УДК 519.21

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЕТЕЙ С ТРЕБОВАНИЯМИ РАЗНОГО ТИПА И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ

В.А. Немилостивая, Ю.В. Малинковский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
ул. Кирова, 119, 246019, г. Гомель, Беларусь,
e-mail: vetta.i.am@gmail.com , Malinkovsky@gsu.by

Рассматривается экспоненциальная сеть массового обслуживания с однолинейными и многолинейными узлами. В систему поступают требования различного типа. При этом длительность ожидания обслуживания является случайной величиной, имеющей показательное распределение, зависящее от числа требований в узле. Когда требование обслужилось или время ожидания обслуживания закончилось, заявка переходит в другой узел системы и меняет свой тип или покидает сеть. Устанавливаются достаточные условия эргодичности, условия существования и вид стационарного распределения вероятностей состояний в мультипликативной форме.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания; ограниченное время ожидания; однолинейные узлы; многолинейные узлы; стационарное распределение.

STATIONARY DISTRIBUTION FOR NETWORKS WITH DIFFERENT REQUIREMENTS AND EXPONENTIAL CONSTRAINED SOJOURN TIME

V.A. Niamilastsivaya, Yu.V. Malinkovskii

F. Scorina Gomel State University, Gomel, BELARUS,
e-mail: vetta.i.am@gmail.com , Malinkovsky@gsu.by

We consider an exponential queuing network containing nodes of two types – single-line and multi-line. The network receives customers of various types. The sojourn time of customers at the network nodes is a random value whose conditional distribution for a fixed number of customers in a node is exponential. When the requirement is serviced or the service waiting time is over, the request moves to another node of the system and changes its type or leaves the network. Sufficient conditions for ergodicity, existence conditions, and the form of the stationary distribution of state probabilities in multiplicative form are established.

Keywords: queuing network; limited waiting time; single-line nodes; multi-line nodes; stationary distribution.

Введение

Функционирование многих реальных объектов в области информационно-вычислительных систем описывают сети массового обслуживания. При этом аналитические результаты теории сетей массового обслуживания используются и при имитационном моделировании.

Сети массового обслуживания с ограничениями на время пребывания в узлах ранее рассматривались в работах [1–4]. История и суть вопроса изложены в издании Б. В. Гнеденко, И. В. Коваленко [1]. В публикации [5] исследуется стационарное поведение сети, в которой в некоторых узлах матрицы маршрутизации обслуженных заявок и заявок, время пребывания которых истекло, различны, а в других узлах – совпадают. Модель сети в данной работе усложняется тем, что требования, попадающие в узел, могут быть различных типов.

1. Постановка задачи

В сеть массового обслуживания, образованную N узлами, Q из которых однолинейны, а о остальные $N-Q$ многолинейны, поступает стационарный пуассоновский поток с интенсивностью λ. Поступающее требование независимо от других направляется в i-й узел и становится требованием типа l с вероятностью $p_{0(i,l)}$ $\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} p_{0(i,l)} = 1\right)$. Система с бесконечной очередью ожидания. Многолинейные системы можно свести к однолинейным с переменной условной интенсивностью обслуживания $\mu(n) = \mu \mathrm{I}_{\{n\neq 0\}}$, где n – количество требований в системе (I_A – индикатор события A, равный 1, если A происходит, и равный 0, если A не происходит).

Время обслуживания требования в i- ом однолинейном узле имеет показательное распределение с параметром μ_i $\left(i=\overline{1,Q}\right)$, а условное распределение времени обслуживания требования в остальных $N-Q$ узлах, при наличии в узле n_i требований – показательное с параметром $\mu_i(n_i)$, при этом $\mu_i(n_i) > 0$ для $n_i \in \mathrm{N}$ и $\mu_i(0) = 0$ $\left(i=\overline{Q+1,N}\right)$.

Длительность пребывания требования в i- ом узле – случайная величина, имеющая показательное условное распределение с параметром $\frac{v_i}{n_i}$ $\left(i=\overline{1,N}\right)$ при условии что в i-м узле находится n_i заявок. Если требование пребывает в свободный узел, оно сразу начинает обслуживаться. Требования обслуживаются в порядке поступления в узлы.

