УДК 519.24

МОМЕНТЫ ПЕРВЫХ ДВУХ ПОРЯДКОВ ОЦЕНКИ СЕМИВАРИОГРАММЫ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Т.В. Цеховая, Д.А. Мармузевич

Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь, tsekhavaya@bsu.by, marmuzev@bsu.by

Для случайного процесса с дискретным временем найдены выражения для математического ожидания, дисперсии, ковариационной функции, семивариограммы и спектральной плотности, исследована стационарность процесса. Построена оценка семивариограммы рассматриваемого случайного процесса, получены выражения для первых двух моментов исследуемой статистики.

Ключевые слова: случайный процесс; семивариограмма; оценка; стационарность в широком смысле; внутренняя стационарность.

MOMENTS OF THE FIRST TWO ORDERS OF ESTIMATION OF THE SEMIVARIOGRAM OF A RANDOM PROCESS

T.V. Tsekhavaya, D.A. Marmuzevich

Belarusian State University, 4 Niezalieznasci Avenue, Minsk 220030, Belarus, tsekhavaya@bsu.by, marmuzev@bsu.by

For a random process with discrete time, expressions for the expected value, variance, covariance function, semivariogram, and spectral density are found, and the stationarity of the process is investigated. An estimate of the semivariogram of the random process under consideration is constructed, expressions for the first two moments of the statistics under study are obtained.

Keywords: random process; semivariogram; estimate; second-order stationarity; intrinsic stationarity.

Введение

В настоящее время для решения многих прикладных задач прогнозирования применяется геостатистический подход, в частности, метод кригинг. В основе кригинга лежит семивариограмма. В связи с этим актуальны задачи исследования свойств семивариограммы, а также построения и изучения оценок этой функции.

Результаты исследований свойств семивариограммы изложены, например, в работах [1–3]. Статистические свойства различных оценок семиавариограммы случайных процессов исследовались, например, в [1, 4-6]. В данной статье для гауссовского случайного процесса с дискретным временем найдены выражения для ковариационной функции, семивариограммы и спектральной плотности, также построена оценка семивариограммы рассматриваемого случайного процесса, получены выражения для ее первых двух моментов.

1. Теоретические основы

Рассмотрим случайный процесс $Z(t) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i X_i(t)$, где $t \epsilon Z,\ p \epsilon N$, $\beta_i -$ константы, такие что:

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i^2 < \infty, \tag{1}$$

а $X_i(t) -$ гауссовские стационарные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием, ковариационными функциями $R_i(t),\ t \in Z$, спектральными плотностями $f_i(\lambda),\ \lambda \in \Pi = [-\pi; \pi]$.

Будем полагать, что взаимные ковариационные функции $R_{ij}(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \epsilon Z$, случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t),\ i, j = \overline{1, p},\ i \neq j$, удовлетворяют равенству: $R_{ij}(t_1, t_2) = M\left[X_i(t_1) X_j(t_2)\right] = 0$.

Исследуем процесс $Z(t)$ на стационарность. Для этого найдем его характеристики первых двух порядков во временной области. Легко показать, что $M\big(Z(t)\big) = 0$, ковариационная функция $R_z(t_1, t_2)$ имеет вид $R_z(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i^2 R_i(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i^2 R_i(t_1 - t_2) = R_z(t_1 - t_2)$, а дисперсия $DZ(t) = R_z(t, t) = R_z(0) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i^2 R_i(0)$.

Учитывая условие (1), имеем $DZ(t) < \infty$. Таким образом, случайный процесс $Z(t)$ является стационарным в широком смысле в силу соответствующего определения.

Применяя связывающее соотношение между ковариационной функцией и семивариограммой стационарного в широком смысле случайного процесса [1], получим выражение для семивариограммы процесс $Z(t)$:

$$\gamma_Z(t) = R_Z(0) - R_Z(t) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i^2 \big(R_i(0) - R_i(t)\big), \qquad t \epsilon Z.$$

Отсюда вытекает, что случайный процесс $Z(t)$ является также внутренне стационарным.

По определению спектральной плотности

$$f_Z(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} R_Z(t) e^{-i\lambda t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{p} \beta_i^2 R_i(t) \cos\lambda t, \ \ \lambda \in \Pi.$$

Следует отметить, что случайный процесс $Z(t)$ является гауссовским как линейная комбинация гауссовских случайных процессов.

Предположим далее, что $Z(1), \dots, Z(n) - n$ последовательных наблюдений за процессом $Z(t),\ t \in Z$. В качестве оценки семивариограммы рассмотрим статистику вида:

$$\widehat{\gamma_Z}(h) = \frac{1}{2(n-h)} \sum_{t=1}^{n-h} \big(Z(t) - Z(t+h)\big)^2, \qquad (2)$$

где $h = 0, \dots, n-1$. Также учтем, что $\hat{\gamma}(h) = \hat{\gamma}(-h),\ h = 0, \dots, n-1$ и $\hat{\gamma}(h) = 0$, где $|h| \geq n$.

