УДК 519.17

СТУРКТУРНЫЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СЛАБЫХ РЁБЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ В ГРАФАХ

Ю.Л. Орлович[1], А.Д. Суравежкин[1], Ю.А. Картынник[2]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь,* orlovich@bsu.by
[2]*Корпорация Гугл, 1600 Амфитеатр Паркуэй, 94043 Маунтин-Вью, Калифорния, США,* kartynnik@gmail.com

Подмножество рёбер графа называется слабым рёберным покрытием, если каждая вершина графа инцидентна некоторому ребру из данного подмножества или лежит в треугольнике, содержащем такое ребро. В работе предлагаются некоторые оценки для наименьшего числа рёбер в слабом рёберном покрытии графа. Доказано, что в классах расщепляемых графов и кубических графов задача нахождения слабого рёберного покрытия наименьшей мощности является NP-трудной. Рассматривается наследственный класс графов, в которых у каждого порождённого подграфа без изолированных вершин все минимальные (по включению) слабые рёберные покрытия имеют одинаковую мощность.

***Ключевые слова*:** Граф; рёберное покрытие; слабое рёберное покрытие; доминирующее множество; вычислительная сложность; NP-полная проблема; наследственный класс графов.

STRUCTURAL AND ALGORITHMIC ASPECTS OF WEAK EDGE COVERINGS IN GRAPHS

Y.L. Orlovich[a], A.D. Suraveshkin[a], Y.A. Kartynnik[b]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezalieznasci Avenue, Minsk 220030, Belarus,* orlovich@bsu.by
[b]*Google LLC, 1600 Amphitheatre Parkway, 94043 Mountain View, CA, USA,* kartynnik@gmail.com
Corresponding author: orlovich@bsu.by

A subset of edges of a graph is called weak edge cover if each vertex of the graph is incident to an edge of this subset or is lying in a triangle containing such an edge. Estimates for the minimum number of edges in a weak edge cover of a graph are proposed. It is proved that for the classes of split graphs and cubic graphs the problem of finding a weak edge cover of minimum cardinality is NP-hard. The hereditary class of graphs in which for every isolate-free induced subgraph all its minimal (by inclusion) weak edge covers have the same cardinality is considered.

Keywords: Graph; edge cover; weak edge cover; dominating set; computational complexity; NP-complete problem; hereditary class of graphs.

Введение

Подмножество рёбер графа называется *рёберным покрытием* [1], если каждая вершина графа инцидентна по крайней мере одному ребру из этого подмножества. Понятно, что только графы с изолированными вершинами не имеют рёберных покрытий. Число рёбер в наименьшем (по мощности) рёберном покрытии графа G называется *числом рёберного покрытия* этого графа и обозначается через $\rho(G)$. Рёберные покрытия широко изучаются в теории графов и дискретной математике, находя приложения в самых разнообразных областях науки и практики [2–4].

Данная работа продолжает начатое в [5] исследование следующего релаксированного варианта понятия рёберного покрытия. Подмножество M рёбер графа называется *слабым рёберным покрытием*, если каждая вершина графа инцидентна некоторому ребру из M или лежит в треугольнике, содержащем ребро из M. Число рёбер в наименьшем (по мощности) слабом рёберном покрытии графа G называется *числом слабого рёберного покрытия* этого графа и обозначается через $\rho'(G)$. Понятно, что в графе, не содержащем треугольников, понятия слабого рёберного покрытия и рёберного покрытия совпадают и, следовательно, для любого такого графа G выполнено равенство $\rho'(G) = \rho(G)$. В общем случае, каждое рёберное покрытие является слабым рёберным покрытием и, значит, для графа G, не содержащего изолированных вершин, верно $\rho'(G) \le \rho(G)$.