Требование типа l, завершившее обслуживание в i-м узле, моментально и независимо от других требований, переходит в j-й узел сети и становится требованием типа m с вероятностью $p_{(i,l)(j,m)}$, а с вероятностью $p_{(i,l)0}$ покидает сеть $\left(i, j=\overline{1,N},\ l,m=\overline{1,M},\ \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{(i,l)(j,m)}+p_{(i,l)0}=1\right)$. Требование типа l, время пребывания которого в i-м узле завершилось (для узлов $i=\overline{1,Q}$) моментально и независимо от других требований, переходит в j-й узел и становится требованием типа m с вероятностью $r_{(i,l)(j,m)}$, а с вероятностью $r_{(i,l)0}$ покидает сеть $\left(i=\overline{1,Q},\ j=\overline{1,N},\ l,m=\overline{1,M},\ \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} r_{(i,l)(j,m)}+r_{(i,l)0}=1\right)$. Если же $i=\overline{Q+1,N}$, то требование поступает как завершившее обслуживание, то есть с вероятностью $p_{(i,l)(j,m)}$направляется в j-й узел и становится требованием типа m, а с вероятностью $p_{(i,\,l)0}$ покидает сеть $\left(j=\overline{1,N}, l,m=\overline{1,M}\right)$. Для удобства введём ещё узел 0, отождествляющий внешность сети.

Стохастические матрицы $P=\left\lfloor p_{(i,l)(j,m)}\right\rfloor$ $\left(i, j=\overline{0,N},\ l,m=\overline{0,M}\right)$ и $R=\left\lfloor r_{(i,l)(j,m)}\right\rfloor$ $\left(i=\overline{0,Q}, j=\overline{0,N},\ l,m=\overline{0,M}\right)$, где $p_{(0,0)(0,0)}=r_{(0,0)(0,0)}=0$, $p_{(0,0)(i,l)}=r_{(0,0)(i,l)}=r_{0(i,l)}=p_{0(i,l)}$, можно рассматривать как неприводимые марковские цепи, состояния которых обозначаются парами (i,l). Матрица P является как матрицей маршрутизации обслуженных заявок, так и матрицей маршрутизации неудовлетворенных заявок для узлов $i=\overline{Q+1,N}$, а $R-$ матрицей маршрутизации неудовлетворенных заявок для узлов $i=\overline{1,Q}$. Стахостическая матрица маршрутизации, которая управляет движением требований по узлам $i=\overline{0,N}$, без учёта того, за счёт чего требование покидает сеть (обслуживание или окончание длительности пребывания) $S=\left[s_{(i,l)(j,m)}\right]$, $\left(i, j=\overline{0,N}, l,m=\overline{0,M}\right)$, где для $(i,l)\neq 0$

$$s_{0(j,m)}=p_{0(j,m)},\ \ s_{(i,l)(j,m)}=\frac{\mu_i p_{(i,l)(j,m)}+\nu_i r_{(i,l)(j,m)}}{\mu_i+\nu_i}=\frac{\mu_i}{\mu_i+\nu_i}p_{(i,l)(j,m)}+\frac{\nu_i}{\mu_i+\nu_i}r_{(i,l)(j,m)},$$

для $i=\overline{1,Q}$, и $s_{(i,l)(j,m)}=p_{(i,l)(j,m)}$ для $i=\overline{Q+1,N}$.

Состояние сети описываеться вектором $x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_N\right)$, где $x_i=\left(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{in_i}\right)$ – вектор переменной размерности, а $x_{ij}\left(1\le j\le n_i, 1\le x_{ij}\le M, n_i=0,1,\ldots\right)$ – это тип требования, которое занимает *j*-ое место в очереди i- ого узла. Первым обслуживается требование x_{i1}, остальные ожидают в очереди. Последним на прибор попадет требование x_{in_i}. Причем $x_i = 0$ если $n_i = 0$, т.е. система пустая.

Будем использовать обозначения $p(x)$– вероятность того, что в момент времени t состояние сети $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$; $[\tilde{x}_i]$ – вектор, все компоненты которого совпадают с вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, а i-ая компонента равна $\tilde{x}_i$; $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j]$– вектор, все компоненты которого совпадают с вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, а i-ая и j-ая компоненты равны $\tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_j$. Введём также оператор $\mathrm{T} : (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}) \to (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i - 1})$ и оператор $\mathrm{K}_l : (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}) \to (l, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i})$.

2. Изолированный узел

Рассмотрим изолированно от сети i-ый узел, полагая, что в него поступает M независимых пуассоновских потоков требований интенсивности $\lambda\varepsilon_{i,l}$, $l = \overline{1, M}$. В остальном, касающемся процессов обслуживания и ограничениях на длительность пребывания, поведение изолированного узла такое же, как и в сети.

