (-\infty, -x^*)$, $x + at \in (x^*, \infty)$. Согласно формулам (10) функция $g^{(2)}$ частично определена через $g^{(2,2)}$ для $x + at \in (x^*, \infty)$. Поэтому $g^{(2,6)}(x + at) = g^{(2,2)}(x + at)$ для всех $(t, x) \in Q^{(6)}$. Осталось определить $g^{(1,6)}(x - at)$ для $(t, x) \in Q^{(6)}$, т. е. $g^{(1,6)}(z)$ для $z \in (-\infty, -x^*)$. Это можно сделать исходя из требований, в соответствии с которыми функция $u^{(6)}$ должна удовлетворять условию (5), а функция

$$u^{(5,6)}(t, x) = \begin{cases} u^{(5)}(t, x), \ (t, x) \in \overline{Q^{(5)}}, \\ u^{(6)}(t, x), \ (t, x) \in \overline{Q^{(6)}}, \end{cases}$$

должна принадлежать классу $C^1\left(\overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}}\right)$, предполагая при этом, что $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0, x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*, \infty])$, $f \in C^1(\overline{Q})$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0, \frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a}, \infty\right)\right)$. Удовлетворяя условие (3), для определения функции $g^{(1,6)}$ получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$c^2\left(w\left(-\frac{z}{a}, 0\right) + g^{(1,6)}(z) + g^{(2,6)}(-z)\right) + a^2\left(D^2 g^{(1,6)}(z) + a^2 D^2 g^{(2,6)}(-z)\right) +$$

$$+ b^2\left(\partial_x w\left(-\frac{z}{a}, 0\right) + Dg^{(1,6)}(z) + Dg^{(2,6)}(-z)\right) = \tilde{\mu}_2\left(-\frac{z}{a}\right) - \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a}, 0\right), \ z \in (-\infty, -x^*). \tag{19}$$

Из требования $u^{(5,6)} \in C^1\left(\overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}}\right)$ имеем условия

$$g^{(1,6)}(-x^*) = g^{(1,4)}(-x^*), \ Dg^{(1,6)}(-x^*) = Dg^{(1,4)}(-x^*). \tag{20}$$

Решая задачу Коши (19), (20) относительно функции $g^{(1,6)}$, получаем

$$g^{(1,6)}(z) = \exp\left(-\frac{b^2 z}{2a^2}\right)\left(\varphi^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{z\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) + \frac{b^2\varphi^{(0)} + 2a^2\psi^{(0)}}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}} \operatorname{sh}\left(\frac{z\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)\right) +$$

$$+ \int_0^z \frac{2\mathcal{M}_6(\xi)}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}} \exp\left(\frac{b^2(\xi - z)}{2a^2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(z - \xi)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) d\xi, \tag{21}$$

где

$$\mathcal{M}_6(z)=\begin{cases}\tilde{\mu}_1\left(-\frac{z}{a}\right)-\partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a},\,0\right)-a^2D^2g^{(2,\,4)}(-z)-b^2Dg^{(2,\,4)}(-z)-\\ -b^2\partial_x w\left(-\frac{z}{a},\,0\right)-c^2\left(w\left(-\frac{z}{a},\,0\right)+g^{(2,\,4)}(-z)\right),\ z\in\left(-x^*,\,0\right),\\ \tilde{\mu}_2\left(-\frac{z}{a}\right)-\partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a},\,0\right)-a^2D^2g^{(2,\,6)}(-z)-b^2Dg^{(2,\,6)}(-z)-\\ -b^2\partial_x w\left(-\frac{z}{a},\,0\right)-c^2\left(w\left(-\frac{z}{a},\,0\right)+g^{(2,\,6)}(-z)\right),\ z\in\left(-\infty,\,-x^*\right).\end{cases}$$

