ГРУППЫ С ФИКСИРОВАННЫМИ ПОРЯДКАМИ НЕКОТОРЫХ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП ФАКТОРОВ

А.А. Трофимук

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина
б. Космонавтов 21, 224665 Брест, Беларусь
alexander.trofimuk@gmail.com

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

В работе [1] исследовались разрешимые группы G, обладающие нормальным рядом, факторы которого имеют бициклические силовские подгруппы.

В настоящей работе продолжено изучение разрешимых групп, обладающих нормальным рядом, факторы которого имеют ограничения на силовские подгруппы. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p-подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина группы G не превышает* 4.
2. *Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает* 6.
3. $l_2(G) \leqslant 2$, $l_3(G) \leqslant 2$ *и* $l_p(G) \leqslant 1$ *для всех простых* $p > 3$. *Кроме того, если G A_4-свободна, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает* 5, *а* $l_3(G) \leqslant 2$ *и* $l_p(G) \leqslant 1$ *для всех простых* $p \neq 3$.

Разрешимые группы из работы [1] и группы, исследуемые в теореме 1, имеют одинаковые верхние границы нильпотентной длины и p-длины, а для производной длины верхние границы различны. Однако, оказалось, что если порядки небициклических силовских подгрупп в факторах ограничить кубами малых простых чисел $p \in \{2, 3, 5, 11, 17\}$, либо 16, либо 32, то можно сохранить верхнюю оценку производной длины $G/\Phi(G)$ равную 5.

Теорема 2. *Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p-подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \{2, 3, 5, 11, 17\}$, либо* 16, *либо* 32. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не выше* 5.
2. *группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 31, 307\}'$-холлову подгруппу.*

Пример. Пусть E_{13^3} — элементарная абелева группа порядка 13^3, а K — экстраспециальная группа порядка 27. С помощью компьютерной системы GAP обнаружена группа $G = [E_{13^3}]([K]SL(2, 3))$ порядка 1 423 656. Очевидно, что группа G обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо бициклическими, либо имеют порядок 13^3 и 3^3. Подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$, производная длина группы G равна 6, а нильпотентная длина группы G равна 4. Таким образом, полученные оценки производной и нильпотентной длины в теореме 1 являются точными. Кроме того, с помощью компьютерной системы GAP можно построить группу $G_1 = [E_{7^3}]([K]SL(2, 3))$ порядка 222 264, обладающую теми же свойствами, что и группа G. Примеры групп G и G_1 объясняют отсутствие среди чисел $p \in \{2, 3, 5, 11, 17\}$ теоремы 2 простых чисел 7 и 13.

Литература

1. Monakhov V. S., Trofimuk A. A. *On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups* // Communications in Algebra. 2011. Vol. 39, № 9. P. 3178–3186.