УДК 517.977

К УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

В.В. Горячкин, В.В. Крахотко, Г.П. Размыслович

Белорусский государственный университет, пр.Независимости, 4, 220030, г.Минск, Беларусь, gorvv@bsu.by, krakhotko@bsu.by, razmysl@bsu.by

Исследована задача управляемости линейных нестационарных дискретных динамических систем с интервальными неопределенностями. Для таких систем вводятся понятия скользящего окна управляемости и запаса управляемости. Для однородной системы с интервальной матрицей строится матрица Коши и описываются ее свойства, исходя из понятий интервального анализа. Получены достаточные условия управляемости, записанные в терминах сингулярных чисел матрицы управляемости.

Ключевые слова: нестационарная дискретная система; управляемость систем; интервальный анализ; сингулярные числа матрицы.

ON CONTROLLABILITY PROBLEM OF LINEAR NONSTATIONARY DISCRETE SYSTEMS WITH INTERVAL INDETERMINATIONS

V.V. Goryachkin, V.V. Krakhotko, G.P. Razmyslovich

Belarusian State University, 4 Niezalieznasci Avenue, Minsk 220030, Belarus
Corresponding author: gorvv@bsu.by, krakhotko@bsu.by, razmysl@bsu.by

The controllability problem of linear nonstationary discrete dynamical systems with interval indeterminations is investigated. For such systems, the concepts of a sliding window of controllability and a margin of controllability are introduced. Basing on the concepts of interval analysis a Cauchy matrix for a homogeneous system with an interval matrix is constructed and its properties are described. Sufficient controllability conditions written in terms of singular numbers of the controllability matrix are obtained.

Keywords: nonstationary discrete system; controllability; interval analysis; singular matrix numbers.

Введение

Как известно, что задача управляемости динамических систем предшествует задаче оптимального управления. Поэтому задачи управляемости систем актуальны и важны для динамических систем и для систем управления с интервальными неопределенностями, которые описывают различные прикладные задачи в экономике, технике и т.д.

Реальные системы управления функционируют, как правило, в условиях неопределенности, обусловленной разнообразными причинами (неполные начальные данные, наличие неизвестных и неточно заданных возмущений, ошибки в каналах связи и т.п.). Поэтому в реальных задачах существуют неопределенности в описании объекта. В тоже время реальная система управления должна быть спроектирована и реализована так, чтобы она была работоспособна при наличии этих неопределенностей. В докладе описывается подход к задачам управляемости континуума дискретных динамических систем в условиях существенно ограниченной исходной информации.

1. Вспомогательные результаты

Пусть заданы нестационарные матрицы $A(t) \in R^{n \times n}$ и $B(t) \in R^{n \times r}$ ($t \in Z_+$) с интервальными неопределенностями соответственно $A(t) \in [A(t)]$, $B(t) \in [B(t)]$.

Введем в рассмотрение интервальные матрицы $[P^1(i,j)]$, $[D^1(i,j)]$:

$$P^1(i,j) = \begin{cases} A(i-1)A(i-2)\ldots A(j) & \text{при} \quad i > j \geq 0 \\ E & \text{при} \quad i = j \end{cases},$$

$$P_0^1(i,j) = \begin{cases} A_0(i-1)A_0(i-2)\ldots A_0(j) & \text{при} \quad i > j \geq 0 \\ E & \text{при} \quad i = j \end{cases},$$

$$D^1(i,j) = P^1(i,j)B(j-1) \ (\ i > j \geq 0), \quad D_0^1(i,j) = P_0^1(i,j)B_0(j-1) \ (\ i > j \geq 0),$$

причем:

a) при $A_i = A(i)$ определяем центральную (номинальную) матрицу интервальной матрицы $[P^1(i,j)]$ как $mid([P^1(i,j)]) = P_0^1(i,j)$, а радиус как

$$rad([P(i,j)]) = \Delta P(i,j) = \prod_{k=1}^{i-j} abs([A(i-k)]) - \left|P_0(i,j)\right| \geq 0$$
.

b) при $A_i = A(i)$, $Bj = B(j-1)$ положим в качестве центра интервальной матрицы $[D^1(i,j)]$ - $mid([D^1(i,j)]) = D_0^1(i,j) = P_0^1(i,j)B_0(j-1)$, а радиуса -

$$rad([D^1(i,j)]) = \Delta D^1(i,j) = \left(\prod_{k=1}^{i-j} abs([A(i-k)])\right) abs([B(j-1)]) - \left|P_0^1(i,j)B_0(j-1)\right| \geq 0.$$

Ясно, что для любых матриц $A(t) \in [A(t)]$, $B(t) \in [B(t)]$. имеем $P^1(i,j) \in [P^1(i,j)]$, $D^1(i,j) \in [D^1(i,j)]$.