В соотношении (21) полагаем $g^{(2,\,6)}(-z)=g^{(2,\,2)}(-z)$. В результате получаем

$$u^{(6)}(t,\,x)=\int\limits_0^{x-at}\frac{2\mathcal{M}_6(\xi)}{\sqrt{b^4-4a^2c^2}}\exp\left(\frac{b^2\left(\xi-(x-at)\right)}{2a^2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{(x-at-\xi)\sqrt{b^4-4a^2c^2}}{2a^2}\right)d\xi+$$

$$+\exp\left(-\frac{b^2(x-at)}{2a^2}\right)\left(\varphi^{(0)}\mathrm{ch}\left(\frac{(x-at)\sqrt{b^4-4a^2c^2}}{2a^2}\right)+\frac{b^2\varphi^{(0)}+2a^2\psi^{(0)}}{\sqrt{b^4-4a^2c^2}}\mathrm{sh}\left(\frac{(x-at)\sqrt{b^4-4a^2c^2}}{2a^2}\right)\right)+$$

$$+\frac{\varphi(x+at)}{2}+w(t,\,x)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x^*}^{x+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi-C^{(2)},\ (t,\,x)\in Q^{(6)}.\qquad(22)$$

Выясним, что представляет собой разность $C^{(1)}-C^{(2)}$ в формуле (12). Для этого воспользуемся начальными условиями в точке $x=x^*$. Возьмем точку $(t,\,x)\in Q^{(3)}$ и будем устремлять ее к точке $\left(0,\,x^*\right)$:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to x^*}}u^{(3)}(t,\,x)=\varphi\left(x^*\right)+C^{(1)}-C^{(2)}=\varphi\left(x^*\right).\qquad(23)$$

Из формулы (23) имеем, что $C^{(1)}-C^{(2)}=0$, следовательно, $C^{(1)}=C^{(2)}$.

Покажем, что функции $u^{(4)}$, $u^{(5)}$ и $u^{(6)}$, определенные формулами (17), (18) и (22), не зависят от выбора констант интегрирования $C^{(1)}$ и $C^{(2)}=C^{(1)}$. Из представлений (17), (18) и (22) следует, что функции $u^{(4)}$, $u^{(5)}$ и $u^{(6)}$ являются непрерывно дифференцируемыми, если рассматривать их как функции от констант $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$. Теперь, подставляя $C^{(2)}=C^{(1)}$ в формулы (17), (18) и (22), получаем

$$\frac{\partial\left(u^{(4)}\big|_{C^{(2)}=C^{(1)}}\right)}{\partial C^{(1)}}=\frac{\partial\left(u^{(5)}\big|_{C^{(2)}=C^{(1)}}\right)}{\partial C^{(1)}}=\frac{\partial\left(u^{(6)}\big|_{C^{(2)}=C^{(1)}}\right)}{\partial C^{(1)}}=0.$$

Действительно, функции $u^{(4)}$, $u^{(5)}$ и $u^{(6)}$ не зависят от выбора константы $C^{(1)}$. Здесь было использовано обозначение $\tilde{v}=v\big|_{X=\beta}$ – применение функции к части аргументов, которое преобразует функцию $v:X\times Y\ni(x,\,y)\mapsto z\in Z$ в функцию $\tilde{v}:Y\ni y\mapsto z\in Z$ по формуле $\tilde{v}(y)=v(\beta,\,y)$.

Гладкость решения

Если $f\in C^1\left(\bar{Q}\right),\varphi\in C^2\left([0,\,\infty)\right),\tilde{\psi}_1\in C^1\left(\left[0,\,x^*\right]\right),\tilde{\psi}_2\in C^1\left(\left[x^*,\,\infty\right]\right),\tilde{\mu}_1\in C^1\left(\left[0,\,\frac{x^*}{a}\right]\right),\tilde{\mu}_2\in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a},\,\infty\right)\right)$, то из формул (11), (13), (17), (18) и (22) следует, что $u^{(j)}\in C^2\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$, $j=1,\,2,\,\ldots,\,6$.

Теорема 1. *Если выполняются условия гладкости* $f \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, $\varphi \in C^2\left(\left[0, \infty\right)\right)$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1\left(\left[0, x^*\right]\right)$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1\left(\left[x^*, \infty\right]\right)$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0, \frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a}, \infty\right)\right)$ *для заданных функций, то существует единственное классическое решение задачи (1), (4), (5) в смысле определения 1, и оно представляется формулами (6), (8), (11), (13), (17), (18) и (22).*

Доказательство следует из формул (6), (8), (11), (13), (17), (18) и (22). Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции удовлетворяют уравнению (1), условиям (4), (5) и определению 1. Единственность доказывается методом от противного. Предположим, что существуют два решения. Тогда для их разности получаем однородное уравнение (1) и однородные условия (4), (5), из которых следует нулевое решение согласно формулам (6), (8), (11), (13), (17), (18) и (22).