Для эргодичности цепи Маркова $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i})$, описывающей изолированный узел, необходимо чтобы загрузка i-ого узла $\rho_i = \dfrac{\lambda}{\mu_i + \nu_i} \varepsilon_{i, x_{il}} < 1, \quad i = \overline{1, Q}.$

Проверено, что

$$p_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i}) = \frac{\lambda^{n_i}}{(\mu_i + \nu_i)^{n_i}} \prod_{\kappa=1}^{n_i} \varepsilon_{ix_{i\kappa}} p_i(0), \quad n_i = 1,2,\ldots,$$
$$p_i(0) = \left[\sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{\kappa=1}^{n_i} \left(\varepsilon_{ix_{i\kappa}} \frac{\lambda}{\mu_i + \upsilon_i} \right) \right]^{-1}. \tag{1}$$

является стационарным распределением цепи Маркова $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i})$.

Теперь изолируем i-ый узел для $i = \overline{Q+1, N}$. Имеем систему с поступающим пуассоновским потоком интенсивности $\lambda \sum_{l=1}^{M} \varepsilon_{i,l}$, а условное распределение длительности обслуживания прибором при условии, что в системе находится n_i заявок, – показательное с параметром $\mu_i(n_i)$, зависящим от n_i. Время пребывания требования в узле – случайная величина, условное распределение которой при фиксированном n_i – показательное с параметром $\frac{\nu_i}{n_i}$.

Стационарное распределение цепи Маркова $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{in_i})$, описывающей изолированный узел

$$\begin{aligned} p_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{in_i}) &= \lambda^{n_i} \prod_{\kappa=1}^{n_i} \left(\frac{\varepsilon_{ix_{i\kappa}}}{\mu_i(k) + \nu_i} \right) p_i(0), \quad n_i = 1,2,\dots, \\ p_i(0) &= \left[\sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{\kappa=1}^{n_i} \left(\varepsilon_{ix_{i\kappa}} \frac{\lambda}{\mu_i(k) + \upsilon_i} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Для эргодичности цепи Маркова $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{in_i})$, достаточно сходимости ряда

$$\sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{\kappa=1}^{n_i} \left(\varepsilon_{ix_{i\kappa}} \frac{\lambda}{\mu_i(k) + \upsilon_i} \right) < \infty. \tag{3}$$

3. Основной результат

Поскольку требования при прохождении узлов не рождаются и не теряются, то в стационарном режиме выполняется следующий закон сохранения (уравнение трафика):

$$\varepsilon_{i,l} = p_{0(i,l)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \varepsilon_{j,m} s_{(j,m)(i,l)}, \quad i = \overline{1,N}, \quad l = \overline{1,M}. \tag{4}$$

Здесь $\varepsilon_{i,l}$ – средняя интенсивность поступления требований типа l в i-ый узел когда сеть находится в стационарном режиме.

Доказана следующая теорема:

Теорема 1. При выполнении условия

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu_i + \nu_i} \varepsilon_{i,x_{il}} < 1, \, i = \overline{1,Q}, \, l = \overline{1,M}, \\ \displaystyle\sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_{ix_{ik}}}{\mu_i(k) + \nu_i} < +\infty, \, i = \overline{Q+1,N} \end{cases} \tag{5}$$

цепь Маркова $x(t)$ эргодична, а её единственное стационарное распределение имеет форму произведения $p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_N(x_N)$, где $p_i(x_i)$ –

стационарное распределение изолированного i*-го узла, а* $\left\{\varepsilon_{i,l},\ i=\overline{1,N},\ l=\overline{1,M}\right\}$ *– решение уравнения трафика (4).*

Найти различные показатели эффективности функционирования сети в стационарном режиме не составляет труда зная стационарное распределение системы.

Полученные результаты могут быть применены при проектировании новых и модернизации уже существующих сетей передачи данных и информационно-вычислительных сетей.

Библиографические ссылки

1. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 431с.
2. Ковалёв Е.А. Сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в очередях // АВТ. 1985. № 2. С. 50 – 55.
3. Якубович О.В., Евдокимович В.Е. Сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания положительных, отрицательных заявок и сигналов // Проблемы физики, математики и техники. 2010. № 4(5). С. 63 – 67.
4. Якубович О.В., Дудовская Ю.Е. Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов отрицательных заявок // Проблемы физики, математики и техники. 2012. № 4(137). С. 74 – 77.
5. Малинковский Ю.В., Немилостивая В.А. Стационарное распределение сетей Джексона с экспоненциальным ограничением на время пребывания заявок // Проблемы физики, математики и техники. 2020. № 3(44). С. 73 – 77.