Найдем выражения для первых двух моментов статистики (2) через временные и частотные характеристики процесса $Z(t)$.

2. Результаты

Теорема 1. *Для оценки $\widehat{\gamma_z}(h)$ имеют место следующие соотношения:*

$$M\widehat{\gamma_Z}(h) = \gamma_Z(h), \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}\{\hat{\gamma}_Z(h_1), \hat{\gamma}_Z(h_2)\} = {} & \frac{1}{2(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{t_1=1}^{n-h_1} \sum_{t_2=1}^{n-h_2} \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} \beta_i^2 \beta_j^2 (R_i(t_1-t_2)R_j(t_1-t_2) - \\ & -2R_i(t_1-t_2)R_j(t_1-t_2-h_2) + R_i(t_1-t_2-h_2)R_j(t_1-t_2-h_2) - 2R_i(t_1-t_2)R_j(t_1+h_1- \\ & -t_2) + 2R_i(t_1-t_2)R_j(t_1+h_1-t_2-h_2) + 2R_i(t_1-t_2-h_2)R_j(t_1+h_1-t_2) - 2R_i(t_1-t_2- \\ & -h_2)R_j(t_1+h_1-t_2-h_2) + R_i(t_1+h_1-t_2)R_j(t_1+h_1-t_2) - 2R_i(t_1+h_1-t_2)R_j(t_1+h_1- \\ & -t_2-h_2) + R_i(t_1+h_1-t_2-h_2)R_j(t_1+h_1-t_2-h_2). \end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} D\hat{\gamma}_Z(h) = {} & \frac{1}{(n-h)^2} \sum_{t_1=1}^{n-h_1} \sum_{t_2=1}^{n-h_2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \beta_i^2 \beta_j^2 (4R_i(t_1-t_2)R_j(t_1-t_2) - 2R_i(t_1-t_2)R_j(t_1- \\ & -t_2-h) + R_i(t_1-t_2-h)R_j(t_1-t_2-h) - 2R_i(t_1-t_2)R_j(t_1+h-t_2) + 2R_i(t_1-t_2-h)\times \\ & \times R_j(t_1+h-t_2) - 2R_i(t_1-t_2-h)R_j(t_1-t_2) + R_i(t_1+h-t_2)R_j(t_1+h-t_2) - \\ & -2R_i(t_1+h-t_2)R_j(t_1-t_2)), \end{aligned}$$

$h_1, h_2, h = 0, 1, \dots, n-1, R_j(t) -$ ковариационные функции процессов $X_j(t),\ t \in Z, j = 1, \dots, p$.

Доказательство. Из определения семивариограммы и свойств математического ожидания, утверждение (3) теоремы вытекает очевидным образом.

Воспользуемся определением ковариационной функции, выражением для оценки семивариограммы (2) и свойствами математического ожидания, применим элементарные преобразования. Тогда

$$\operatorname{cov}\{\hat{\gamma}_Z(h_1),\hat{\gamma}_Z(h_2)\}=\frac{1}{4(n-h_1)(n-h_2)}\sum_{t_1=1}^{n-h_1}\sum_{t_2=1}^{n-h_2}M[Z^2(t_1)Z^2(t_2)]-2M[Z^2(t_1)Z(t_2)\times$$
$$\times Z(t_2+h_2)]+M[Z^2(t_1)Z^2(t_2+h_2)]-2M[Z(t_1)Z(t_1+h_1)Z^2(t_2)]+4M[Z(t_1)\times$$
$$\times Z(t_1+h_1)Z(t_2)Z(t_2+h_2)]-2M[Z(t_1)Z(t_1+h_1)Z^2(t_2+h_2)]+M[Z^2(t_1+h_1)Z^2(t_2)]-$$
$$-2M[Z^2(t_1+h_1)Z(t_2)Z(t_2+h_2)]+M[Z^2(t_1+h_1)Z^2(t_2+h_2)]-(M[Z^2(t_1)]M[Z^2(t_2)]-$$
$$-2M[Z^2(t_1)]M[Z(t_2)Z(t_2+h_2)]+M[Z^2(t_1)]M[Z^2(t_2+h_2)]-2M[Z(t_1)Z(t_1+h_1)]\times$$
$$\times M[Z^2(t_2)]+4M[Z(t_1)Z(t_1+h_1)]M[Z(t_2)Z(t_2+h_2)]-2M[Z(t_1)Z(t_1+h_1)]\times$$
$$\times M[Z^2(t_2+h_2)]+M[Z^2(t_1+h_1)]M[Z^2(t_2)]-2M[Z^2(t_1+h_1)M[Z(t_2)Z(t_2+h_2)]+$$
$$+M[Z^2(t_1+h_1)]M[Z^2(t_2+h_2)]]).$$