Так как в интервальном анализе операция умножения не обладает свойством ассоциативности, т.е. ([A][B])[C]≠[A]([B][C]), то определим произведение ([A][B])[C] – как левое, а [A]([B][C]) – как правое произведение.

Введем в рассмотрение матрицы с правым и левым матричным произведением. Положим интервальные матрицы с правым произведением:

$$[P^2(i,j)] = \begin{cases} [A(i-1)]([A(i-2)](\cdots([A(j+1)][A(j)]))\cdots) & \text{при } i > j \ge 0, \\ E, & \text{при } i = j \end{cases},$$

$$[D^2(i,j)] = \begin{cases} [A(i-1)]([A(i-2)](\cdots(A(j+1)([A(j)][B(j-1]))\cdots) & \text{при } i > j \ge 0, \\ E, & \text{при } i = j \end{cases}$$

Тогда, легко видеть, справедливы включения

$$\begin{aligned} &\left\{ A(i)P^1(i,j) = P^1(i+1,j) \middle| A(i) \in [A(i)], P^1(i,j) \in [P^2(i,j)] \right\} \subseteq \\ &\subseteq \left\{ P^2(i+1,j) \middle| P^2(i+1,j) \in [P^2(i+1,j)] = [A(i)][P^2(i,j)] \right\} \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} &\left\{ A(i)D^1(i,j) = D^1(i+1,j) \middle| A(i) \in [A(i)], D^1(i,j) \in [D^2(i,j)] \right\} \subseteq \\ &\subseteq \left\{ D^2(i+1,j) \middle| D^2(i+1,j) \in [D^2(i+1,j)] = [A(i)][D^2(i,j)] \right\} \end{aligned}.$$

Введем по аналогии матрицы с левым произведением. Положим

$$[P^3(i,j)] = \begin{cases} (\cdots(([A(i-1)])[A(i-2)])[A(i-3)])\cdots)[A(j+1])[A(j)] & \text{при } i > j \ge 0, \\ E, & \text{при } i = j \end{cases},$$

$$[D^3(i,j)] = \begin{cases} (\cdots(([A(i-1)])[A(i-2)])[A(i-3)])\cdots)[A(j+1)])[A(j)])[B(j-1] & \text{при } i > j \ge 0, \\ E & \text{при } i = j \end{cases}$$

Легко видеть, что имеет место равенство $[D^3(i,j)] = [P^3(i,j)][B(j-1)]$. И тогда, очевидно, имеют место включения.

$$\begin{aligned} &\left\{ A(i)P^1(i,j) = P^1(i+1,j) \middle| A(i) \in [A(i)], P^1(i,j) \in [P^3(i,j)] \right\} \subseteq \\ &\subseteq \left\{ P^3(i,j-1) \middle| P^3(i,j-1) \in [P^3(i,j-1)] = [P^3(i,j)][A(j-1)] \right\} \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} &\left\{ P^1(i,j)B(j-1) = D^1(i,j) \middle| B(j-1) \in [B(j-1)], P^1(i,j) \in [P^3(i,j)] \right\} \subseteq \\ &\subseteq \left\{ D^3(i,j) \middle| D^3(i,j) \in [D^3(i,j)] = [P^3(i,j)][B(j-1)] \right\} \end{aligned}.$$

Результат пересечения указанных матриц - интервальные матрицы:

$[P(i,j)]=[P^1(i,j)]\cap[P^2(i,j)]\cap[P^3(i,j)]$,

$[D(i,j)]=[D^1(i,j)]\cap[D^2(i,j)]\cap[D^3(i,j)]$,.

содержащие соответственно точечные матрицы $P^1(i,j), D^1(i,j)$, когда матрицы с интервальными неопределенностями $A(t)$, $B(t)$ независимо друг от друга пробегают любые значения из заданных интервалов $A(t)\in[A(t)]$, $B(t)\in[B(t)]$.

Воспользуемся, полученными результатами для исследования задач управляемости.

2. Управляемость по состоянию

Рассмотрим нестационарную дискретную систему

$$x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\, t\in Z_+ \tag{1}$$

с интервальными неопределенностями $A(t)\in[A(t)]$, $B(t)\in[B(t)]$. Здесь $x(t)\in R^n -$ вектор состояния; $u(t)\in R^r -$ управляющее воздействие; $A(t)$, $B(t)$ и $[A(t)],[B(t)]$ соответственно точечные и интервальные вещественные матрицы согласованной размерности.

