# О ДИОФАНТОВЫХ СВОЙСТВАХ КОРНЕЙ МОНИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

**Н.В. Шамукова[1], Н.И. Калоша[2]**

[1] Бобруйский филиал БГЭУ
Социалистическая 90, 213826 Бобруйск, Беларусь
shamukova_n@mail.ru
[2] Институт математики НАН Беларуси
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
kalosha@im.bas-net.by

Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами высоты $H$,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n; \quad H = H(P) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|.$$

Далее $\Psi(x)$ — монотонно убывающая функция на $\mathbb{R}_+$ , $I$ — некоторый интервал длины $|I|$, $\mu A$ — мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$. Нетрудно доказать, что для любого $x \in I$ неравенство

$$|P(x)| < H^{-w} \tag{1}$$

при $w < n$ имеет бесконечно много решений в $P(x) \subset \mathbb{Z}[x]$.

В. Г. Спринджук [1] доказал, что при $w > n$ неравенство (1) имеет бесконечно много решений только для множества нулевой меры Лебега. Более того, для неравенств типа (1) получен полный аналог классической теоремы Хинчина о приближении действительных чисел рациональными числами [2, 3]. В этих работах результат Хинчина с многочленов первой степени обобщен на многочлены произвольной степени.

Пусть $I_1 = [a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$, $I_2 = [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$ — некоторые интервалы, $\ll$ — символ Виноградова: $A \ll B$, если $\exists\, d > 0$ такое, что $A < dB$. Также будем полагать, что $\Psi_i(x)$, $i \leqslant j \leqslant 3$, — некоторые функции (не обязательно все монотонные) положительного аргумента $x$.

**Теорема 1**. *Обозначим через* $\mathbb{Z}_n(\Psi_1)$ *множество* $x \in I$, *для которых неравенство*

$$|P(x)| < \Psi_1(H) \tag{2}$$

*имеет бесконечно много решений в многочленах* $P(x)$.

*Тогда для монотонно убывающей функции* $\Psi_1(x)$ *выполняется равенство*

$$\mu\mathbb{Z}_n(\Psi_1) = \begin{cases} 0, & \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{n-1}\Psi(k) < \infty, \\ \mu I, & \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{n-1}\Psi(k) = \infty. \end{cases}$$

При $n = 1$ теорема 1 повторяет теорему Хинчина. В отсутствие дополнительных условий случай сходимости доказан в [2], расходимости в [3].

В последние годы много работ написано о приближении действительных чисел целыми алгебраическими числами и о разрешимости неравенств вида (2) в монических полиномах, все корни которых являются целыми алгебраическими числами:

$$S(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{3}$$

Так, в [4] доказан случай расходимости в теореме 1 для многочленов (3).

Авторами доказаны сформулированные ниже метрические теоремы, связанные с приближением нуля моническими многочленами $S(x)$.

**Теорема 2**. *При* $n \geqslant 2$ *и сходимости ряда* $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2}\Psi_1(H)$ *неравенство* $|S(x)| < \Psi_1(H)$ *имеет для почти всех* $x \in \mathbb{R}$ *лишь конечное число решений в многочленах* (3).

**Теорема 3**. *Пусть* $\Psi_2(x)$ — *не обязательно монотонная функция. Обозначим через* $M_n(\Psi_2)$ *множество* $x \in I$, *для которых неравенство* $|S(x)| < \Psi_2(H)$ *имеет бесконечное число решений. Тогда* $\mu M_n(\Psi_2) = 0$, *если ряд* $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2}\Psi_2(H)$ *сходится.*

**Теорема 4**. *Пусть* $\Psi_3(x)$ — *монотонно убывающая функция,* $n \geqslant 3$, $\mu_2 B$ — *мера Лебега измеримого множества* $B \subset \mathbb{R}^2$. *Обозначим через* $\mathbb{Z}_n(\Psi_3)$ *множество* $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, *для которых система неравенств*

$$\max(|S(x)|, |S(y)|) < \Psi_3(H)$$

*имеет бесконечное число решений в монических многочленах* $S(t)$.

*Тогда при сходимости ряда* $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-3}\Psi_3^2(H)$ *имеем* $\mu_2\mathbb{Z}_n(\Psi_3) = 0$.

**Литература**

1. Спринджук В.Г. *Проблема Малера в метрической теории чисел.* Мн.: Наука и техника, 1967.

2. Bernik V. *On the exact order of approximation of zero by values of integral polynomials* // Acta Arithm. 1989. Vol. 53, No. 1. P. 17–28.

3. Beresnevich V. *On approximation of real numbers by real algebraic numbers* // Acta Arithm. 1999. Vol. 90, No. 2. P. 97–112.

4. Bugeaud Y. *Approximation by algebraic integers and Hausdorff dimension* // J. London Math. Soc. 2002. Vol. 65. P. 547–559.

## О МНОГООБРАЗИИ ПАР ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НЕОДНОСВЯЗНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

**А.А. Шаромет**

Белорусский государственный университет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
sharomet@bsu.by

Многообразия $C(m,n) = \{(A_1,\ldots,A_m) \mid A_i \in M_n(\mathbb{C}),\ A_iA_j = A_jA_i,\ i,j = \overline{1,m}\}$ наборов перестановочных матриц изучались многими авторами. Краткий обзор этих результатов содержится в [1]. В работе [2] доказана неприводимость многообразия $C(2,n)$.

В линейной алгебраической группе $G$ определим многообразие наборов перестановочных элементов

$$C(m,G) = \{(g_1,\ldots,g_m) \mid g_i \in G,\quad g_ig_j = g_jg_i,\quad i,j = \overline{1,m}\}.$$

Исследуется задача о неприводимости многообразия $C(m,n)$ над $\mathbb{C}$ (полем комплексных чисел). Используется терминология книги А. Бореля [3].

В работе [2] доказано, что для односвязной полупростой группы $G$ многообразие $C(2,G)$ неприводимо и приведен пример, демонстрирующий препятствие для доказательства неприводимости $C(2,SO_3(\mathbb{C}))$. Следующая теорема показывает, что односвязность полупростой группы $G$ является не только достаточным, но и необходимым условием для неприводимости многообразия $C(2,G)$.

**Теорема 1**. *Многообразие* $C(2,G)$ *для полупростой неодносвязной линейной алгебраической группы не является неприводимым.*

Доказательство теоремы существенным образом использует следующее утверждение из работы [4].

**Теорема 2**. *Пусть* $G$ — *полупростая неодносвязная алгебраическая группа и* $\pi : \tilde{G} \to G$ — *универсальная накрывающая, а* $F = Ker\pi$. *Тогда для каждого полупростого* $x \in G$ *группа* $Z(x)/Z(x)^0$ *изоморфна некоторой подгруппе в* $F$. *При этом все подгруппы из* $F$ *реализуются в качестве таких факторгрупп.*