Слабые рёберные покрытия находят разнообразные применения. Рассмотрим одно из таких применений, относящееся к сфере информационной безопасности в мультиагентных системах. Мультиагентная система состоит из взаимодействующих интеллектуальных агентов (далее агентов), каждый из которых преследует свои цели. Обычно под агентами понимаются программные объекты, которые могут взаимодействовать друг с другом, обмениваясь сообщениями, анализировать полученные сообщения, принимать решения в условиях неопределенности и отсутствия информации. Рассмотрим граф G, в котором роль вершин играют агенты, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие агенты могут обмениваться друг с другом данными, т. е. рёбра графа – это коммуникационные возможности между агентами. Чтобы атака (неисправность) на какого-то из агентов не была критичной для системы, решение агенту нельзя принять без электронной подписи двух общающихся заверяющих агентов, которые для установления взаимной подлинности используют дорогой защищённый канал передачи данных. Требуется, чтобы у каждого агента была возможность заверить своё решение у двух общающихся между собой заверяющих агентов, связавшись с ними напрямую, что является дополнительным требованием безопасности. Нас интересует наименьшее число неупорядоченных пар общающихся между собой заверяющих агентов, способных выполнить описанные выше требования безопасности. Такое множество пар в точности соответствует наименьшему слабому рёберному покрытию графа G.

Стандартные понятия теории графов, не определяемые далее, можно найти в [6]. Пусть G – конечный неориентированный граф без петель и кратных рёбер с множеством вершин $V(G)$ и множеством рёбер $E(G)$. Число $|V(G)|$ вершин графа G называется его *порядком*. Граф порядка больше 1 называется *нетривиальным*. Множество вершин графа G, смежных с вершиной v, называется *окружением вершины* v в графе G и обозначается через $N(v)$.

1. Результаты исследования

Следующее полезное наблюдение содержит эквивалентное определение слабого рёберного покрытия.

Наблюдение. Пусть G – граф и $M \subseteq E(G)$. Множество M является слабым рёберным покрытием графа G тогда и только тогда, когда каждая вершина графа лежит в клике (можно считать её максимальной по включению) с некоторым ребром из M.

Рассмотрим некоторые оценки параметра $\rho'(G)$.

Теорема 1. Для любого графа G без изолированных вершин верно неравенство $\gamma(G) \le \rho'(G)$, где $\gamma(G)$ – число доминирования графа G.

Доказательство. Согласно приведенному выше наблюдению каждая вершина графа G входит в клику вместе с некоторым ребром из слабого рёберного покрытия этого графа. Поэтому, произвольно выбирая по одной концевой вершине в каждом из рёбер наименьшего слабого рёберного покрытия графа, получим доминирующее множество. Теорема 1 доказана.

Равенство $\gamma(G) = \rho'(G)$ верно, например, для графов, каждая компонента которых представляет собой нетривиальный полный граф.

Для ребра $e \in E(G)$ обозначим через $\tau(e)$ число треугольников графа G, содержащих ребро e. Другими словами, $\tau(e) = |N(u) \cap N(v)|$, где u и v – концевые вершины ребра e. Положим $\tau(G) = \max_{e \in E(G)} \tau(e)$.

Теорема 2. Для любого графа G порядка n без изолированных вершин верны неравенства

$$\left\lceil \frac{n}{2+\tau(G)} \right\rceil \le \rho'(G) \le n - \tau(G) - 1. \qquad (1)$$

Доказательство. Сначала докажем левое неравенство в (1). Пусть M – наименьшее слабое рёберное покрытие графа G, т. е. $|M| = \rho'(G)$. Каждое ребро $e = \{u, v\} \in M$ покрывает две инцидентные ему вершины u и v, и ещё $\tau(e)$ вершин графа G, которые вместе с u и v образуют треугольники. Значит, $n \le \sum_{e\in M}(2+\tau(e)) \le (2+\tau(G))|M|$, откуда с учётом $|M| = \rho'(G)$ и следует нижняя оценка для $\rho'(G)$.

Теперь докажем правое неравенство в (1). Рассмотрим ребро $e \in E(G)$, для которого $\tau(e) = \tau(G)$. Это ребро покрывает $2+\tau(G)$ вершин графа. Для каждой из оставшихся $n-\tau(G)-2$ вершин произвольно выберем по одному инцидентному ей ребру (такие рёбра существуют, поскольку G не содержит изолированных вершин). Эти рёбра вместе с ребром e образуют в графе G слабое рёберное покрытие мощности не более $n-\tau(G)-1$, что и доказывает верхнюю оценку для $\rho'(G)$. Теорема 2 доказана.

Нижняя и верхняя оценки для $\rho'(G)$ из (1) достижимы. Оценка снизу достигается на квадрате P_n^2 простой цепи P_n, $n \ge 2$, а оценка сверху – на нетривиальном полном графе.