Пусть η,τ целые числа, причем $\tau=\eta+\rho, \rho\geq 1$ и $(\eta,\tau)=\{\eta,\eta+1,\dots,\tau-1\}=\{\eta,\eta+1,\dots,\eta+\rho-1\}$ – подмножество (называемое отрезком) множества Z_+, $\rho -$ диаметр этого подмножества (ширина отрезка).

О п р е д е л е н и е 1. *Система* (1) *управляема по состоянию на множестве* (η,τ) [2], *если для любых точек* v,w *из* R^n *найдется такое управление* $u(\eta,\tau)=\{u_\eta,u_{\eta+1},\dots,u_{\tau-1}\}$, *что* $x(t)=x(t,\eta,u(\eta,\tau))$ *в момент* $t=\tau$ *удовлетворяет условию* $x(\tau)=w$ *(здесь* $x(t)=x(t,\eta,u(\eta,\tau))$ *- решение системы* (*1*)*, порожденное начальным значением* $x(\eta)=v$ *и входным воздействием* $u(\eta,\tau)$).

О п р е д е л е н и е 2. *Скользящим окном управляемости* (η,τ) *(далее просто окном управляемости) назовем множество значений независимой переменной* $\eta\leq t\leq\tau$, *на которых система* (1) *с центральными матрицами* $A_0(t)$ и $B_0(t)$ (*так называемая центральная система) вполне управляема, стартуя с начального состояния* $x(\eta)$. *Другими словами, стартуя с произвольного* $x(\eta)$, *траектория решения центральной (номинальной)* *системы в момент времени τ попадет в любое наперед заданное состояние.*

Определение 3. *Интервальная система управляема по состоянию в окне управляемости тогда и только тогда, когда управляемо по состоянию каждое уравнение системы в этом окне.*

Пусть (η,τ) некоторое окно управляемости. Очевидно, матрица $P^1(i,j)$ является матрицей Коши [2] однородного уравнения, полученного из (1) при $u(t)\equiv 0, t\geq 0$. Согласно формуле Коши [2], элемент $x(t)$ в любой момент t в окне (η,τ) определяется соотношением

$$x(t)=P^1(t,\eta)v+\sum_{j=\eta}^{t-1}P^1(t,j+1)B(j)u(j)=P^1(t,\eta)v+\sum_{j=\eta}^{t-1}D^1(t,j+1)u(j), x(\eta)=v.$$

В окне (η,τ) определим матрицу $Q^1(\tau,\eta)= =(D^1(\tau,\eta+1),D^1(\tau,\eta+2),\ldots,D^1(\tau,\tau))$. Известно, что система (1) управляема на множестве (η,τ) тогда и только тогда, когда $rank(Q^1(\eta,\tau))=n$ [2].

Рассмотрим интервальную матрицу

$$[Q(\tau,\eta)]=([D(\tau,\eta+1)],[D(\tau,\eta+2)],\ldots,[D(\tau,\tau)]).$$

Определение 4. *Интервальную матрицу назовем матрицей полного ранга* [3], *если она содержит точечные матрицы только полного ранга.*

Из определения 4 следует, если в окне (η,τ) $[Q(\tau,\eta)]$ является матрицей полного ранга, то множество всех матриц управляемости интервальной системы в этом окне так же состоит только из матриц полного ранга.

Для установления достаточных условий управляемости воспользуемся признаками полного ранга интервальных матриц, приведенными в работе [3].

Отсюда справедлива

Теорема 1. *Интервальная система (1) управляема по состоянию в окне* (η,τ), *если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

a) $\sigma_{\max}(rad([Q(\tau,\eta)]))<\sigma_{\min}(mid([Q(\tau,\eta)]))$; (2)

b) *система неравенств* $|z'mid([Q(\tau,\eta)])|\leq|z'|rad([Q(\tau,\eta)]), z\in R^n$, (3)

имеет единственное нулевое решение относительно вектор-столбца z.

Здесь $\sigma_{\max}(.)$ *и* $\sigma_{\min}(.)$ - *наименьшее и наибольшее из сингулярных чисел матрицы* [4].

