УДК 519.85

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОЦЕНКИ НЕОДНОРОДНОГО ПОТОКА В МУЛЬТИСЕТЯХ

Л.А. Пилипчук, М.П. Романчук

Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь, pilipchuk@bsu.by, fpm.romanchump1@bsu.by

Рассматривается задача минимизации размера множества обозреваемых узлов мультиграфа и локализации специальных программируемых устройств (сенсоров) в узлах с целью сбора необходимой информации о функции потока для оценки, управления и контроля трафика в той части сети, которая непосредственно не наблюдается. Исследование процессов моделирования мультипотока основано на конструктивной теории декомпозиции разреженных систем с использованием свойств разреженности матриц неполного и полного рангов.

Ключевые слова: Мультиграф, разреженная система; ранг; мультипоток; обозреваемый узел; сенсор; декомпозиция.

RESEARCH ON INHOMOGENEOUS FLOW ESTIMATION PROCESSES IN MULTINETWORKS

L.A. Pilipchuk, M.P. Romanchuk

Belarusian State University, 4 Niezalieznasci Avenue, Minsk 220030, Belarus, pilipchuk@bsu.by, fpm.romanchump1@bsu.by

The problem of minimizing the size of the set of monitored multigraph nodes and localization of special programming devices (sensors) in the nodes to collect the necessary information about the flow function to estimate, control and monitor the traffic in the part of the network that is not directly observed is considered. The study of multinetwork modeling processes is based on the constructive theory of decomposition of sparse systems using the sparsity properties of incomplete and full rank matrices.

***Keywords*:** Multigraph; sparse system; rank; multiflow; monitored node; sensor; decomposition.

Введение

В случае моделирования процесса оценки транспортного потока в масштабах крупных городов количество транспортных средств может достигать десятков тысяч, и изменения величин дугового и внешнего мультипотока обычно лежат в широком диапазоне. Стратегии полного перебора узлов сети с целью минимизации мощности множества обозреваемых узлов потребуют огромных вычислительных затрат. Важным является построение алгоритмических, структурных и технологических решений независимых подсистем с матрицами неполного/полного рангов с различными типами разреженности в синтезе с современными достижениями в области инновационных технологий разреженного матричного и сетевого анализа, алгоритмической теории графов, теоретической информатики.

1. Моделирование процессов оценки мультипотока

Рассмотрим конечный связный ориентированный мультиграф (мультисеть) $G = (I, U)$, где I – множество узлов, U – множество мультидуг, определенных на $I \times I$, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$. Пусть $K = \{1, 2, \dots, r\}$ – множество, состоящее из r типов потока в мультисети G. Обозначим $G^k = (I^k, U^k)$ связную сеть, соответствующую типу потока $k \in K$, $I^k \subseteq I$, U^k – множество дуг для потока типа k, $k \in K$. Мы предполагаем, что мультиграф G двунаправленный, следовательно, если $\exists\ (i,j)^k \in U^k$, то $\exists\ (j,i)^k \in U^k, k \in K$.

Мы представляем трафик в мультисети $G = (I, U)$ функцией сетевого потока $x: U \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = \begin{cases} x_i^k, & i \in I_k^*, \\ 0, i \in I^k \setminus I_k^*, k \in K, \end{cases} \qquad (1)$$

где I_k^* - множество узлов с неизвестным внешним потоком x_i^k в узле $i \in I_k^*, I_k^* \subseteq I^k$.

Согласно [1, 2], если $I_k^* \neq \emptyset$, то ранг матрицы системы (1) для графа $G^k = (I^k, U^k)$ равен $|I^k|\ \forall\ k \in K$. Если $I_k^* = \emptyset$, то ранг матрицы системы (1) равен $\left|I^k\right| - 1$ (матрица инцидентности графа G^k), $k \in K$ [3].

Для того, чтобы получить информацию о неизвестных дуговых потоках x_{ij}^k для дуг $(i,j)^k \in U^k$ и внешних потоках x_i^k узлов $i \in I_k^*$, $k \in K$ сенсоры установлены в узлах мультиграфа G. Узлы мультиграфа с сенсорами назовем обозреваемыми и обозначим множество обозреваемых узлов мультиграфа $M = \bigcup_{k \in K} M_k$, где M_k – множество обозреваемых узлов для потока K. Множество M_k может быть пустым. Обозначим $K(i)$ - множество типов дуговых потоков, проходящих через узел $i \in I$. Мы предполагаем, что если узел i является обозреваемым, то известны значения дуговых потоков на всех исходящих и входящих дугах для узла $i \in M_k$, а также внешние потоки в узлах $i \in M_k \cap I_k^*\ \forall\ i \in M, \forall\ k \in K(i)$

$$\begin{gathered} x_{ij}^k = f_{ij}^k,\ \ j \in I_i^+(U^k),\ \ x_{ji}^k = f_{ji}^k, j \in I_i^-(U^k), \\ x_i^k = f_i^k, i \in M_k \cap I_k^* \neq \emptyset \quad \forall\ i \in M, \forall\ k \in K(i), \end{gathered} \qquad (2)$$