Нижнюю оценку для $\rho'(G)$ из (1) можно усилить. Пусть G – граф с множеством рёбер $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ и $\tau_i = \tau(e_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Свяжем с графом G упорядоченную последовательность $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, в которой, без ограничения общности, $\tau_i \ge \tau_{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots, m-1$. В этих обозначениях верно следующее утверждение.

Теорема 3. Для любого графа G порядка n без изолированных вершин верно неравенство

$$\rho'(G) \ge \min\{k : 2k + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k \ge n\}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть k – наименьший номер, для которого выполнено неравенство $2k + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k \ge n$. Предположим от противного, что $\rho'(G) = \ell < k$. Пусть $M = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_\ell}\}$ – наименьшее слабое рёберное покрытие графа G. Тогда $\sum_{e\in M}(2+\tau(e)) \ge n$, что эквивалентно неравенству $2\ell + \tau_{i_1} + \tau_{i_2} + \ldots + \tau_{i_\ell} \ge n$. Без ограничения общности будем считать, что $\tau_{i_1} \ge \tau_{i_2} \ge \ldots \ge \tau_{i_\ell}$. Отсюда в силу того, что $\tau_1 \ge \tau_2 \ge \ldots \ge \tau_m$, имеем $\tau_j \ge \tau_{i_j}$ для $j = 1, 2, \ldots, \ell$. Следовательно, $2\ell + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_\ell \ge n$. Но это с учётом $\ell < k$ противоречит минимальности номера k. Значит, исходное предположение неверно, т. е. $\rho'(G) \ge k$. Теорема 3 доказана.

Пусть n – натуральное число. Рассмотрим три не пересекающихся по вершинам графа: соединение $K_2 + O_n$ и две копии простой цепи P_{n+3}. В каждой из цепей P_{n+3} зафиксируем по одной концевой вершине. Отождествим теперь вершины степени $n+1$ графа $K_2 + O_n$ с выбранными концевыми вершинами цепей P_{n+3}. Полученный в результате граф порядка $3(n+2)$ обозначим через H_n. Для графа H_n в силу (1) имеем $\rho'(H_n) \geq 3$, а из (2) получаем $\rho'(H_n) \geq n+2$.

Перейдём к результатам, касающимся вычислительной сложности следующей задачи распознавания.

Слабое рёберное покрытие. Заданы граф G и натуральное число k. Верно ли, что $\rho'(G) \leq k$? Другими словами, существует ли такое слабое рёберное покрытие M графа G, что $|M| \leq k$?

Отметим, что в классе графов без треугольников задача Слабое рёберное покрытие разрешима за полиномиальное время. Этот факт следует из полиномиальной разрешимости задачи о наименьшем рёберном покрытии.

Граф G называется *расщепляемым*, если множество его вершин можно представить в виде разбиения $V(G) = C \cup I$, $C \cap I = \varnothing$, где C – клика, а I – независимое множество (отметим, что каждое из этих множеств по отдельности может быть пустым).

Теорема 4. В классе расщепляемых графов задача распознавания Слабое рёберное покрытие является NP-полной.

Схема доказательства. Рассматриваемая задача, очевидно, принадлежит классу NP. Построим полиномиальное сведéние от NP-полной задачи Трёхмерное сочетание [7], условием которой являются попарно непересекающиеся множества X, Y и Z конечной мощности k и множество S трёхэлементных подмножеств множества $X \cup Y \cup Z$, содержащих в точности по одному элементу из каждого множества X, Y и Z. Требуется выяснить существует ли в S *трёхмерное сочетание*, т. е. подмножество, объединение элементов которого совпадает с $X \cup Y \cup Z$? Будем говорить, что задача Трёхмерное сочетание *разрешима*, если в множестве S существует трёхмерное сочетание.

Пусть $Q = (X, Y, Z, S)$ – входные данные задачи Трёхмерное сочетание, где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ и $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$. Определим граф G_Q следующим образом. Множество его вершин есть объединение $X \cup Y \cup Z \cup \{T^1, T^2 : T \in S\}$, где T^1 и T^2 – две копии подмножества $T \in S$. Для каждой вершины $a \in X \cup Y \cup Z$ добавим рёбра между a и теми вершинами из $\{T^1, T^2 : T \in S\}$, которые (как подмножества) содержат элемент a. Добавим в граф всевозможные рёбра между вершинами множества $\{T^1, T^2 : T \in S\}$, т. е. образуем на этом множестве вершин клику.