Доказательство. Согласно теореме и следствию [3] выполнение, по крайней мере, одного из условий (2), (3) влечет полноранговость интервальной матрицы $[Q(\tau,\eta)]$. Значит, интервальная система (1) управляема.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть центральная система* ($A_0(t) = mid([A(t)])$, $B_0(t) = mid([B(t)])$)

$$x(t+1) = A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t) \tag{4}$$

управляема по состоянию в окне (η,τ) *(то есть матрица управляемости центральной системы (4)* $Q_0^1(\tau,\eta) = (D_0^1(\tau,\eta+1), D_0^1(\tau,\eta+2),\ldots, D_0^1(\tau,\tau)) = mid([Q^1(\tau,\eta)])$ *полного ранга), тогда каждое уравнение интервальной системы управляемо по состоянию, если*

$$\rho(rad([Q^1(\tau,\eta)])\left|(mid([Q^1(\tau,\eta)]))^{+}\right|<1,$$

где $\rho(\cdot)$ *- спектральный радиус;* $(mid([Q^1(\tau,\eta,)]))^{+}$ *- псевдообратная* [4] для *точечной матрицы* $mid([Q^1(\tau,\eta)])$.

Доказательство теоремы следует из доказательства достаточного условия полноранговости интервальной матрицы $[Q^1(\tau,\eta)]$ ([3, с. 295-296]).

Замечание 1. Заметим, что матрица управляемости центральной системы (4) $mid([Q^1(\tau,\eta)])$ может не совпадать с серединой интервала $[Q(\tau,\eta)]$.

Для быстрого и грубого оценивания спектрального радиуса, который используется в теореме 2, можем использовать его оценку сверху какой-нибудь матричной нормой.

Замечание 2. В работе [3] приведены примеры интервальных матриц, которые по одним признакам имеют полный ранг, по другим нельзя сделать определенный вывод. Примеры также показывают, что для интервальных матриц традиционные способы рассуждений линейной алгебры и матричного анализа и сформировавшаяся интуиция на их основе могут не работать. Например, в обычном не интервальном случае полноранговая матрица просто по определению имеет квадратную неособенную матрицу, порядок которой равен рангу матрицы. В интервальном случае это не так. Поэтому для определения полноранговости интервальной матрицы рекомендуем воспользоваться предложенными признаками.

Пример 1. Интервальная матрица $\begin{pmatrix} 1 & -1 & [-1,1] \\ [0,1] & [0,1] & 1 \end{pmatrix}$ – полного ранга (ранг матрицы равен 2), в тоже время она не содержит неособенных интервальных 2×2 – подматриц, что нетрудно обнаружить полным перебором всех таких подматриц.

Замечание 3. Увеличение продолжительности воздействия управляющего воздействия (расширение окна (η,τ)), вообще говоря, приводит к возрастанию вероятности наличия свойства управляемости уравнения (1). Как показывают примеры это, вообще говоря, имеет место и в случае управляемости интервальной системы (1).

3. Запас управляемости интервальной системы

На практике при проектировании реальных систем управления, математические модели, которых задаются дискретным уравнением вида (1), возникает задача о сохранении управляемости системы, когда ее параметры независимо друг от друга изменяются в некоторых множествах. Естественно, возникает задача оценки диаметров множеств неопределенности параметров (назовем – порогов допустимой разбалансировки). Математически это можем описать следующим образом.

Пусть определено некоторое окно (η,τ), в котором центральная система управляема. Радиусы интервальных матриц $\Delta A(t)$ и $\Delta B(t)$ будем считать порогами допустимой разбалансировки, при которых система сохраняет свойство управляемости.

Запас управляемости интервальной системы определим как максимальное вещественное число $\alpha\geq 0$ (коэффициент пропорциональности при радиусах интервальных матриц), при котором интервальная система управляема с неопределенностями $A(t)\in[A_\alpha(t)]=[A_0(t)-\alpha\Delta A(t),$ $A_0(t)+\alpha\Delta A(t)],$ $B(t)\in[B_\alpha(t)]=[B_0(t)-\alpha\Delta B(t),B_0(t)+\alpha\Delta B(t)]$.

Оценку и нахождение запаса управляемости α проводим в четыре этапа по следующей схеме:

1. По матрице управляемости центральной (номинальной) системы находим ее первое окно управляемости (η,τ) и фиксируем его.
2. Если требование полного ранга интервальной матрицы $[Q^1(\tau,\eta)]$ не выполняется в установленном окне при $\alpha=1$, то, скорей всего, были просчеты на стадии проектирования динамической системы при выборе допустимых порогов разбалансировки. Будем искать $\alpha\in[0,1)$ пропорционально уменьшая радиусы $\Delta A(t)$ и $\Delta B(t)$, например, по аналогии с методом половинного деления отрезка пополам. Итерационный процесс уменьшения радиусов матриц, очевидно, всегда сходится, так как при $\alpha=0$ интервальная система вырождается в управляемую центральную систему.