где $f_{ij}^k, f_{ji}^k, f_i^k$ – константы. Учтем дополнительную информацию о коэффициентах разбиения потока. Используя известные коэффициенты разбиения $p_{ij}^k,\ 0 < p_{ij}^k \leq 1, (i,j) \in U^k$, можно выразить общий исходящий из узла i поток $F(i) = \sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k$ как функцию от объема потока по каждой исходящей дуге. На основании известных коэффициентов разбиения p_{ij}^k, $(i,j) \in U^k$ для дуг сети $G^k = (I^k, U^k), k \in K$, сформируем дополнительные уравнения взаимосвязи дуговых потоков следующим образом. Если для узла $i \in I$ выполняется соотношение $\left|I_i^+(U^k)\right| \geq 2$, то для любой дуги, исходящей из узла i, например $(i, v_i)^k$, дуговые потоки для всех дуг за исключением дуги $(i, v_i)^k$, исходящих из узла i, выразим через дуговой поток x_{i,v_i}^k следующим образом:

$$x_{ij}^k = \frac{p_{ij}^k}{p_{i,v_i}^k} x_{i,v_i}^k, \qquad j \in I_i^+(U^k) \setminus \{v_i\}, |I_i^+(U)| \geq 2, k \in K(i), \tag{3}$$

где $(i, v_i)^k$ – каноническая дуга, исходящая из узла i. Обозначим $\beta_{ij}^k = \frac{p_{ij}^k}{p_{i,v_i}^k}$, если $\left|I_i^+(U^k)\right| \geq 2$, и $\beta_{ij}^k = p_{i,v_i}^k$, если $\left|I_i^+(U^k)\right| = 1$. Определим численные значения дуговых потоков x_{ij}^k, которые можно выразить с помощью коэффициентов разбиения p_{ij}^k, p_{i,v_i}^k, через наблюдаемые потоки $x_{i,v_i}^k = f_{i,v_i}^k$, полученные от специальных программируемых устройств (сенсоров), установленных в узлах мультиграфа G (множество M). Численные значения дуговых потоков, выраженные с помощью (3) через коэффициенты разбиения потока, подставим в уравнения системы (1). Удалим из мультиграфа $G = (I, U)$ дуги с известными значениями дуговых потоков и узлы с известными значениями внешних потоков $x_i^k = f_i^k, k \in K(i),\ i \in M$. Исключим из системы (1) те уравнения, которые не содержат неизвестных дуговых и внешних потоков. Пусть q – число уравнений вида (3) с неизвестными значениями дуговых потоков. С учетом выполненных преобразований для мультиграфа G получим новый мультиграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$. В результате система (1), (3) относитительно мультиграфа G преобразуется к виду

$$\begin{gathered}
\sum_{j \in I_i^+(\bar{U}^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U}^k)} x_{ji}^k = \begin{cases} a_i^k + x_i^k, & i \in \bar{I}_k^*, \\ a_i^k, & i \in \bar{I^k} \setminus \bar{I}_k^*, k \in K, \end{cases} \\
\sum_{(i,j) \in \bar{U}} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = 0, p \in P = \{1, \dots, q\}, \text{если } P \neq \emptyset,
\end{gathered} \tag{4}$$

$\bar{I}_k^*$ – множество узлов с неизвестным внешним потоком x_i^k в мультисети $\bar{G}$.

Сформулируем задачу размещения сенсоров для мультиграфа.

Найти минимальное число обозреваемых узлов M, для которого система (4) имеет единственное решение и определить узлы мультисети G для размещения сенсоров.

Результатам исследования и оценки однородного потока в двунаправленной сети посвящены работы [4–10].

2. Примеры локализации сенсоров в узлах мультиграфа

Пример 1. Для мультиграфа G, представленного на рисунке 1, установим сенсор в узел $M = \{5\}$, где $K(5) = \{2, 3\}$ – типы потока для узла $i = 5$. На рисунке 2 представлен мультиграф $G' = (I', U')$ после преобразования (2). Типы линий на рисунках 1 – 4 обозначены следующим образом: дуговой поток первого типа ($k = 1$) – сплошная линия, дуговой поток второго типа ($k = 2$) – прерывистая линия, дуговой поток третьего типа ($k = 3$) – пунктирная линия.

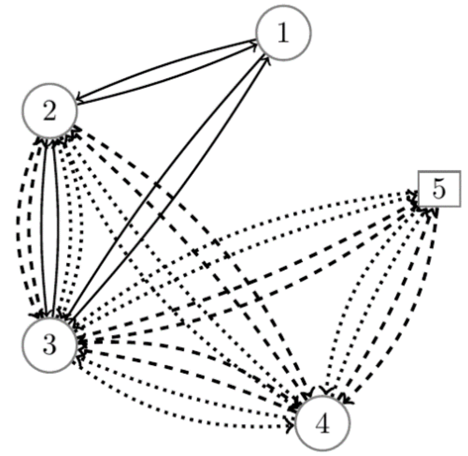

Рисунок 1 - Мультиграф $G = (I, U)$. Узел $M = \{5\}$ является обозреваемым

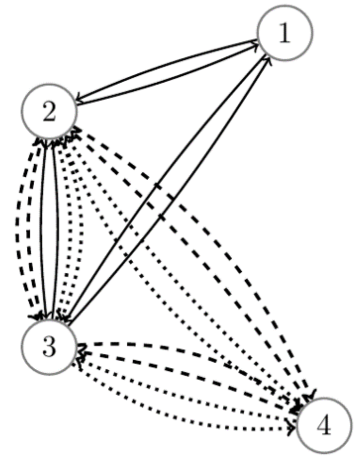

Рисунок 2 - Мультиграф $G' = (I', U')$ после преобразования (2)