Исследуем разрыв частных производных первого и второго порядков на границах подобластей $Q^{(i)}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Частные производные решения u задачи (1), (4), (5) имеют разрывы на характеристиках $x - at = 0$, $x \pm at = x^*$ и $x - at = -x^*$, которые определяются через значения заданных функций $u^{(j)}$, $j = 1, \ldots, 6$, следующим образом:

1) частные производные первого порядка имеют разрывы

$$\left(\partial_t u^{(2)} - \partial_t u^{(3)}\right)\left(t,\ x = x^* + at\right) = \frac{\delta\psi}{2},\ \left(\partial_t u^{(3)} - \partial_t u^{(1)}\right)\left(t,\ x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi}{2},$$

$$\left(\partial_t u^{(5)} - \partial_t u^{(4)}\right)\left(t,\ x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi}{2},\ \left(\partial_t u^{(5)} - \partial_t u^{(6)}\right)\left(t,\ x = at - x^*\right) = 0,$$

$$\left(\partial_x u^{(2)} - \partial_x u^{(3)}\right)\left(t,\ x = x^* + at\right) = -\frac{\delta\psi}{2a},\ \left(\partial_x u^{(3)} - \partial_x u^{(1)}\right)\left(t,\ x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi}{2a},$$

$$\left(\partial_x u^{(5)} - \partial_x u^{(4)}\right)\left(t,\ x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi}{2a},\ \left(\partial_x u^{(5)} - \partial_x u^{(6)}\right)\left(t,\ x = at - x^*\right) = 0$$

на характеристиках $x \pm at = x^*$ и $x - at = -x^*$;

2) частные производные второго порядка имеют разрывы

$$\left(\partial_t^2 u^{(2)} - \partial_t^2 u^{(3)}\right)\left(t,\ x = x^* + at\right) = -\frac{a\delta\psi^{(1)}}{2},\ \left(\partial_t^2 u^{(3)} - \partial_t^2 u^{(1)}\right)\left(t,\ x = x^* - at\right) = \frac{a\delta\psi^{(1)}}{2},$$

$$\left(\partial_t^2 u^{(5)} - \partial_t^2 u^{(4)}\right)\left(t,\ x = x^* - at\right) = \frac{a\delta\psi^{(1)}}{2},\ \left(\partial_t^2 u^{(5)} - \partial_t^2 u^{(6)}\right)\left(t,\ x = at - x^*\right) = \frac{b^2\delta\psi}{2a} + \frac{a\delta\psi^{(1)}}{2} - \delta\mu,$$

$$\left(\partial_x^2 u^{(2)} - \partial_x^2 u^{(3)}\right)\left(t,\ x = x^* + at\right) = -\frac{\delta\psi^{(1)}}{2a},\ \left(\partial_x^2 u^{(3)} - \partial_x^2 u^{(1)}\right)\left(t,\ x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi}{2a},$$

$$\left(\partial_x^2 u^{(5)} - \partial_x^2 u^{(4)}\right)\left(t,\ x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi^{(1)}}{2a},\ \left(\partial_x^2 u^{(5)} - \partial_x^2 u^{(6)}\right)\left(t,\ x = at - x^*\right) = \frac{b^2\delta\psi}{2a^3} + \frac{\delta\psi^{(1)}}{2a} - \frac{\delta\mu}{a^3},$$

$$\left(\partial_t\partial_x u^{(2)} - \partial_t\partial_x u^{(3)}\right)\left(t,\ x = x^* + at\right) = \frac{\delta\psi^{(1)}}{2},\ \left(\partial_t\partial_x u^{(3)} - \partial_t\partial_x u^{(1)}\right)\left(t,\ x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi^{(1)}}{2},$$

$$\left(\partial_t\partial_x u^{(5)} - \partial_t\partial_x u^{(4)}\right)\left(t,\ x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi^{(1)}}{2},\ \left(\partial_t\partial_x u^{(5)} - \partial_t\partial_x u^{(6)}\right)\left(t,\ x = at - x^*\right) = \frac{\delta\mu}{2a} - \frac{b^2\delta\psi}{2a^2} - \frac{\delta\psi^{(1)}}{2}$$