По построению граф G_Q является расщепляемым и его порядок равен $3k + 2|S|$. На рис. 1 приведен пример графа G_Q, который соответствует входу $Q = (X, Y, Z, S)$ задачи ТРЁХМЕРНОЕ СОЧЕТАНИЕ, где

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ и $S = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$,

$T_1 = \{x_1, y_2, z_1\}$, $T_2 = \{x_2, y_3, z_2\}$, $T_3 = \{x_3, y_1, z_3\}$, $T_4 = \{x_1, y_3, z_1\}$.

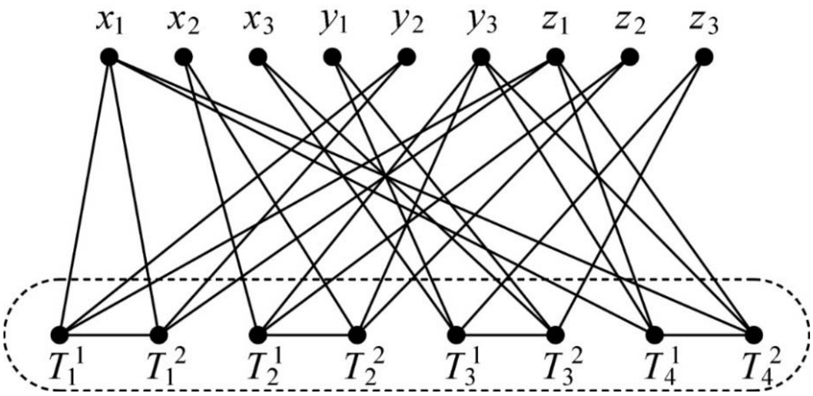

Рисунок 1 – Пример графа G_Q

Нетрудно видеть, что граф G_Q можно построить за полиномиальное время. Далее остаётся показать, что задача ТРЁХМЕРНОЕ СОЧЕТАНИЕ с входом $Q = (X, Y, Z, S)$ разрешима тогда и только тогда, когда $\rho'(G_Q) \le k$. Это завершает схему доказательства теоремы 4.

Заметим, что граф G_Q содержит довольно много треугольников (не меньше чем $C^3_{2|S|} + k$). Другой крайний случай, когда число треугольников графа невелико, образуют кубические (т. е. 3-регулярные) графы. Однако, и в этом классе графов, как показывает следующий результат, задача СЛАБОЕ РЁБЕРНОЕ ПОКРЫТИЕ остаётся трудной.

Теорема 5. В классе кубических графов задача распознавания СЛАБОЕ РЁБЕРНОЕ ПОКРЫТИЕ является NP-полной.

Для доказательства теоремы 5 используется вариант задачи ТРЁХМЕРНОЕ СОЧЕТАНИЕ, в котором каждый элемент из $X \cup Y \cup Z$ входит ровно в три подмножества из S. Известно, что данный ограниченный вариант задачи ТРЁХМЕРНОЕ СОЧЕТАНИЕ также принадлежит классу NP-полных задач.

Напомним, что класс графов $\boldsymbol{X}$ называется *наследственным*, если вместе с каждым графом $G \in \boldsymbol{X}$ этому классу принадлежит любой порождённый подграф графа G. Каждый наследственный (и только наследственный) класс графов $\boldsymbol{X}$ может быть задан множеством $\boldsymbol{F_X}$ своих запрещённых порождённых подграфов. Это означает, что $G \in \boldsymbol{X}$ тогда и только тогда, когда G не содержит порождённых подграфов, изоморфных любому из графов множества $\boldsymbol{F_X}$ (см., например, [8]). Граф H называется *минимальным запрещённым порождённым подграфом* для класса $\boldsymbol{X}$, если $H \notin \boldsymbol{X}$ и каждый порождённый подграф графа H, отличный от H, принадлежит классу $\boldsymbol{X}$.