Из определения смешанного момента четвертого порядка, используя связывающее соотношение смешанных моментов со смешанными семи-инвариантами, учитывая свойства процесса $Z(t)$, получим:

$$\operatorname{cov}\{\hat{\gamma}_Z(h_1),\hat{\gamma}_Z(h_2)\}=\frac{1}{4(n-h_1)(n-h_2)}\sum_{t_1=1}^{n-h_1}\sum_{t_2=1}^{n-h_2}2R_Z(t_1,t_2)R_Z(t_1,t_2)-4R_Z(t_1,t_2)\times$$
$$\times R_Z(t_1,t_2+h_2)+2R_Z(t_1,t_2+h_2)R_Z(t_1,t_2+h_2)-4R_Z(t_1,t_2)R_Z(t_1+h_1,t_2)+$$
$$+4R_Z(t_1,t_2)R_Z(t_1+h_1,t_2+h_2)+4R_Z(t_1,t_2+h_2)R_Z(t_1+h_1,t_2)-4R_Z(t_1,t_2+h_2)\times$$
$$\times R_Z(t_1+h_1,t_2+h_2)+2R_Z(t_1+h_1,t_2)R_Z(t_1+h_1,t_2)-4R_Z(t_1+h_1,t_2)\times$$
$$\times R_Z(t_1+h_1,t_2+h_2)+2R_Z(t_1+h_1,t_2+h_2)R_Z(t_1+h_1,t_2+h_2).$$

Учитывая стационарность случайных процессов $X_i(t)$, $t\in Z$, получим требуемое равенство (4).

Отметим, что $D\hat{\gamma}_Z(h)=\operatorname{cov}\{\hat{\gamma}_Z(h),\hat{\gamma}_Z(h)\}$.

Найдем выражения для вторых моментов оценки семивариограммы через спектральные плотности процесса $Z(t)$.

Теорема 2. *Для ковариации и диспесии оценки семиваригарммы, задаваемой равенством (2), справедливы соотношения соответственно:*

$$\operatorname{cov}\{\hat{\gamma}_Z(h_1),\hat{\gamma}_Z(h_2)\}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\beta_i^2\beta_j^2\Big(\frac{\pi}{n-h^-}\int_{\Pi}F_{ij}(x)\cos\frac{(h_1-h_2)x}{2}\Phi_{n-h^+}(x)dx+$$
$$+\frac{1}{2(n-h_1)(n-h_2)}\int_{\Pi}F_{ij}(x)\Delta_{h^+-h^-}(x)\Delta_{n-h^+}(x)\cos\frac{(n-h^+)x}{2}dx\Big),\qquad(5)$$

$$D\hat{\gamma}_Z(h)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\beta_i^2\beta_j^2\frac{\pi}{n-h^-}\int_{\Pi}F_{ij}(x)\Phi_{n-h}(x)dx,\qquad(6)$$

$$F_{ij}(x)=\int_{\Pi} f_i(x-y)\,f_j(y)\,g(x,y)\,dy, \tag{7}$$

$f_i(\lambda), \lambda \in \Pi,$ —спектральные плотности процессов $X_i(t),\ t \in Z,\ i = 1, \ldots, p,$

$$\begin{gathered} g(x,y)=(1-2e^{-iyh_2}+e^{-ixh_2}-2e^{iyh_1}+2e^{iy(h_1-h_2)}+2e^{-i(x-y)h_2+iyh_1}- \\ -2e^{iyh_1-ixh_2}+e^{ixh_1}-2e^{ixh_1-iyh_2}+e^{ix(h_1-h_2)})e^{i\frac{h_2-h_1}{2}x}, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\Phi_T(x)=(2\pi T)^{-1}\Delta_T^2(x)-\text{ядро Фейера}, \tag{9}$$

$$h^+=\max(h_1,h_2);h^-=\min(h_1,h_2),h,h_1,h_2=0,\ldots,n-1, \tag{10}$$

$$\Delta_T(x)=\frac{\sin Tx/2}{\sin x/2}, T \in N, x \in R. \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим (4). Используя связывающее соотношение между ковариационной функцией и спектральной плотностью стационарного в широком смысле процесса $Z(t)$, $t \in Z$, запишем:

$$\begin{gathered} \operatorname{cov}\{\hat{\gamma}_Z(h_1),\hat{\gamma}_Z(h_2)\}=\frac{1}{2(n-h_1)(n-h_2)}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\beta_i^2\beta_j^2[\iint_{\Pi^2} f_i(x_1)\,f_j(x_2)(1-2e^{-ix_2h_2}+ \\ +e^{-ih_2(x_1+x_2)}-2e^{ix_2h_1}+2e^{ix_2(h_1-h_2)}+2e^{--ix_1h_2+ix_2h_1}-2e^{ix_2h_1-ih_2(x_1+x_2)}+e^{i(x_1+x_2)h_1}- \\ -2e^{ih_1(x_1+x_2)-ix_2h_2}+e^{i(x_1+x_2)(h_1-h_2)})\sum_{t_1=1}^{n-h_1}e^{it_1(x_1+x_2)}\sum_{t_2=1}^{n-h_2}e^{-it_2(x_1+x_2)}dx_1dx_2]. \end{gathered}$$