на характеристиках $x \pm at = x^*$ и $x - at = -x^*$;

3) частные производные первого порядка не имеют разрыва на характеристике $x - at = 0$;

4) частные производные второго порядка имеют разрывы

$$\left(\partial_t^2 u^{(1)} - \partial_t^2 u^{(4)}\right)\left(t,\ x = at\right) = \left(\partial_t^2 u^{(3)} - \partial_t^2 u^{(5)}\right)\left(t,\ x = at\right) =$$

$$= f(0, 0) - \tilde{\mu}_1(0) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0),$$

$$\left(\partial_x^2 u^{(1)} - \partial_x^2 u^{(4)}\right)(t,\ x = at) = \left(\partial_x^2 u^{(3)} - \partial_x^2 u^{(5)}\right)(t,\ x = at) =$$
$$= \frac{f(0,\,0) - \tilde{\mu}_1(0) + c^2\varphi(0) + a^2 D^2\varphi(0) + b^2 D\varphi(0)}{a^2},$$

$$\left(\partial_t\partial_x u^{(1)} - \partial_t\partial_x u^{(4)}\right)(t,\ x = at) = \left(\partial_t\partial_x u^{(3)} - \partial_t\partial_x u^{(5)}\right)(t,\ x = at) =$$
$$= \frac{\tilde{\mu}_1(0) - f(0,\,0) - c^2\varphi(0) - a^2 D^2\varphi(0) - b^2 D\varphi(0)}{a}$$

на характеристике $x - at = 0$.
Здесь использованы обозначения

$$\delta\psi = \tilde{\psi}_2(x^*) - \tilde{\psi}_1(x^*),\ \delta\psi^{(1)} = D\tilde{\psi}_2(x^*) - D\tilde{\psi}_1(x^*),\ \delta\mu = \tilde{\mu}_2\left(\frac{x^*}{a}\right) - \tilde{\mu}_1\left(\frac{x^*}{a}\right).$$

Соотношения утверждения 1 доказываются непосредственной проверкой.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия гладкости* $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\,\infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0,\,x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\,\infty])$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0,\,\frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a},\,\infty\right)\right)$ *для заданных функций. Решение задачи (1), (4), (5) в смысле определения 1, представленное формулами (6), (8), (11), (13), (17), (18) и (22), принадлежит классу* $C^1(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Доказательство. Поскольку $u^{(j)} \in C^2\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$ для каждого $j \in \{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6\}$, то, для того чтобы решение принадлежало классу $C^1(\overline{Q})$, должны быть выполнены однородные условия сопряжения на характеристиках $x + at = 0$, $x + at = x^*$, $x - at = x^*$ и $x - at = -x^*$ для решения и его производных первого порядка. Из утверждения 1 следует, что они выполняются тогда и только тогда, когда $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия гладкости* $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\,\infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0,\,x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\,\infty])$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0,\,\frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a},\,\infty\right)\right)$ *для заданных функций. Решение задачи (1), (4), (5) в смысле определения 1, представленное формулами (6), (8), (11), (13), (17), (18) и (22), принадлежит классам* $C^2\left(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}} \cup \overline{Q^{(3)}}\right)$ *и* $C^2\left(\overline{Q^{(4)}} \cup \overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}}\right)$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\mu}_1\left(\frac{x^*}{a}\right) = \tilde{\mu}_2\left(\frac{x^*}{a}\right)$, $D\tilde{\psi}_1(x^*) = D\tilde{\psi}_2(x^*)$ *и* $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Доказательство. Поскольку $u^{(j)} \in C^2\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$ для каждого $j \in \{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6\}$, то, для того чтобы решение принадлежало классам $C^2\left(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}} \cup \overline{Q^{(3)}}\right)$ и $C^2\left(\overline{Q^{(4)}} \cup \overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}}\right)$, должны быть выполнены однородные условия сопряжения на характеристиках $x + at = x^*$, $x - at = x^*$ и $x - at = -x^*$ для решения и его производных первого и второго порядков. Из утверждения 1 следует, что они выполняются тогда и только тогда, когда $\tilde{\mu}_1\left(\frac{x^*}{a}\right) = \tilde{\mu}_2\left(\frac{x^*}{a}\right)$, $D\tilde{\psi}_1(x^*) = D\tilde{\psi}_2(x^*)$ и $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Задача с условиями сопряжения