Введём в рассмотрение класс *хорошо слабо рёберно покрытых графов* (well-weak-edge-covered graphs), в которых у каждого порождённого подграфа без изолированных вершин все минимальные (по включению) слабые рёберные покрытия имеют одинаковую мощность. Данный класс является наследственным. Как нетрудно проверить, минимальными запрещёнными порождёнными подграфами для этого класса графов являются графы $K_4 - e$, $\overline{P}_5$ и следующие десять графов порядка 6, изображённых на рис. 2.

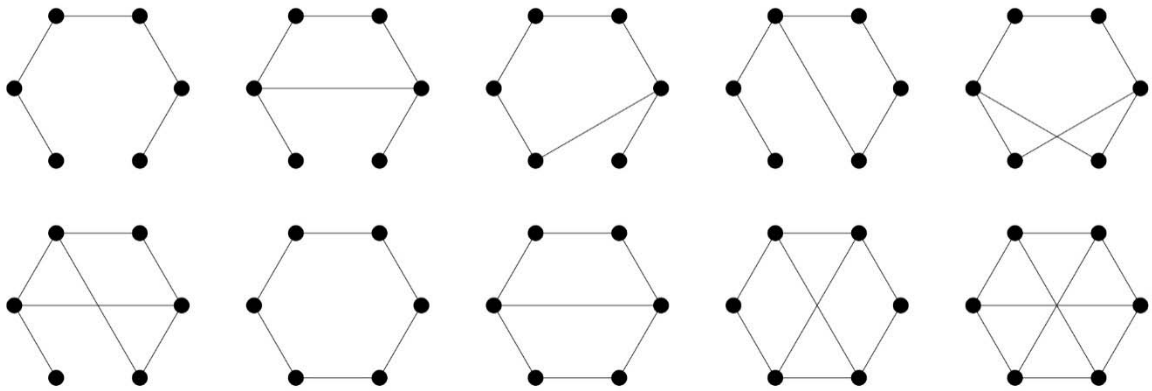

Рисунок 2 – Минимальные запрещённые порождённые подграфы порядка 6 для класса хорошо слабо рёберно покрытых графов

Предполагается, что указанный список из 12 минимальных запрещённых подграфов является исчерпывающим для класса хорошо слабо рёберно покрытых графов.

Заключение

В работе продолжено изучение понятия слабого рёберного покрытия графа. Доказаны некоторые оценки для наименьшего числа рёбер в слабом рёберном покрытии графа. Для некоторых специальных классов графов (расщепляемые графы, кубические графы) установлена NP-полнота задачи распознавания, связанной с задачей нахождения слабого рёберного покрытия наименьшей мощности. Введён в рассмотрение наследственный класс графов, в которых у каждого порождённого подграфа без изолированных вершин все минимальные (по включению) слабые рёберные покрытия имеют одинаковую мощность. Для этого наследственного класса графов найдены 12 минимальных запрещённых порождённых подграфов и сделано предположение, что рассматриваемый наследственный класс может быть охарактеризован в терминах запрещённых порождённых подграфов, принадлежащих данному списку.

Библиографические ссылки

1. Gallai T. Uber extreme Punkt- und Kantenmengen // Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Math. 1959. № 2. P. 133–138.
2. Akbari S., Oboudi M.R. On the edge cover polynomial of a graph // Eur. J. Comb. 2013. № 34(2). P. 297–321. DOI:10.1016/j.ejc.2012.05.005.
3. De Ita G., Marcial-Romero J.R., Montes-Venegas H.A. Estimating the relevance on communication lines based on the number of edge covers // Electron. Notes Discrete Math. 2010. № 36. P. 247–254. DOI:10.1016/j.endm.2010.05.032.
4. Azad A., Langguth J., Fang Y., Qi A., Pothen A. Identifying rare cell populations in comparative flow cytometry. In: Moulton V., Singh M. (eds) Algorithms in Bioinformatics. WABI 2010 // Lect. Notes Comp. Sci. 2010. № 6293. P. 162–175. DOI:10.1007/978-3-642-15294-8_14.
5. Дыбовская Д.А. Слабые рёберные покрытия и ассоциированные с ними классы графов: 77-я научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета: материалы конф. В 3 ч. Ч. 1, Минск, 11–22 мая 2020 г. Минск: БГУ, 2020. С. 58–61.
6. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: УРСС, 2021. 390 с.
7. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
8. Kitaev S., Lozin V. Words and graphs. Monographs in Theoretical Computer Science. Springer, 2015. 264 p.