3. Если проектировщика не устраивают полученные в пункте 2 радиусы $\alpha\Delta A(t)$ и $\alpha\Delta B(t)$, то переходим на пункт 1 для поиска следующего окна управляемости. Иначе выход.
4. Если требование управляемости центральной системы выполняется в окне при $\alpha = 1$, то выберем некоторое $\Delta\alpha > 0$, и на первом шаге проверим требование полного ранга интервальной матрицы $[Q^1(\tau,\eta)]$с коэффициентом $\alpha + \Delta\alpha$. Далее продолжим на каждом шаге увеличивать α на $\Delta\alpha$ до тех пор, пока требование полноранговости интервальной матрицы будет не выполнено. В качестве запаса управляемости берем предыдущее значение α. Если точность оценки не устраивает, то вернемся на предыдущее значение α и продолжим процесс уточнения (по схеме пункта 2), уменьшая $\Delta\alpha$ на 2. Так на некоторой итерации k с $\Delta\alpha/2^k$ будет найдено $\alpha^* > 1$ с наперед заданной точностью, при котором на интервалах неопределенности $[A_{\alpha^*}(t)]$ и $[B_{\alpha^*}(t)]$ интервальная система сохраняет свойство управляемости в исследуемом окне. Если проектировщика устраивают на некотором шаге увеличенные радиусы $\alpha\Delta A(t)$ и $\alpha\Delta B(t)$ (допустимые пороги разбалансировки), то процесс оценки запаса управляемости завершаем.

Если выбранное окно управляемости не устраивает проектировщика или процедура оценки запаса управляемости не привела к желаемому результату, то ищем следующее окно управляемости и оценку запаса управляемости ансамбля проводим по предложенной выше схеме.

Пример 2. Рассмотрим модельный пример, в котором для простоты ограничимся случаем $n = 2, r = 1$. Пусть соответствующие матрицы системы (1) определены на интервалах

$$[A(t)] = \begin{pmatrix} [2\sin\frac{\pi}{4}\mathrm{t},\ \mathrm{t(t+1)}] & [\mathrm{t},\ \exp(\mathrm{t})] \\ [t-1,\ t+1] & [t\cos\frac{\pi}{3}\mathrm{t},\ \mathrm{t}+0.5\ ] \end{pmatrix}, [B(t)] = \begin{pmatrix} [\sqrt{t}-1,\ t+1] \\ [t^2-1,\ t^2+1] \end{pmatrix}, t \in Z_+.$$

Для уменьшения объема вычислений сначала найдем первое окно, в котором центральная система управляема. Это будет окно (1,2), и проверим требование управляемости ансамбля. В этом окне центральная система управляема, но требование полноранговости интервальной матрицы $[Q^1(2,1)]$ не выполняется. И только в окне (3,4) обнаружили, что центральная система управляема с матрицей управляемости $Q_0^1(4,3)$, то есть

$$rank(Q_0^1(4,3)) = rank\begin{pmatrix} 287.355\,7 & 3.00 \\ 20.681\,02 & 16.0 \end{pmatrix} = 2,$$

и соответствующая интервальная 2×2 – матрица $[Q^1(4,3)]$ – полного ранга

$$rank([Q^1(4,3)]) = rank\begin{pmatrix} [\ 32.002331806,\ 625.98150033] & [\ 1.00,\ 5.00\ ] \\ [\ -17.877363946\ ,\ 65.00000000\ ] & [\ 15.0\ ,\ 17.0\ ] \end{pmatrix} = 2.$$

Кстати, на отрезке [0,2] можем вообще отключить управление и включить его вычисление только в окне управляемости (3,4).

В окне (3,4) оценим с заданной точностью верхнюю границу запаса управляемости. Будем последовательно увеличивать коэффициент α, стартуя с $\alpha = 1$. Применим процесс уточнения оценки запаса управляемости.) В результате получим, что при $\alpha = 1.037$ интервальная матрица $[Q^1(4,3)]$ – полного ранга, а при $\alpha = 1.038$ не полного ранга. Таким образом, в качестве оценки запаса управляемости ансамбля в окне (3,4) может быть взято число $\alpha = 1.037$ с точностью до трех знаков после запятой.

Заметим, что в окне (4,5) интервальная матрица $[Q^1(5,4)]$ в этом примере уже становится матрицей неполного ранга.

Заключение

Интервальную систему можно также воспринимать как частный случай континуума систем с переключением, когда применяются любые законы переключения динамических систем с одного уравнения на другое уравнение. Значит, утверждения теорем 1,2 могут быть применены для этого частного случая.

Библиографические ссылки

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.
2. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2001. 400 с.
3. Шарый С.П. Об интервальных матрицах полного ранга // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН Сиб. отделение. Новосибирск. 2014. Т. 17, № 3. С. 289–304.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.