Рассмотрим задачу, когда хотя бы один из разрывов, указанных в утверждении 1, не равен нулю. В этом случае можно рассматривать задачу с условиями сопряжения, которые задаются на характеристиках $x + at = x^*$, $x - at = x^*$, $x - at = 0$ и $x - at = -x^*$. Сформулируем такую задачу.

Постановка задачи с условиями сопряжения. Требуется найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (4), граничному условию (5) и следующим условиям сопряжения:

$$\left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right]\left(t,\ at - x^*\right) = 0,$$

$$\left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right]\left(t,\ x^* - at\right) = \left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right]\left(t,\ x^* + at\right) = \frac{\delta\psi}{2},$$

$$\left[\left(\partial_t^2 u\right)^+ - \left(\partial_t^2 u\right)^-\right]\left(t,\ at - x^*\right) = \frac{b^2\delta\psi + a^2\delta\psi^{(1)}}{2a} - \delta\mu,$$

$$\left[\left(\partial_t^2 u\right)^+ - \left(\partial_t^2 u\right)^-\right]\left(t,\ x^* - at\right) = \left[\left(\partial_t^2 u\right)^- - \left(\partial_t^2 u\right)^+\right]\left(t,\ x^* + at\right) = \frac{a\delta\psi^{(1)}}{2},$$

$$\left[u^+ - u^-\right]\left(t,\ at\right) = \left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right]\left(t,\ at\right) = 0,$$

$$\left[\left(\partial_t^2 u\right)^+ - \left(\partial_t^2 u\right)^-\right]\left(t,\ at\right) = f(0,\ 0) - \tilde{\mu}_1(0) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0).$$

Предельный переход

Возвращаемся к исходной задаче (1)–(3). Ее классическое решение будем понимать как предел классических решений задачи (1), (4), (5) при $x^* \to 0$. Устремив x^* к нулю, получим, что подобласти $Q^{(1)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$ и $Q^{(5)}$ уменьшаются и в пределе становятся множествами нулевой меры. Но их значения будут влиять на значения решения задачи (1)–(3) на характеристике $x - at = 0$, поскольку в пределе замыкание множеств $Q^{(3)}$ и $Q^{(5)}$ станет характеристикой $x - at = 0$, а замыкание множеств $Q^{(1)}$ и $Q^{(4)}$ – точкой $(0,\ 0)$. В то же время подобласти $Q^{(2)}$ и $Q^{(6)}$ останутся, и решение будет иметь вид

$$u(t,\ x) = \begin{cases} u^{(2)}(t,\ x),\ x - at > 0, \\ \left[u^{(1)} \text{ или } u^{(4)}\right](t,\ x),\ t = x = 0, \\ \left[u^{(3)} \text{ или } u^{(5)}\right](t,\ x),\ x - at = 0,\ t > 0,\ x > 0, \\ u^{(6)}(t,\ x),\ x - at < 0, \end{cases} \tag{24}$$

где функции $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}, u^{(5)}$ и $u^{(6)}$ определены формулами (11), (13), (17), (18) и (22) при $x^* = 0$.

Для корректности предельного перехода необходимо, чтобы кусочно-заданная функция u была дважды непрерывно дифференцируемой в подобластях $Q^{(i)}$ для каждого $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Это будет выполняться при выполнении условий гладкости $f \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1\left(\left[0,\ x^*\right]\right)$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1\left(\left[x^*,\ \infty\right]\right)$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0,\ \frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a},\ \infty\right)\right)$. Для единственности решения необходимы попарные равенства функций $u^{(3)}$ и $u^{(5)}$, $u^{(1)}$ и $u^{(4)}$, а также их частных производных до второго порядка включительно на характеристике $x - at = 0$, что будет выполнено при выполнении условия $f(0,\ 0) - \tilde{\mu}_1(0) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0) = 0$.

