О РЕШЕТКАХ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

И.Н. Халимончик

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
vifh@rambler.ru.

Рассматриваются только конечные группы. В монографии [1] Л.А. Шеметковым в 1978 г. была поставлена проблема под номером 12: в каких случаях множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G образует решетку?

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Формация $\mathfrak{F}$ называется решеточной в $\mathfrak{X}$, если для любой $\mathfrak{X}$-группы G множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп группы G (см. [2, 3]).

В работах [4–6] были описаны наследственные насыщенные (разрешимые наследственные, необязательно насыщенные) формации $\mathfrak{F}$, являющиеся решеточными в классе всех групп (всех разрешимых групп). Полученные результаты вошли в монографии [2, 3]. Естественной является следующая задача: для данного класса $\mathfrak{X}$, отличного от класса всех (разрешимых) групп, описать насыщенные формации $\mathfrak{F}$ являющиеся решеточными в $\mathfrak{X}$.

В настоящем сообщении приводится полное решение задачи для случая, когда $\mathfrak{X}$ совпадает с классом $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}^n$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — насыщенная наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *любая насыщенная формация $\mathfrak{F}$ такая, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, является решеточной в $\mathfrak{X}$;*
2) *любая насыщенная подформация $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ является гиперрадикальной в $\mathfrak{X}$;*
3) $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *формация $\mathfrak{F}$ является решеточной в классе $\mathfrak{N}^2$;*
2) *$\mathfrak{F}$ является формацией с условием Шеметкова в классе $\mathfrak{N}^2$;*
3) *существует семейство множеств простых чисел $\{\pi_i \mid i \in I\}$, где $\cup \pi_i \mid_{i \in I} = \pi(\mathfrak{F} \cap \cap \mathfrak{N}^2)$ такое, что формацию $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ можно представить в виде пересечения (возможно бесконечного) формаций вида $\mathfrak{N}_{\pi_i}\mathfrak{N}_{\pi_j}$.*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^k$, где k — фиксированное натуральное число и $k \geqslant 3$. Формация $\mathfrak{F}$ является решеточной в $\mathfrak{N}^k$ тогда и только тогда, когда существует разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ такое, что $\mathfrak{F} = = D_0(\cup_{i \in I} \mathfrak{N}^k_{\pi_i})$.*

Литература

1. Шеметков Л. А. *Формации конечных групп.* М: Наука, 1978.

2. Каморников С. Ф., Селькин М. В. *Подгрупповые функторы и классы конечных групп.* Мн.: Беларуская навука, 2003.

3. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of finite groups.* Springer. 2006.

4. Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н. *О решетках подгрупп конечных групп* // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Ин-т математики АН Украины. 1993. С. 27–54.

5. Ballester-Bolinches A., Doerk K., Perez-Ramos M. D. *On the lattice on $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups* // J. Algebra. 1992. V. 115. P. 393–396.

6. Васильев А. Ф., Каморников С. Ф. *К проблеме Кегеля — Шеметкова о решетках обобщенно субнормальных подгрупп конечных групп* // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 4. С. 411–428.