Сделаем замену переменных интегрирования $x_1 = x - y,\ x_2 = y$, учитывая элементарное соотношение $\sum_{t=1}^{T}e^{itx}=\Delta_T(x)e^{i\frac{T+1}{2}x}$, получим:

$$\begin{gathered} \operatorname{cov}\{\hat{\gamma}_Z(h_1),\hat{\gamma}_Z(h_2)\}=\frac{1}{2(n-h_1)(n-h_2)}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\beta_i^2\beta_j^2[\iint_{\Pi^2} f_i(x-y)\,f_j(y)(1-2e^{-iyh_2}+ \\ +e^{-ixh_2}-2e^{iyh_1}+2e^{iy(h_1-h_2)}+2e^{--i(x-y)h_2+iyh_1}-2e^{iyh_1-ixh_2}+e^{ixh_1}-2e^{ixh_1-iyh_2}+e^{ix(h_1-h_2)})\times \\ \times\Delta_{n-h_1}(x)e^{i\frac{n-h_1+1}{2}x}\Delta_{n-h_2}(x)e^{-i\frac{n-h_2+1}{2}x}d(x-y)dy]= \end{gathered}$$

$$=\frac{1}{2(n-h_1)(n-h_2)}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\beta_i^2\beta_j^2[\iint_{\Pi^2} f_i(x-y)\,f_j(y)\,g(x,y)\Delta_{n-h_1}(x)\Delta_{n-h_2}(x)dxdy],$$

где функции $g(x,y), \Delta_T(x)$ имеют вид (8) и (11) соответственно.

Рассмотрим случай $h_1 > h_2$. Используем элементарное тригонометрическое равенство и соотношение (9), получим:

$$\operatorname{cov}\{\hat{\gamma}_Z(h_1),\hat{\gamma}_Z(h_2)\}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\beta_i^2\beta_j^2\Big(\frac{\pi}{n-h_2}\int_{\Pi}F_{ij}(x)\cos\frac{(h_1-h_2)}{2}\Phi_{n-h_1}(x)dx+ \\ +\frac{1}{2(n-h_1)(n-h_2)}\int_{\Pi}F_{ij}(x)\Delta_{h_1-h_2}(x)\Delta_{n-h_1}(x)\cos\frac{(n-h_1)x}{2}dx\Big), \tag{12}$$

где функция $F_{ij}(x)$ задается соотношением (7).

Аналогично запишем для случая $h_1 \le h_2$:

$$\operatorname{cov}\{\hat{\gamma}_Z(h_1),\hat{\gamma}_Z(h_2)\}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\beta_i^2\beta_j^2\Big(\frac{\pi}{n-h_1}\int_{\Pi}F_{ij}(x)\cos\frac{(h_2-h_1)}{2}\Phi_{n-h_2}(x)dx+ \\ +\frac{1}{2(n-h_1)(n-h_2)}\int_{\Pi}F_{ij}(x)\Delta_{h_2-h_1}(x)\Delta_{n-h_2}(x)\cos\frac{(n-h_2)x}{2}dx\Big). \tag{13}$$

Использовав соотношение (10) и объединив выражения (12), (13), получим выражение (5). Положив $h_1 = h_2 = h$ в равенстве (5), получим выражение (6).

Библиографические ссылки

1. Cressie N. Statistics for Spatial Data. New York: Wiley, 1991. 900 p.
2. Цеховая Т.В. Свойства вариограммы внутренне стационарных случайных процессов // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения. Материалы научной конференции. Минск, БГУ. 2004. С. 181–186.
3. Цеховая Т.В. Свойства внутренне стационарных случайных процессов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика, 2017. № 1. С. 28–33.
4. Цеховая Т.В. Асимптотическое распределение оценки семивариограммы гауссовского случайного процесса // Вестн.БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2015. № 1. С. 89 – 95.
5. Цеховая Т.В. Асимптотическое распределение оценки вариограммы // Вестник БрГУ им. А.С. Пушкина. 2008. №2(31). С. 32–37. Network //Mathematical Geosciences. 2022. Т. 54. №. 1. С. 177–205.
6. Mazzella A., Mazzella A. The importance of the model choice for experimental semivariogram modeling and its consequence in evaluation process // Journal of Engineering. 2013. 11 p.