В точке $(0,\ 0)$ можно положить u равным $\varphi(0)$. Такой же результат получается непосредственно из формулы (24) предельным переходом, так как непрерывность u на множестве $\bar{Q}$ сохраняется. Останутся в силе и некоторые другие свойства решения, относящиеся к непрерывности. Так, например, если выполнены условия $f \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi_2 \in C^1([0, \infty])$, $\mu_2 \in C^1([0, \infty))$, то решение будет принадлежать классам $C(\bar{Q})$, $C^2(Q_-)$ и $C^2(Q_+)$, где

$$Q_- = \left\{(t,\ x) \middle|\ t \ge 0,\ x \ge 0,\ x - at > 0\right\},$$

$$Q_+ = \left\{(t,\ x) \middle|\ t \ge 0,\ x \ge 0,\ x - at < 0\right\}.$$

Для решения задачи (1)–(3) можно указать условия сопряжения для производных первого и второго порядков в явном виде на характеристике $x - at = 0$:

$$\left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right](t,\, at) = \frac{\psi_2(0+) - \psi_1}{2},$$

$$\left[\left(\partial_x u\right)^+ - \left(\partial_x u\right)^-\right](t,\, at) = \frac{\psi_1 - \psi_2(0+)}{2a},$$

$$\left[\left(\partial_t^2 u\right)^+ - \left(\partial_t^2 u\right)^-\right](t,\, at) = f(0,\, 0) - \mu_2(0+) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0) + \frac{b^2\left(\psi_2(0+) - \psi_1 + 2aD\varphi(0)\right)}{2a}, \tag{25}$$

$$\left[\left(\partial_x^2 u\right)^+ - \left(\partial_x^2 u\right)^-\right](t,\, at) = \frac{b^2\left(\psi_2(0+) - \psi_1\right)}{2a^3} + D^2\varphi(0) + \frac{f(0,\, 0) - \mu_2(0+) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0)}{a^2},$$

$$\left[\left(\partial_t\partial_x u\right)^+ - \left(\partial_t\partial_x u\right)^-\right](t,\, at) = \frac{b^2\left(\psi_1 - \psi_2(0+)\right)}{2a^2} - \frac{a^2D^2\varphi(0) + c^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0) + f(0,\, 0) - \mu_2(0+)}{a}.$$

Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия гладкости* $f \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, $\varphi \in C^2\left([0,\, \infty)\right)$, $\psi_2 \in C^1\left([0,\, \infty]\right)$, $\mu_2 \in C^1\left([0,\, \infty)\right)$ *для заданных функций. Решение задачи (1)–(3) в смысле определения 2, представленное формулой (24), является единственным тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования* $\mu_1 = f(0,\, 0) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0)$. *Кроме того, оно принадлежит классу* $C\left(\overline{Q}\right) \cap C^2\left(Q_-\right) \cap C^2\left(Q_+\right)$ *и удовлетворяет условиям сопряжения (25).*

Доказательство следует из приведенных выше рассуждений.

Заключение

В статье сформулированы условия согласования, при выполнении которых существует классическое решение задачи в случае достаточной гладкости заданных функций. Построено классическое решение смешанной задачи в четверти плоскости двух независимых переменных, показана его зависимость от гладкости заданных функций. Также сформулирована задача с условиями сопряжения и доказана корректность ее постановки. Одним из важнейших результатов статьи является рассмотрение задачи, когда одна функция из условий Коши задается на множестве нулевой меры Жордана. В этом случае не только получены условия существования решения, но и доказаны необходимые и достаточные условия для единственности решения.