Для узла 5 (пример 1) имеем $K(5) = \{2,3\}$. Поток типа $k = 1$ не входит в множество $K(5)$. Система (4) для $k = 1$ является недоопределенной.

Пример 2. Для мультиграфа G (рисунок 3) обозреваемым узлом M является узел 3, $M = \{3\}$. Мультиграф $G' = (I', U')$ после преобразования (2) представлен на рисунке 4.

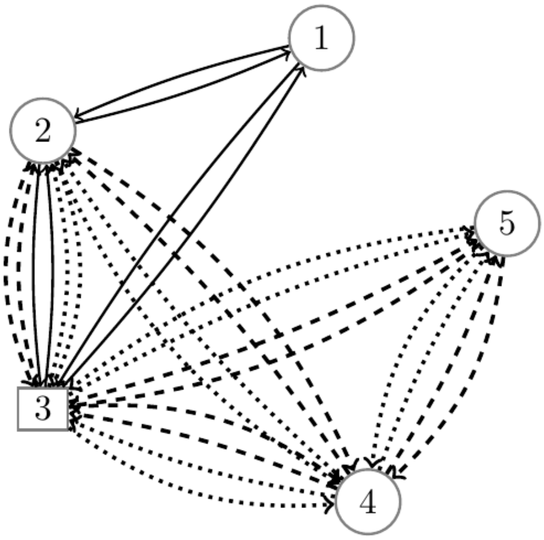

Рисунок 3 - Мультиграф $G = (I, U)$.
Узел $M = \{3\}$ является обозреваемым

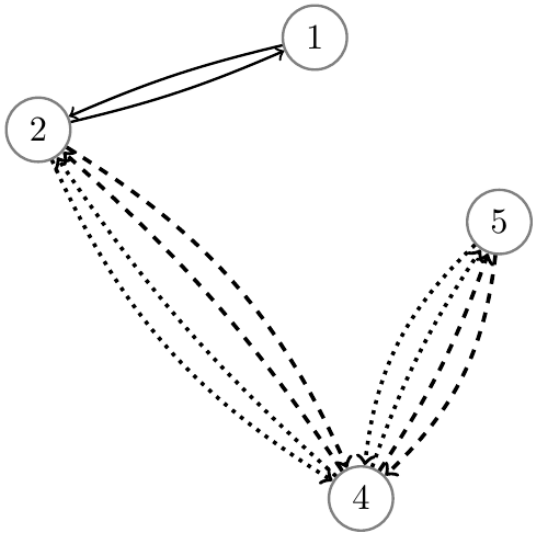

Рисунок 4 - Мультиграф $G' = (I', U')$ после преобразования (2)

Для узла $M = \{3\}$ система (4) для графа $\bar{G}$ с неизвестными дуговыми и внешними потоками имеет единственное решение.

Заключение

Предложен подход к созданию методов, алгоритмов и технологий решения задачи локализации специальных программируемых устройств (сенсоров) в узлах двунаправленного мультиграфа для оценки неоднородного потока на его ненаблюдаемых частях.

Библиографические ссылки

1. Пилипчук Л.А. О методах декомпозиции разреженных недоопределенных систем с матрицами полного и неполного ранга // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2016. № 6. С. 87–91.
2. Pilipchuk L.A., German O.V., Pilipchuk A.S. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph // Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика. 2015. №2. С. 91–96.
3. Pilipchuk L.A. Sparse Linear Systems and Their Applications. Minsk: BSU, 2013. 236 p.
4. Bianco L, Confessore G, Gentili M. Combinatorial aspects of the sensor location problem. Annals of Operation Research. 2006. № 144(1). С. 201–234.
5. Bianco L, Confessore G, Reverberi P. A network based model for traffic sensor location with implication in O/D matrix estimates. Transportation Science. 2001. № 35(1). С. 50−60.

6. Bianco L, Cerrone C, Cerulli R, Gentili M. Locating sensors to observe network arc flows: exact and heuristic approaches. Computers and Operation Research. 2014. № 46. С. 12–22.
7. Gabasov R, Kirillova F.M, Kostyukova O.I. Конструктивные методы оптимизации. Часть 3. Сетевые задачи. Minsk: Belarusian State University; 1986.
8. Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. Network flows: Theory, Algorithms, and Applications. New Jersey. 1993. 864 p.
9. Jensen P., Barnes D. Потоковое программирование. Москва: МГУ, 1984. 392 с.
10. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы линейного программирования: в 3 частях. Ч. 3: Специальные задачи. Минск: БГУ, 1980. 368 с.