Библиографические ссылки

1. Лазарян ВА. О динамических усилиях в упряжных приборах однородных поездов при сопротивлениях относительным перемещениям экипажей. *Труды Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта.* 1950;20:3–32.
2. Маврин АИ. К теории ударного погружения свай. *Известия вузов. Строительство и архитектура.* 1967;8:24–28.
3. Boussinesq J. Du choc longitudinal d'une barre prismatique, fixée à un bout et heurtée à l'autre. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* 1883;97(2):154–157.
4. Гайдук СИ. О некоторых задачах, связанных с теорией поперечного удара по стержням. *Дифференциальные уравнения.* 1977;13(7):1233–1243.
5. Гайдук СИ. Математическое рассмотрение некоторых задач, связанных с теорией продольного удара по конечным стержням. *Дифференциальные уравнения.* 1977;13(11):2009–2025.
6. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2021;57(4):417–427. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-4-417-427.
7. Корзюк ВИ. *Уравнения математической физики.* 2-е издание. Москва: URSS; 2021. 480 с.
8. Корзюк ВИ, Козловская ИС. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Часть 2.* Минск: БГУ; 2017. 48 с.
9. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2021;57(1):23–32. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32.
10. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши. *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* 2020;64(6):657–662. DOI: 10.29235/1561-8323-2020-64-6-657-662.
11. Ломовцев ФЕ, Новиков ЕН. Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2012;1:83–86.

12. Шлапакова ТС, Юрчук НИ. Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2013;2:84–90.

13. Шлапакова ТС, Юрчук НИ. Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с производной в краевом условии, направленной не по характеристике. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2013;1:64–69.

14. Гайдук СИ. Математическое рассмотрение одной задачи о продольном ударе по релаксирующему стержню. *Дифференциальные уравнения.* 1976;12(4):668–685.

15. Юрчук НИ, Новиков ЕН. Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полуограниченной струны. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2016;4:116–120.

References

1. Lazaryan VA. [On dynamic forces in harness devices of homogeneous trains with resistance to relative movements of carriages]. *Trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta.* 1950;20:3–32. Russian.

2. Mavrin AI. [To the theory of shock piling]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura.* 1967;8:24–28. Russian.

3. Boussinesq J. Du choc longitudinal d'une barre prismatique, fixée à un bout et heurtée à l'autre. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* 1883;97(2):154–157.

4. Gaiduk SI. [Certain problems that are connected with the theory of a transversal shock along rods]. *Differentsial'nye uravneniya.* 1977;13(7):1233–1243. Russian.

5. Gaiduk SI. [A mathematical discussion of some problems connected with the theory of longitudinal shock along finite rods]. *Differentsial'nye uravneniya.* 1977;13(11):2009–2025. Russian.

6. Korzyuk VI, Rudzko JV. The classical solution of one problem of an absolutely inelastic impact on a long elastic semi-infinite bar. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2021;57(4):417–427. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-4-417-427.

7. Korzyuk VI. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. 2nd edition. Moscow: URSS; 2021. 480 p. Russian.

8. Korzyuk VI, Kozlovskaya IS. *Klassicheskie resheniya zadach dlya giperbolicheskikh uravnenii. Chast' 2* [Classical problem solutions for hyperbolic equations. Part 2]. Minsk: Belarusian State University; 2017. 48 p. Russian.

9. Korzyuk VI, Rudzko JV. The classical solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the nonsmooth second initial condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2021;57(1):23–32. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32.

10. Korzyuk VI, Rudzko JV. Classical solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the nonsmooth second initial condition. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus.* 2020;64(6):657–662. Russian. DOI: 10.29235/1561-8323-2020-64-6-657-662.

11. Lomovtsev FE, Novikov EN. [Duhamel's method for solving an inhomogeneous equation of vibrations of a semibounded string with an oblique derivative in a nonstationary boundary condition]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2012;1:83–86. Russian.

12. Shlapakova TS, Yurchuk NI. [The mixed problem for an equation of oscillation of a bounded string with a time-dependent derivative in a boundary condition directed along the characteristic]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2013;2:84–90. Russian.

13. Shlapakova TS, Yurchuk NI. [The mixed problem for an equation of oscillation of a bounded string with a derivative in a boundary condition not directed along the characteristic]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2013;1:64–69. Russian.

14. Gaiduk SI. [A mathematical treatment of a certain problem of a longitudinal shock along a relaxing rod]. *Differentsial'nye uravneniya.* 1976;12(4):668–685. Russian.

15. Yurchuk NI, Novikov EN. Necessary conditions for existence of classical solutions to the equation of semi-bounded string vibration. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2016;4:116–120. Russian.

Получена 20.04.2022 / исправлена 31.05.2022 / принята 15.06.2022.
Received 20.04.2022 / revised 31.05.2022 / accepted 15.06.2022.